

УДК 519.2

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГАУССОВЫМ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО УРОВНЯ

С. Н. Воробьев,

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Моделированием проверяется гипотеза об условном законе распределения времени первого пересечения гауссова марковского процесса с фиксированным уровнем. Используется прецизионный генератор марковских траекторий. Гипотеза распространяется на произвольный детерминированный уровень, а также на процессы, стационарные по дисперсии.

The hypothesis about conditional distribution of point intersection Markov Gaussian process out of a constant is verified by simulation modeling. The precision generator of Markov trajectories is used. The hypothesis is extended by any determined level and also to the processes stationary with respect to dispersion.

Время первого пересечения случайной траектории с заданной границей – это базовый параметр при измерении дальности и в множестве других практических приложений [1]. В рамках общих моделей случайных процессов получить функцию распределения времени пересечения затруднительно. Некоторые упрощения задачи пересечения достигаются ограничением в виде требования дифференцируемости процесса [1]. С другой стороны, в радиотехнике, автоматическом управлении, теории массового обслуживания и надежности, медицине и т. д. широко применяется модель недифференцируемого марковского гауссова процесса [2]. Исследование пересечений марковского процесса, таким образом, нуждается в самостоятельном подходе. В работе используется классическое определение функции распределения, которое оказывается достаточным для получения закона распределения времени первого пересечения гауссовым марковским процессом заданного детерминированного уровня.

Пусть гауссов марковский процесс

$$x(\bar{t}) \in N(m(\bar{t}), \sigma^2(\bar{t})); \quad (1)$$

$$m(\bar{t}) = x_0 \exp(-\alpha \bar{t}), \quad \sigma^2(\bar{t}) = \sigma^2(1 - \exp(-2\alpha \bar{t})),$$

с начальным значением $x_0 > 0$ в момент $\bar{t} = 0$ своим математическим ожиданием $m(\bar{t})$ пересекает уровень $u = \text{const}$ в момент t_c , $x_0 > u \geq 0$. Асимптотическая независимость приращений процесса (1) на примыкающих интервалах $\bar{t}_1 \rightarrow 0$, $\bar{t}_2 \rightarrow 0$ (по-

стоянное изменение направления движения марковской траектории во времени) [2] приводит к пересечению уровня u на некотором конечном интервале T с вероятностью единица.

Если в момент \bar{t} значение процесса (1) оказывается меньше уровня u , время первого пересечения (сверху вниз) $t \leq \bar{t}$. Вероятность этого события

$$p\{x(t) < u\} = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t)} \exp\left(-\frac{(x-m(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right) dx = \Phi\left(\frac{u-m(t)}{\sigma(t)}\right), \quad (2)$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy,$$

есть условная функция распределения времени t пересечения сверху вниз (возможно, не первого). Можно сформулировать следующую гипотезу: если время t отсчитывается от $t = 0$, вероятность (2) описывается условная функция распределения времени первого пересечения уровня u :

$$F(t | x_0) = \Phi\left(\frac{u-m(t)}{\sigma(t)}\right). \quad (3)$$

Условная плотность распределения

$$f(t | x_0) = F'(t | x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{u - m(t)}{\sigma(t)} \right)' \exp \left(- \frac{(u - m(t))^2}{2\sigma^2(t)} \right). \quad (4)$$

Для проверки гипотезы моделированием необходим генератор марковских траекторий.

Корреляционная $(n+1) \times (n+1)$ – матрица \mathbf{B} , соответствующая функции корреляции $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha\tau)$, $\tau \geq 0$, представленная в виде [3]

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{11} = \sigma^2, \quad \mathbf{B}_{12} = [b_{01} \quad b_{02} \quad \dots \quad b_{0n}],$$

$$\mathbf{B}_{21}^T = [b_{10} \quad b_{20} \quad \dots \quad b_{n0}],$$

$$\mathbf{B}_{22} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \sigma^2 & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix},$$

позволяет записать $n \times n$ – корреляционную матрицу условной плотности распределения $f(x_1, \dots, x_n | x_0)$:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{22} - \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{12} / \sigma^2. \quad (5)$$

