УДК 621391.28:518.5

ОЦЕНИВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А. Р. Бестугин,
канд. техн. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
А. Ф. Богданова,
канд. техн. наук
Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского
Г. В. Стогов,
канд. техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

В статье исследуются закономерности, характеризующие «самоподобные» процессы передачи информации в телекоммуникационных сетях. Полное описание сетевого трафика в целях управления трафиком и перегрузкой требует понимания его динамической природы, одной из характеристик которой служит фрактальная размерность.

This paper investigates regularity characterizing self-similar processes of information transmission in telecommunication networks. A complete description of data network traffic for purpose traffic control and congestion control requires understanding of its dynamic nature, one from features of its is fractal dimension.

Информационные технологии, применяемые в системе управления, определяют виды информационного обмена между органами и объектом управления, а также требования к характеристикам передаваемого трафика. Под информационными технологиями обычно понимают совокупность систематических и массовых способов создания, накопления, обработки, хранения и распределения информации с помощью средств вычислительной техники и связи. Исследования современных быстродействующих сетей, проводимые с целью изучения их трафика, генерируемого реальными службами и приложениями, показали, что фактическая нагрузка в исследуемых сетях существенно отличается от наиболее распространенных норм телефонного и пакетного трафика и носит фрактальный характер.

Фрактальность вообще подразумевает наличие внутреннего свойства подобия на разных уровнях, которое носит название самоподобия. Самоподобие системы означает, что структура или процесс выглядят одинаково в различных масштабах или в различных по продолжительности интервалах времени. Другая особенность понятия «фрактальность» ассоциирована с пространствами дробной размерности.

Наука о фракталах появилась как наука о геометрических объектах, демонстрирующих сложное, высоко нерегулярное проявление при всех разрешениях. В этом случае фрактальная размерность выступает в качестве количественной меры структурности этих объектов. В случае динамических систем фрактальная размерность определяет количество информации, необходимое для их описания, и служит для оценки эффективности числа ее степеней свободы. Понятие «подобие на всех масштабах» иногда имеет силу в статистическом смысле, приводя к понятию случайных фракталов [1]. Для случайных процессов определение фрактальной размерности позволяет идентифицировать стохастические колебания, выделив их из ряда других типов шумовых процессов, например, естественных флуктуаций, для которых размерность всегда равна целому числу [2].

В большинстве случаев получение фрактальной размерности теоретическими методами затруднено. Наиболее широко используемые способы расчета фрактальной размерности основываются на численных методах, которые применяются для приближенной оценки Хаусдорфа–Безиковича D_H.

Классическое определение размерности Хаусдорфа–Безиковича множества A сводится к следующему [3]. После покрытия A конечным набором $N(\varepsilon)$ шариков разного размера ε_i ($i = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$), не превышающего ε ($\varepsilon_i \le \varepsilon$; $i = 1, 2, \ldots, N(\varepsilon)$), вводится величина $L_\gamma(\varepsilon)$, где γ – объем множества A:

$$L_\gamma(\varepsilon) = \inf \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \varepsilon_i^\gamma,$$

где инфимум берется по всем возможным покрытиям $\boldsymbol{A}$. Тогда D_H является минимально возможной из всех γ, такой, что $L_\gamma(\varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε.

Наиболее простой алгоритм, оценивающий D_H, сводится к вычислению величины D_C – вместимости множества A:

$$D_C = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \inf N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \tag{1}$$

где инфимум берется по всем возможным покрытиям, причем используется разбиение фазового пространства на одинаковые ячейки размера ε. В общем случае $D_C > D_H$, и для большинства исследованных систем $D_C = D_H$ [4]. Трудность непосредственного численного расчета D_C связана с медленной сходимостью предельного соотношения (1) по ε.

