

УДК 681.516.7.015.2

# ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТОВ

**Б. А. Коптев,**  
канд. техн. наук

**А. К. Розов,**  
д-р техн. наук

**А. Ф. Романовский,**  
канд. техн. наук

Фильтрация параметров движущихся объектов может быть осуществлена с использованием аппарата стохастических дифференциальных уравнений. Получаемые в результате решения уравнений оценки параметров позволяют определить прогнозируемое движение объекта. Приводится пример фильтрации и прогноза.

In this article filtering of movement are based on stochastic difference equation. A possibility to applied its using for prognostication movement discuss. The example of applicability is considered.

Имеется большое число работ, описывающих внешнетраекторные измерения объектов, и почти отсутствуют работы, представляющие прогноз их траекторий. В условиях ошибок и устаревания данных, полученных с помощью средств внешнетраекторных измерений, область возможных координат объекта оказывается достаточно обширной.

Неразработанность методов прогноза, возможно, объясняется тем, что пока не найдены методы, позволяющие оптимизировать решение задачи в целом – обеспечить малые ошибки прогноза и малое время на его выполнение. Иначе говоря, пока не удастся найти правило  $\delta^*$ , минимизирующее средние потери

$$R_t(\delta^*) = \inf_{\delta} \left\{ cMv + M \left[ Z_t - \bar{Z}_t^2 \right] \right\}, \quad v \leq t,$$

в которых  $v$  – момент прекращения наблюдений;  $Z_t$  и  $\bar{Z}_t$  – действительные и прогнозируемые координаты.

В настоящее время возможен другой подход, предполагающий использование имеющихся средств внешнетраекторных измерений и дополнение их процедурами фильтрации и прогноза. Насколько такое разделение снижает возможности прогноза по сравнению с оптимизацией комплекса в целом – должны показать дальнейшие исследования.

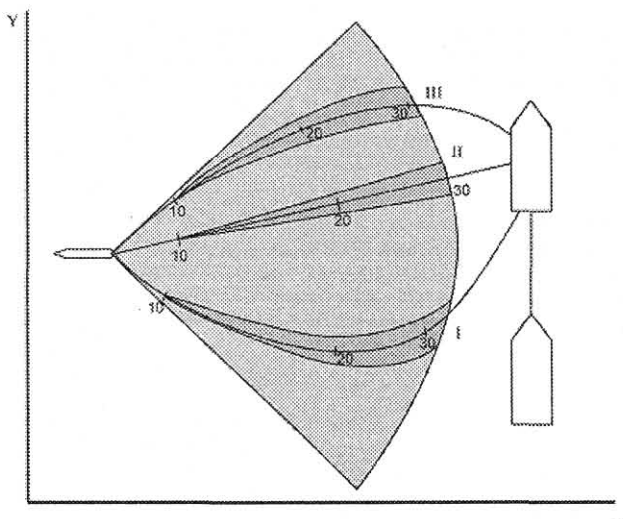
Однако и сейчас подход с частичной оптимизацией представляет значительный интерес. В теоретическом плане – это применение современных методов линейной нестационарной фильтрации. В практическом отношении – это получение вполне приемлемой точности прогноза, позволяющей сузить область ожидаемых координат местоположения объекта.

Будем придерживаться следующей последовательности изложения. Сначала сформулируем математическую модель, затем приведем алгоритмы фильтрации и прогноза траекторий и, наконец, количественно проиллюстрируем возможности фильтрации и прогноза.

## Математическая модель обстановки

Системы внешнетраекторных измерений фиксируют последовательно во времени местоположение цели с ошибками. Процедура фильтрации может использоваться для уменьшения числа ошибок, а получаемые с ее помощью данные – для прогноза координат траектории на какое-то время вперед.

Сказанное иллюстрирует рис. 1, на котором приведены последовательно во времени (моменты 1, 2, ...) наступающие значения координат объекта: I – траектория в режиме погони, II – траектория при параллельном сближении, III – траектория в случае маневра уклонения, и соответствующие им прогнозируемые сектора (штриховка) вероятного местоположения объектов поражения. Широкий сектор (точки) – местоположения объекта без прогноза.