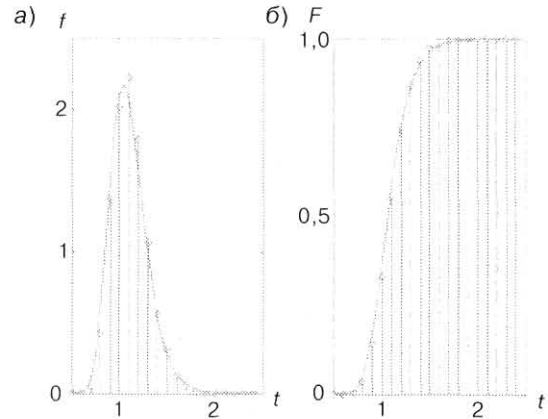
Базовый датчик randn системы MATLAB [4] формирует массив $y(n, N)$ чисел с распределением, близким к нормальному, с корреляционной матрицей $\mathbf{B}_y \neq \mathbf{I}$. Массив чисел $x(n, N)$, формируемый оператором

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_x \Lambda_x^{1/2} \mathbf{U}_x^T \mathbf{U}_y \Lambda_y^{-1/2} \mathbf{U}_y^T, \quad (6)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Y},$$

где \mathbf{U} , Λ – матрицы собственных векторов и собственных значений корреляционных матриц \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y (оператор eig), имеет корреляционную матрицу, воспроизводящую (5) с машинной точностью (погрешность порядка 10^{-14}) [5]. В моделировании использовались $N = 10\,000$ реализаций процессов $\mathbf{X} + \mathbf{M}$ с размерностью $n = 100$ отсчетов и дисперсией $\sigma^2 = 1$, имитирующих марковский процесс (1); \mathbf{M} – вектор отсчетов математического ожидания $m(t)$.

Интервал дискретизации $\Delta = 0,05T_0$ (T_0 – безразмерная единица времени, получающая, как принято в статистической радиотехнике, смысл секунды или ее доли в конкретном приложении; далее время безразмерно). Пример результатов приведен на рис. 1, а, б: непрерывные кривые – функции (3) и (4), экспериментальные результаты h и F [функция F получена численным интегрированием гистограммы (оператор cumsum)] изображены оператором stem – кружками. Начальная точка траектории $x_0 = 2 \exp(2)$,



■ Рис. 1. Пересечение постоянного уровня

$\alpha = 1$, $u = u / \sigma = 5$. MATLAB – программа моделирования для каждой реализации формирует

оценку времени первого пересечения $t = \sum_{x(i) > u(i)} \Delta$

сверху вниз суммированием интервалов $\Delta = 0,05$, пока выполняется неравенство $x(i) > u$.

Проверка гипотезы о функции распределения (3) по критерию χ^2 показывает отсутствие оснований отвергать ее. В табл. 1 приведены примеры значений χ^2 – статистики, полученные для различных уровней и реализаций.

Сравнение гистограмм и плотностей (4) для $u = 5$ в серии экспериментов дает $\chi^2 \approx 18$. Во всех случаях статистика не превосходит критического значения $\chi_{кр}^2$ для уровней значимости $\gamma \leq 0,1$: $\chi_{кр}^2 \geq \chi_{0,9(99)}^2 = 62,6025$ при $m = 100$ интервалов. Асимметрия плотности распределения положительна.

Модель (3) обобщается на случай уровня $u = u(\tilde{t})$ его аппроксимацией ступенчатой функцией

$$v(\tilde{t}) = u_i = u(\tilde{t}_{i-1}),$$

где $\tilde{t}_{i-1} \leq \tilde{t} < \tilde{t}_i$, $i = 1, \dots, k$, индекс k соответствует длительности интервала T ;

$$x_0 > u(\tilde{t} = 0).$$

Первое пересечение может произойти в одном из k интервалов Δt_i с вероятностью

$$p_i = \Phi \left(\frac{u_i - m_i}{\sigma_i} \right) - \Phi \left(\frac{u_i - m_{i-1}}{\sigma_{i-1}} \right),$$

задаваемой функцией (3); $m_i = m(\tilde{t}_i)$, $\sigma_i = \sigma(\tilde{t}_i)$. Эти события несовместны, поэтому вероятность пересечения равна

■ Таблица 1

u	2	4	6	8	10
χ^2	29,1620	11,2068	18,4473	32,4262	57,9055

$$P_v = p\{t \in (0, T)\} = \sum_{i=1}^k p_i. \quad (7)$$

При малом a с использованием разложения интеграла вероятности в степенной ряд [6] можно записать

$$\begin{aligned} \Phi(z) - \Phi(z+a) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ &\times \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{40} - \dots - (z+a) + \frac{(z+a)^3}{6} - \frac{(z+a)^5}{40} + \dots \right) = \\ &= -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{z^2}{2 \cdot 1!} + \frac{z^4}{4 \cdot 2!} - \frac{z^6}{8 \cdot 3!} + \dots + \delta(a) \right) = \\ &= -\frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \delta(a). \end{aligned} \quad (8)$$