С экспериментальной точки зрения наиболее популярной является корреляционная размерность. Рассмотрим некоторую траекторию в фазовом пространстве в течение длинного временного интервала и ряд векторов $\vec{x}_i (i = 1, 2, \ldots, N)$, которые должны быть взяты на равных временных интервалах. Расстояние между двумя векторами $\rho_{i,j} = \left|\bar{x}_i - \bar{x}_j\right|$ определяется как евклидово расстояние. Корреляционная размерность D определяется посредством корреляционного интеграла C_ρ [4, 5]:

$$C_\rho = \lim_{N\to\infty} \frac{M}{N^2}, \qquad (2)$$

где M – число пар (i, j) с расстоянием $\rho_{i,j} < \rho$.

Асимптотическое поведение корреляционного интеграла C_ρ для малых ρ имеет вид

$$C_\rho = \text{const}\cdot\rho^D + o(\rho^D).$$

В этом случае экспонента D называется корреляционной размерностью и вычисляется как

$$D = \lim_{\rho\to 0} \frac{d(\log(C_\rho))}{d(\log\rho)}.$$

Таким образом, уравнение (2) может быть переписано как

$$C(\rho) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{ij} H\left(\frac{s_{ij}}{\rho}\right),$$

где $H_s = 0$ при $s \le 1$; $H_s = 0$ при $s > 1$.

Другой метод определения фрактальной размерности использует замечательное достижение математиков XX века, а именно способ характеризации сложных математических функций или переменных, имеющих большую изменчивость, без попытки представления их в терминах элементарных базисных функций. Подобные подходы основаны на идеях Пуанкаре, Хаусдорфа, Безиковича, Колмогорова и Мандельброта. Сущность идеи состоит в рассмотрении точек пересечения функции, таких как число интервалов $N(\varepsilon)$ данной длины ε, которые функция вырезает на данной линии. Тогда характеристическим параметром, описывающим функцию, является экспонента D, когда $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}$. Этот подход аналогичен статистическому анализу случайных переменных, которые могут быть охарактеризованы числом событий в данном периоде. Они могут быть применимы к любой функции, но интересны только тогда, когда различные масштабы, составляющие функцию, являются самоподобными.

Еще в XIX веке при изучении осцилляций использовался следующий факт: когда спектр мощности Фурье функции $f(x)$ имеет самоподобную форму $E(k) \sim k^{-2\alpha}$, где α – целое, тогда не существует непрерывности производной $f(x)$ порядка $\alpha-1$.

Например, энергетический спектр единичного скачка [т. е. $f(x) = 1$, если $x > 0$, $f(x) = -1$, если $x < 0$] есть $E(k) \sim k^{-2}$, когда $k \to \infty$. Однако, когда α – нецелое, $f(x)$ имеет некоторый вид сингулярности. Сингулярность может быть локализована во всех или почти во всех точках функции [как, например, у функции $f(x) = x^{-1}\sin(1/x)$]; также сингулярность, может быть «глобальной» в том смысле, что $f(x)$ является сингулярной во всех или почти во всех x (как в случае с функцией Вейерштрасса). Гауссовы случайные функции $f(x)$ (реализации которых напоминают функцию Вейерштрасса) имеют спектр, подобный $E(k) \sim k^{-2a}$, когда $k \to \infty$, $1 \le 2\alpha \le 2$.

Гладкость стационарного гауссовского процесса может быть охарактеризована поведением его вариограммы $v(t) = E\{X(0) - X(t)\}^2$ в окрестности начала. Грубо говоря, если вариограмма стремится к нулю подобно $|t|\,\alpha$, когда $t \to 0$, то процесс имеет $\alpha/2$ производных в смысле условий Липшица [2]. Величина α иногда называется фрактальным индексом процесса. Фрактальная размерность D реализации равна $2-(1/2)\alpha$.