■ Рис. 1. Траектория движения объектов для разных способов (I, II, III) сближения

Фильтрация должна осуществляться двумерным фильтром, но, когда составляющие  $X_t$  и  $Y_t$  независимы, возможно упрощение – замена двумерного фильтра двумя одномерными на каждую из составляющих. Такого варианта будем придерживаться при последующем изложении.

Предполагается, что траектория движения цели может быть представлена многочленом  $X_t$   $n$ -й степени

$$X_t = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k t^k}{k!}$$

с неизвестными коэффициентами  $k = 0, \dots, n$ . В частном случае, которого мы будем придерживаться, действительно имеющую место траекторию будем представлять многочленом второй степени

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{1}{2} \alpha_2 t^2.$$

Коэффициенты  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  зависят от способа наведения (метод погони, параллельное сближение и т. д.). Так, коэффициент  $\alpha_0$ , от которого зависит начало координат отсчета, определяется возможным сектором углов, с которых может появиться цель. Коэффициент  $\alpha_1$  определяет линейный снос траектории цели при параллельном ее сближении; коэффициент  $\alpha_2$  – квадратичный снос при наведении по режиму погони. Эти коэффициенты нам неизвестны – случайны, поскольку неизвестен режим движения цели.

Будем считать, что  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  независимы и нормально распределены. Допущение о независимости следует из множественности режимов поведения, для которых они различны и не связаны между собой. Нормальность распределения – обычное допущение для условий, когда известен диапазон возможных значений случайных величин и их средние значения.

Наблюдаемые (измеренные) траектории могут быть представлены дифференциалом

$$d\eta_t = X_t dt + \sqrt{C_2} dw_t^{(n)}, \quad (1)$$

где  $w_t^{(n)}$  – винеровский процесс.

Значения  $C_2$  при моделировании назначаются тонкими, чтобы ошибки измерений и их дисперсия

$$D_x(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\eta_t^{(j)} - X_t^{(j)})^2$$

соответствовали возможностям систем внешнетраекторных измерений.

### Фильтрация

Для того чтобы оценить  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , необходимые для прогноза (непосредственно их оценить нельзя), надо рассматривать  $X_t$  как многомерный процесс, представляемый тремя производными –  $\Theta_0(t)$ ,  $\Theta_1(t)$  и  $\Theta_2(t)$ . Тогда оценка коэффициентов  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  будет эквивалентна оцениванию  $X_t$  и производных  $X_t^{(1)}$  и  $X_t^{(2)}$ .

Введем обозначения  $\Theta_t^{(k)} = X_t^{(k)}$ . Тогда (1) эквивалентно системе уравнений

$$d\Theta_0(t) = \Theta_1(t) dt;$$

$$d\Theta_1(t) = \Theta_2(t) dt;$$

$$d\Theta_2(t) = 0;$$

$$d\eta_t = \Theta_0(t) dt + \sqrt{C_2} dw_t^{(n)}.$$

Как уже отмечалось, вектор  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = (X_0, X_0^{(1)}, X_0^{(2)})$  предполагается гауссовским со средним  $m_0$  и ковариационной матрицей  $\Gamma_t$ .

Процедуру фильтрации определяет линейный нестационарный фильтр Калмана–Бьюси. Его структура следует из теоремы 10.3 [3]. Согласно этой теореме, многоканальный фильтр определяется уравнениями

$$dm_t = (a_0 + a_1 m_t) dt + [(b \circ B) + \Gamma_t A_1^*] (B \circ B)^{-1} \times \\ \times (d\eta_t - A_0 dt - A_1 m_t dt);$$

$$\Gamma_t = a_1 \Gamma_t + \Gamma_t a_1^* - [(b \circ B) + \Gamma_t A_1^*] (B \circ B)^{-1} [(b \circ B) + \Gamma_t A_1^*] + b \circ b;$$

$$m_0 = M(\Theta_0 | \eta_0);$$

$$\Gamma_0 = \|\gamma_{ij}(0)\|;$$

$$\gamma_{ij}(0) = M[(\Theta_i(0) - m_i(0))(\Theta_j(0) - m_j(0))^*].$$

Применительно к рассматриваемому случаю, когда

$$a_0 = [0 \ 0 \ 0], \quad a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = [0 \ 0 \ 0], \quad A_1 = [1 \ 0 \ 0],$$

$$[b \circ b] = 0, [B \circ B] = 0, [B \circ B] = C_2, \Gamma_t A_1^* (B \circ B)^{-1} = \frac{1}{C_2} \begin{bmatrix} \gamma_{00}(t) \\ \gamma_{11}(t) \\ \gamma_{22}(t) \end{bmatrix},$$