На левой границе ступеньки u_i

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{u_i - m_{i-1}}{\sigma_{i-1}}\right) &\approx \Phi\left(\frac{u_i - m_i + m'_i \Delta t_i}{\sigma_i - \sigma'_i \Delta t_i}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{u_i - m_i}{\sigma_i} + b_i\right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$b_i = \frac{m'_i \sigma_i - (m_i - u_i) \sigma'_i}{\sigma_i^2 - \sigma_i \sigma'_i \Delta t_i} \Delta \lambda_i.$$

Пусть $\Delta t_i = \Delta$. Подстановка (8) и (9) в сумму (7) позволяет предельным переходом $\Delta \rightarrow 0$ получить условную функцию распределения времени t первого пересечения гауссова марковского процесса с уровнем $u(t)$:

$$\begin{aligned} F(t | x_0) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} P_v = \\ &= -v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i \frac{m'_i \sigma_i + (u_i - m_i) \sigma_i}{\sigma_i^2} \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(u_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \Delta = \\ &= -v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{m'(\bar{t}) \sigma(\bar{t}) + (u(\bar{t}) - m(\bar{t})) \sigma'(\bar{t})}{\sigma^2(\bar{t})} \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{(u(\bar{t}) - m(\bar{t}))^2}{2\sigma^2(\bar{t})}\right) d\bar{t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Плотность распределения времени первого пересечения

$$f(t | x_0) = -v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m'(t)}{\sigma(t)} + \frac{(u(t) - m(t)) \sigma'(t)}{\sigma^2(t)} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{(u(t) - m(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right). \quad (11)$$

Коэффициент $v = 1/F(\infty | x_0)$ нормирует функцию (10).

Если в точке пересечения t_c математического ожидания с уровнем значение дисперсии $\sigma^2(t_c) \approx \sigma^2$, что имеет место при

$$t_c > 2/\alpha, \quad (12)$$

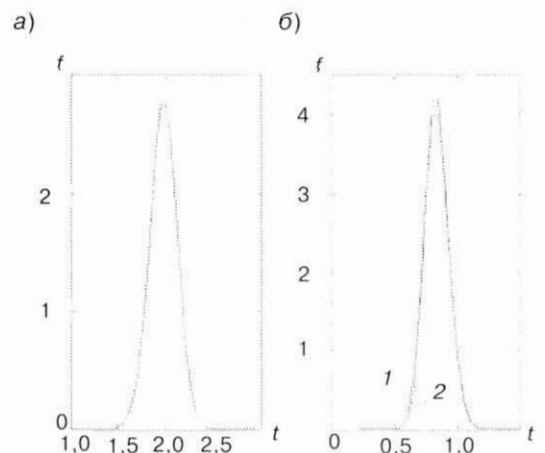
плотность распределения (10) за счет приближения производной $\sigma'(t)$ к нулю принимает вид

$$f(t | x_0) \approx -v \frac{m'(t)}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} \exp\left(-\frac{(u(t) - m(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right). \quad (13)$$

Функция (13) распространяется на значения $t > t_c$, когда траектория и уровень расходятся; знак разности $u(t) - m(t)$ в этом случае значения не имеет, т. е. допустимы уровни с $u(0) > x_0$. Плотности (11) и (13) показаны на рис. 2, а, б для $x_0 = 2 \exp(2)$, $\alpha = 1$, $\sigma^2 = t$; уровни $u = 20 - 9t$ и $u = 5 + 2t^2$ – кривые 2 и 3 на рис. 3.

В первом случае $u(0) > x_0$, $t_c = 2$, $\sigma^2(t_c) = 0,9817\sigma^2$, результаты расчетов различаются во втором-третьем десятичном знаке. Во втором случае $u(0) < x_0$, $t_c = 0,8369$, $\sigma^2(t_c) = 0,8125\sigma^2$, приближение (13) заметно на левой ветви плотности (кривые 1, 2, рис. 2, б). Таким образом, при выполнении условия (12) плотности (11) и (13) описывают распределение времени первого пересечения для марковских траекторий с монотонным математическим ожиданием $m(t)$, $m'(t) < 0$, сходящихся или расходящихся с уровнем $u(t)$. Если производная $m'(t) > 0$, изменяется знак плотности.