Таким образом, параметр α имеет важное значение при вычислении фрактальной размерности и широко используется как индекс «грубости». Величина α никогда не может превышать 2 и α должно быть меньше 2, тогда процесс является непрерывным, но недифференцируемым. При этом число пересечений процессом любого данного уровня на определенном интервале есть либо нуль, либо бесконечность. Эту проблему можно обойти, если сгладить процесс формированием скользящего среднего или сверткой на узком окне, по ширине пропорциональном, скажем, h. Сглаженный процесс является дифференцируемым, а число пересечений конечно с вероятностью 1. Если выбирать определенный уровень заранее, то есть вероятность, что будет выбран уровень, который процесс не пересекает. Таким образом, взамен среднего числа пересечений большого числа уровней можно рассмотреть среднее по отношению к весовой функции W, которая может быть почти произвольной [5]. В случае, когда весовая функция W – постоянная, оказывается, что среднее число пересечений сглаженного процесса на интервале пропорционально общей дисперсии процесса на этом интервале.

Пусть X обозначает стационарный гауссовский процесс $X = X(t)$ с нулевым средним и единичной дисперсией. Предположим, что вариограмма $v(t) = E\{X(0) - X(t)\}^2$ удовлетворяет $v(t) \sim 2c|t|^\alpha$, когда $t \to 0$, где $c > 0$. Ковариационная функция $\gamma(t) = E\{X(0)X(t)\}$ имеет вид

$$\gamma(t) = 1 - c|t|^\alpha + o(|t|^\alpha) \text{ при } t \to 0, \qquad (3)$$

а

$$\gamma''(t) = -\alpha(\alpha-1)c|t|^{\alpha-2} + o(|t|^{\alpha-2}).$$

Процесс можно сгладить, используя скользящее среднее, или фильтр, генерирующий новый процесс Y:

$$Y(t) = h^{-1}\int K(u/h)X(t+u)du, \quad -\infty < t < \infty,$$

где h – ширина полосы $h > 0$; ядро K удовлетворяет условию

$$\int(|K| + |K'|) < \infty, \int K = 1 \text{ и } \int uk(u)du = 0.$$

При $h \to 0$ получаем

$$\lim_{h\to 0} Y(t) = X(t), \; -\infty < t < \infty,$$

с вероятностью 1.

Хотя реализации истинного процесса X не являются дифференцируемыми, реализации Y – дифференцируемые:

$$0 < \lambda = E\{Y'(0)^2\} = \iint K(u_1)K(u_2)\gamma''\{h(u_1 - u_2)\}du_1du_2 < \infty. \quad (4)$$

Случайная функция $N(u) = \{t \in (0, 1): Y(t) = u\}, -\infty < u < \infty$, хорошо определена с вероятностью 1. Оценки фрактального индекса [5] основываются на поведении этой величины, когда $h \to 0$. Пусть весовая функция $W \geq 0$ удовлетворяет условию

$$W(u) \leq D1\,(1+|u|)^{D_2},\ -\infty < u < \infty,$$

для произвольных постоянных $D_1, D_2 > 0$. Это условие гарантирует, что $M = \int NW$ хорошо определена, конечна с вероятностью 1 и имеет все конечные моменты. Можно показать [5], что

$$M = \int_0^1 |Y'(t)|\, W\{Y(t)\}\, dt. \tag{5}$$

Отсюда, при $h \to 0$

$$E(M) \approx \lambda^{1/2} E[W\{X(0)\}] E|Z_0|,$$

где Z_0 – случайная переменная, распределенная по нормальному закону.

Из (3) и (4), интегрируя по частям, при $h \to 0$ можно получить $\lambda \sim C_1 h^{\alpha-2}$, где

$$C_1 = c \int \int K'(u_1) K'(u_2)\, |u_1 - u_2|^{\alpha}\, du_1 du_2.$$

Получить c и α можно из (3). Следовательно,

$$E(M) \sim C_2 h^{(\alpha-2)/2}, \tag{6}$$

где $C_2 = C_1^{1/2} \in [W[X(0)]] E|Z_0|$.

Формула (6) дает возможность оценивания $(1/2)\alpha - 1$ и, следовательно, α и $D = 2 - (1/2)\alpha$ из наклона линейной регрессии $\log E(M)$ на $\log h$. Поскольку $E(M)$ неизвестна, то ее можно заменить практической оценкой.