уравнения фильтрации имеют вид

$$dm_0(t) = m_1(t) dt + \frac{1}{C_2} \gamma_{00}(t) [d\eta_t - m_0(t) dt];$$

$$dm_1(t) = m_2(t) dt + \frac{1}{C_2} \gamma_{10}(t) [d\eta_t - m_0(t) dt];$$

$$dm_2(t) = \frac{1}{C_2} \gamma_{20}(t) [d\eta_t - m_0(t) dt]$$

и

$$\dot{\gamma}_{00}(t) = 2\gamma_{10}(t) - \frac{1}{C_2} \gamma_{00}^2(t);$$

$$\dot{\gamma}_{01}(t) = \gamma_{11}(t) + \gamma_{02}(t) - \frac{1}{C_2} \gamma_{22}(t) \gamma_{01}(t);$$

$$\dot{\gamma}_{02}(t) = \gamma_{12}(t) - \frac{1}{C_2} \gamma_{00}(t) \gamma_{02}(t);$$

$$\dot{\gamma}_{11}(t) = 2\gamma_{12}(t) - \frac{1}{C_2} \gamma_{01}^2(t);$$

$$\dot{\gamma}_{12}(t) = \gamma_{22}(t) - \frac{1}{C_2} \gamma_{01}(t) \gamma_{02}(t);$$

$$\dot{\gamma}_{22}(t) = -\frac{1}{C_2} \gamma_{02}^2(t)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} m_0(0) &= M\alpha_0, & m_1(0) &= M\alpha_1, & m_2(0) &= M\alpha_2; \\ \gamma_{01}(0) &= D\alpha_0, & \gamma_{01}(0) &= 0, & \gamma_{02}(0) &= 0; \\ \gamma_{11}(0) &= D\alpha_1, & \gamma_{12}(0) &= 0, & \gamma_{22}(0) &= D\alpha_2. \end{aligned}$$

Ошибки фильтрации уменьшаются по мере увеличения времени наблюдения. Происходит это потому, что подлежащие фильтрации производные  $\Theta_0(t)$ ,  $\Theta_1(t)$  и  $\Theta_2(t)$  являются детерминированными во времени функциями. Это доказывает и стремление к нулю значений коэффициентов  $\gamma_{ij}(t), i=0,1,2; j=0,1,2$ . Такая особенность фильтра важна сама по себе. И не только. По мере увеличения времени предварительной фильтрации на интервале  $[0, t^*]$  увеличивается точность прогноза координат траектории в моменты  $t \geq t_k$ .

### Прогноз

При отсутствии помех коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1$  и  $\alpha_2$  от- вечали бы соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &= \Theta_0(t) - \Theta_1(t)t + \frac{1}{2}\Theta_2(t)t^2; \\ \alpha_1(t) &= \Theta_1(t) - \Theta_2(t)t; \\ \alpha_2(t) &= \Theta_2(t). \end{aligned}$$

В результате фильтрации будут вычисляться оцен- ки производных

$$\begin{aligned} m_0(t) &= M[\Theta_0(t) | \eta_0^t], & m_1(t) &= M[\Theta_1(t) | \eta_0^t], \\ m_2(t) &= M[\Theta_2(t) | \eta_0^t] \end{aligned}$$

и соответствующие оценки коэффициентов  $\bar{\alpha}_0(t)$ ,  $\bar{\alpha}_1(t)$  и  $\bar{\alpha}_2(t)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0(t) &= m_0(t) - m_1(t)t + \frac{1}{2}m_2(t)t^2; \\ \bar{\alpha}_1(t) &= m_1(t) - m_2(t)t; \\ \bar{\alpha}_2(t) &= m_2(t). \end{aligned}$$

По мере увеличения времени наблюдения оценки  $\bar{\alpha}_0(t)$ ,  $\bar{\alpha}_1(t)$  и  $\bar{\alpha}_2(t)$  будут стремиться к  $\alpha_0, \alpha_1$  и  $\alpha_2$ , следовательно, спустя определенное время  $t^*$ , может быть рассчитан прогноз, т. е. значения координат по формуле

$$\bar{X}_t = \bar{\alpha}_0(t^*) + \bar{\alpha}_1(t^*)t + \frac{1}{2}\bar{\alpha}_2(t^*)t^2.$$

Ошибки прогноза характеризуются их дисперсией

$$D_{\Pi}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\bar{X}_t^{(j)} - X_t^{(j)})^2,$$

где  $j$  – номер реализации в статистическом экспери- менте.