На рис. 3, а, б приведены примеры пересечения марковскими траекториями уровней



■ Рис. 2. Условные плотности распределения

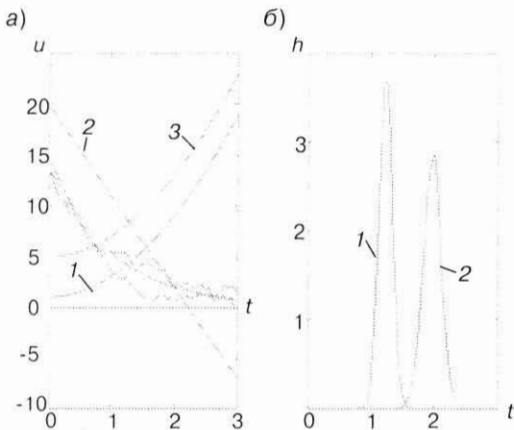


Рис. 3. Пересечение непрерывных уровней

$u_1 = 1 + 2\hat{t}^2$, $u_2 = 20 - 9\hat{t}$ соответственно. Результаты моделирования (10^4 реализаций, интервал дискретизации $\Delta = 0,05$) показаны полигонами частот – гистограммы изображены оператором plot. В обоих случаях наблюдается смещение, соответствующее отрицательной асимметрии плотности распределения: математическое ожидание времени пересечения $M[\hat{t}] = 1,2358 < t_c = 1,2618$; $M[\hat{t}] = 1,9691 < t_c = 2$.

На рис. 4, а, б и 5, а, б для этих случаев показаны нормированные плотности и функции распределения времени первого пересечения, построенные с интервалом $\Delta = 0,05$. Плотность (11) в первом случае описывает распределение первого пересечения снизу вверх, во втором – сверху вниз.

χ^2 -статистика сравнения значений плотности (11) и гистограмм по $n = 100$ интервалам не превосходит критический уровень $\chi^2_{0,9}(100) = 63,1671$, что подтверждает визуальную близость теоретических и экспериментальных данных.

Можно предположить, что распределения близки к нормальному, и плотность (11) представляется рядом Эджворта [8]. Аппроксимация плотностей, показанных на рис. 6, а, б суммой

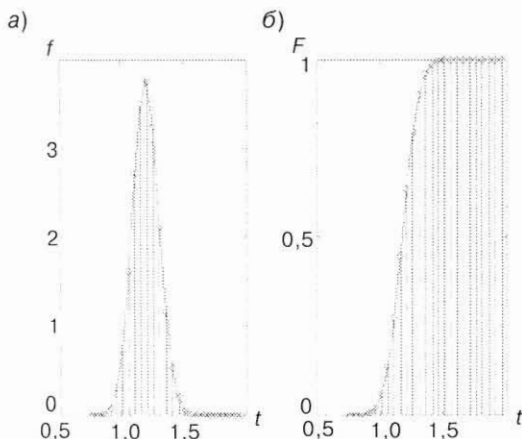


Рис. 4. Пересечение уровня $u = 1 + 2t^2$

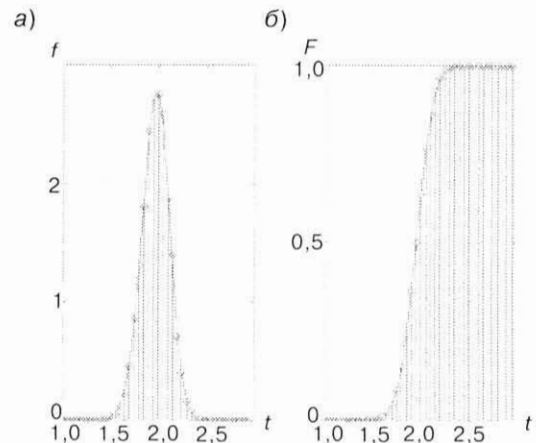


Рис. 5. Пересечение уровня $u = 20 - 9t$

$$f_a(t) = f_0(t) \sum_{i=0}^k b_i H_i(t), \quad (14)$$

где $f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_t} \exp\left(-\frac{(t - \hat{m}_t)^2}{2\hat{\sigma}_t^2}\right)$, $\hat{m}_t, \hat{\sigma}_t^2$ – оценки

моментов; $H_0(t) = 1$, $H_1(t) = t$, $H_2(t) = t^2 - 1$, $H_3(t) = t^3 - 3t$, $H_4(t) = t^4 - 6t^2 + 3$ – полиномы Чебышева–Эрмита, методом наименьших квадратов в 100 узлах с интервалом $\Delta = 0,05$ (аппроксимация показана оператором stem) дает в серии экспериментов для вышеприведенных примеров, оценки коэффициентов $\hat{b}_1 \neq 0$, $\hat{b}_2 \neq 0$, $\hat{b}_3 < 0$, $\hat{b}_i \approx 0$ при $i \geq 4$, значения χ^2 -статистики не превышают значения $\chi^2_{кр}$.