При этом подходе используется только ограниченное число h и учитывается, что $(\operatorname{var} M)/(E(M))^2 \to 0$, когда $h \to 0$. Этот результат имеет силу тогда и только тогда, когда $W \equiv \text{const}$. Без потери общности можно считать, что $W \equiv 1$. Тогда из (5) видно, что

$$M = M(h) = \int_0^1 |Y'(t)|\, dt$$

представляет общую дисперсию процесса Y на интервале (0, 1). Тем не менее, на практике удобнее пользоваться для вычисления формулой

$$M = \int NW.$$

Для того чтобы подтвердить состоятельность оценки, основанной на конечном h, необходимо отметить, что

$$\log M(h) = \log\{EM(h) + O_p(1)$$

и, с учетом (6),

$$\log\{EM(h)\} = (1/2)(\alpha-2)\log h + \log C_2 + O(1).$$

Следовательно,

$$\log M(h) = (1/2)(\alpha-2)\log h + c_2 + O_p(1).$$

Таким образом, для каждого фиксированного $k \geq 1$ регрессионная оценка определяется как

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(h_1, \ldots, h_k) = 2\{\sum_{j=1}^{K} (x_j - \bar{x}) \log M(h_j)\}\{\sum_{j}^{K} (x_j - \bar{x})^2\}^{-1} + 2, \tag{7}$$

где $x_j = \log h_j$ и $\bar{x} = K^{-1} \sum \log h_j$.

Напомним, что фрактальная размерность D реализации равна $2 - (1/2)\alpha$. Суммируя все вышеизложенное, можно сказать, что исследование фрактальной размерности может быть полезно как с теоретической, так и с практической точек зрения. Например, самоподобие в пакетном трафике, которое характеризуется дробной (фрактальной) размерностью, может быть использовано для уменьшения издержек измерения. Если известно, что трафик самоподобен, то нет необходимости иметь измерения с очень хорошей временной шкалой порядка десятков миллисекунд. Трафиковые параметры могут быть оценены из грубых измерений, таких как секундные отсчеты. Таким образом, возможно скомпенсировать неадекватно грубо выбранные измерения простым преобразованием временной шкалы. Это временное преобразование использует самоподобные характеристики трафика, чтобы вывести более тонкое поведение временной шкалы из грубого временного масштаба измерения.

Преобразование временной шкалы при анализе фрактальных процессов основано на оцененном корреляционном интервале для обычного ряда измерений данных и задается формулой

$$\lambda_2 = \lambda_1 \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{1-D_c},$$

где t_1 и t_2 – новый и старый выборочные интервалы соответственно, коэффициент $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ – размер шкалы; D_C – корреляционная размерность, $0 \leq D_c \leq 1$.

Кроме ранее упомянутых областей применения, фрактальная размерность может быть полезна и при сравнении объектов из разных классов.

Литература

1. **Львов Г. А.** Фрактальные среды. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. – 24 с.
2. **Lindstrom T.** Nestandarded analysis, iterated function system, and brownian motion on fractals. – Preprint Ser. Inst. Math., 1990. – P. 1–38.
3. **Болштянский М. А., Залякин В. И., Зельдович Б. Я.** Измерение корреляционной размерности траектории процесса с помощью фоторефрактивного кристалла. – Препринт. – Челябинск: Изд-во Челябинского гос.-техн. ун-та, 1994. – 12 с.
4. **Ваврив Д. М., Рябов В. Б., Третьяков О. А.** Фрактальная размерность самоподобных и несамоподобных аттракторов. Препринт № 17.– Харьков: Академия наук УССР, Радиоастрономический институт. – 1988. – 25 с.
5. **Fenerverger A., Hall P., Wood A. T. A.** Estimation of fractal index. – Preprint Ser. Inst. Math., 1999. – 24 c.