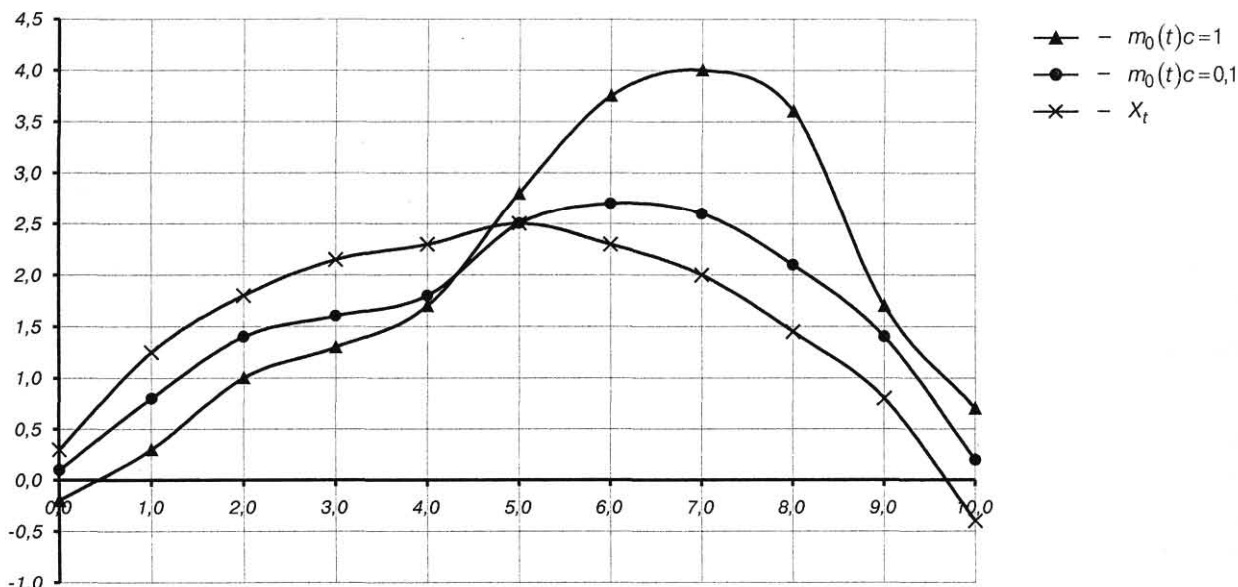
Аналогичным образом следует поступать и с на- блюдаемой (измеренной) составляющей  $Y_t$ .

Будучи пересчитанными в координаты  $X, Y$ , значе- ния  $\bar{X}_t$  и  $\bar{Y}_t$  определяют средние значения прогноза для моментов времени  $t \geq t^*$ , а их дисперсия – ширину области ожидаемого местоположения движущегося объекта.

Отметим основные отличия, являющиеся одно- временно преимуществами рассмотренных процедур фильтрации и прогноза траекторий.

Процедура фильтрации учитывает распределение коэффициентов многочлена, представляющего тра- екторию. Благодаря этому оказывается возможным согласование процедуры фильтрации со складываю- щейся обстановкой.

Данная процедура нестационарна: фильтр все вре- мя находится в переходном режиме. Фильтрация ока- зывается похожей на оценивание параметров сигнала.



■ Рис. 2. Траектории, получаемые в результате фильтрации

ла, где ошибки оценивания также уменьшаются по мере увеличения времени наблюдения.

Процедура фильтрации выступает как предварительная операция, подготавливающая данные для прогноза координат траектории после окончания фильтрации. При этом ошибки прогноза оказываются тем меньше, чем больше времени затрачено на предварительную фильтрацию. В зависимости от резерва времени становится возможным рассчитать точность прогнозируемых координат траектории.