Экссесс не является значимым, асимметрия становится отрицательной. Сумма (14) отличается от ряда Эджворта, в котором $b_1 = b_2 = 0$.

Если в выражении (11) положить $\sigma^2(t) = \sigma^2$, то функция

$$f(t) = v \frac{|m'(t)|}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(u(t) - m(t))^2}{2\sigma^2}\right) \quad (15)$$

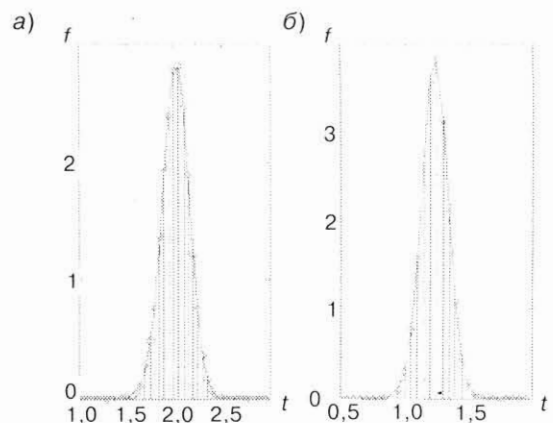
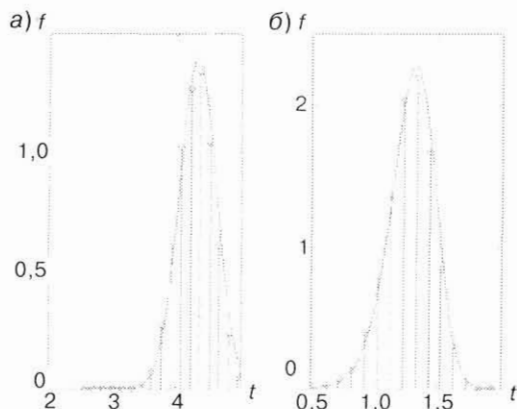


Рис. 6. Аппроксимация условной плотности распределения



■ Рис. 7. Плотности распределения

становится плотностью распределения (безусловной) времени первого пересечения. На рис. 7, а, б показаны результаты расчета плотности (15) и моделирования первого пересечения траекторий с $\alpha = 1$, $\sigma^2 = 1$, $m(\bar{t}) = 5 - \bar{t}/2$ и уровней $u_1 = 20 - 4\bar{t}$ (рис. 7, а), $u_2 = 1 + 2\bar{t}^2$ (рис. 7, б). Уровень u_1 на интервале $t \leq 5$ пересекается с вероятностью $p = 0,91$, уровень u_2 – с вероятностью единица. Генератор стационарного марковского процесса описывается оператором (6), в котором \mathbf{U}_x , Λ_x – собственные векторы и собственные значения корреляционной матрицы \mathbf{B}_x гауссова процесса с функцией корреляции $R(\tau) = \sigma^2 \exp(-\alpha|\tau|)$.

В заключение следует отметить, что представление процесса марковской моделью первого порядка приводит к условию дифференцируемости пересекаемого уровня. Простота выражения плотности (15) объясняется зависимостью текущего значения процесса только от одного предыдущего. По-видимому, увеличение порядка марковской модели, расширяющее область ее применения, усложнит описание плотности, а также может наложить новые ограничения на уровень.

Литература

1. Тихонов В. И., Хищенко В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиофизические приложения // Радиотехника и электроника. – 1998. – Т. 43. – № 5. – С. 501–523.
2. Тихонов В. И., Миронов М. А. Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
3. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. – М.: Мир, 1974. – 491 с.
4. Потемкин В. Г. Система MATLAB: Справочное пособие. – М.: Диалог – МИФИ, 1997. – 350 с.
5. Воробьев С. Н. Эффективное обнаружение детерминированных сигналов. – СПб.: ГУАП, 2003. – 139 с.
6. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов. – М.: Наука, 1983. – 181 с.

Уважаемые читатели и авторы!

Редакция журнала «Информационно-управляющие системы» приглашает к сотрудничеству всех, кто интересуется историей становления технической науки в России и за ее рубежами.

Мы планируем публикации, посвященные юбилеям и памятным датам, связанным с творческой деятельностью крупных ученых, научных и производственных коллективов, историей оригинальных открытий и изобретений.

В ближайшее время мы приступаем к публикации серии статей, посвященных истории технического образования и технических вузов России, предполагая рассказывать об истории их становления, деятельности руководителей, об учебной работе и направлениях научных исследований, об истории зданий и перспективах развития вузов.