### Моделирование

Для определения эффективности алгоритмов необходимо статистическое моделирование на ЭВМ. Пока это единственный способ получения количественных характеристик, а также обоснования требований к техническим параметрам цифровых устройств.

Задание производных  $\Theta_0(t)$ ,  $\Theta_1(t)$  и  $\Theta_2(t)$ , а также вычисление оценок осуществлялось в результате решения их рекуррентных соотношений. Приращения наблюдаемых воздействий определялись формулой

$$\eta_{k+1} - \eta_{t_k} = \Theta_0(t_k) \Delta + \sqrt{C_2} \Delta X_{t_{k+1}}^{(n)}$$

Значения коэффициентов  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  разыгрывались по нормальному закону.

Моделирование проводилось при  $\alpha_0 \approx N(0, 100 \text{ м})$ ,  $\alpha_1 \approx N[0, (5 \text{ м/с})^2]$  и  $\alpha_2 \approx N[0, (0,2 \text{ м/с}^2)^2]$ . Помеха – белый шум с  $C_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$  и  $C_2 = 1,0 \text{ с}^{-1}$ .

Результаты моделирования иллюстрируются рис. 2, на котором для частного случая, когда  $\alpha_0 = -2 \text{ м/с}^2$ , приведены  $X_t$  и отфильтрованные ее значения при  $C_2 = 0,1$  и  $C_2 = 1,0$ .

Зависимость дисперсии ошибок фильтрации от времени наблюдения, т. е.

$$D_{\text{оси}}^{(\Phi)}(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [m_0^{(j)}(t_k) - \Theta_0^{(j)}(t_k)]^2;$$

$$\Theta_0^{(j)}(t_k) = X_{t_k}^{(j)},$$

где  $j$  – номер реализации, имела вид

t, с	2	4	6	8	10
$C_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$	0,180	0,120	0,123	0,109	0,094
$C_2 = 1 \text{ с}^{-1}$	1,77	0,605	0,892	0,908	0,871

Зависимость дисперсии ошибок прогноза для моментов времени  $t \geq t_0$

$$D_{\text{оси}}^{(n)}(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\bar{X}_{t_k}^{(j)} - X_{t_k}^{(j)})^2$$

при  $t^* = 10$  с имела вид

t, с	12	14	16	18	20
$C_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$	0,382	1,08	2,48	4,92	8,79
$C_2 = 1,0 \text{ с}^{-1}$	3,42	9,62	21,9	43,1	76,9

С увеличением времени фильтрации до  $t^* = 20$  с дисперсии ошибок прогноза уменьшаются до следующих значений:

t, с	22	24	26	28	30
$C_2 = 0,1 \text{ с}^{-1}$	0,098	0,189	0,332	0,544	0,845

Таким образом, моделирование количественно иллюстрирует уменьшение ошибок фильтрации по мере увеличения времени наблюдения. Ошибки могут уменьшаться до сколь угодно малой величины. Свидетельство тому – стремление к нулю значений дисперсионных коэффициентов  $\gamma_{ij}(t)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ;  $j = 0, 1, \dots, n$ . По мере увеличения времени предварительной фильтрации на интервале  $[0, t]$  увеличивается точность прогноза координат траектории в моменты  $t \geq t^*$ .

Важно иметь в виду и то обстоятельство, что в отличие от режима фильтрации, где ошибка фильтрации уменьшалась по мере увеличения времени наблюдения, в режиме прогноза ошибки прогноза, напротив, растут по мере удаления от момента  $t^*$ . Это объясняется решающей ролью временного фактора: остающееся различие между  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и  $\bar{\alpha}_0$ ,  $\bar{\alpha}_1$ ,  $\bar{\alpha}_2$  приводит по мере увеличения времени к накоплению разности в координатах.

Таким образом, теоретически обоснована и подтверждена методом моделирования перспективность использования нестационарной линейной фильтрации траектории движения объектов для составления алгоритмов, обеспечивающих минимизацию ошибок прогноза в решении задач противоракетной и противоторпедной обороны.

### Литература

1. Калман Р. Е., Бьюси Р. С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания/Пер. с англ. – Техническая механика – 1961. – № 83. – Сер. Д. 1.
2. Кузьмин С.З. Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации. – М.: Радио и связь, 1986.
3. Липцер Р. Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974.