

УДК 681.516.7.015.2

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ В ОБНАРУЖЕНИИ ДВИЖУЩИХСЯ ОБЪЕКТОВ

А. К. Розов,

доктор техн. наук

Военно-Морская академия им. адмирала Н. Г. Кузнецова

А. П. Лось,

доктор техн. наук

А. Р. Зеялютдинов,

канд. техн. наук

Федеральное Государственное унитарное предприятие

«Первый Центральный научно-исследовательский институт
Министерства обороны России»

Обосновывается целесообразность использования аппарата стохастических дифференциальных уравнений для составления алгоритмов построения систем обнаружения сигналов.

The purpose of this paper is to ground of advise stochastic difference equation to using for compose algorithm of signal discover systems. The example of appli-cability is considered.

Введение

Еще во второй половине прошлого столетия было обращено внимание на то, что аналитические методы изучения случайных процессов следует дополнить вероятностными методами. Аналитические методы, оперирующие с распределениями случайных величин, используют для их изучения различный аналитический аппарат — производящие функции, характеристические функции и др. Вероятностные методы, основанные на оперировании с самими случайными величинами, позволяют использовать потраекторное представление случайных процессов и вести их изучение аппаратом стохастических дифференциальных уравнений.

Дополнение аналитических методов вероятностными радикальным образом изменило теорию статистики случайных процессов. Появились алгоритмы линейной нестационарной фильтрации Калмана—Бьюси [2], нелинейная фильтрация с помощью стохастических дифференциальных уравнений К. Ито [1], теория оптимальных правил остановки [3, 4] и многое другое.

Однако при разработке помехоустойчивых систем до сих пор используются практически только аналитические методы, в частности корреляционно-спектральные. Их узость не позволяет учитывать случайный характер обстановки и, что важно, негауссовский характер сигналов, обусловленный слу-

чайностью их параметров. Корреляционно-спектральные методы не способны дать рецепт процедуры последовательного во времени вычисления апостериорной вероятности момента появления сигнала, являющейся достаточной статистикой в задачах обнаружения сигналов. Корреляционные методы не позволяют также учесть предназначение процедуры обнаружения, ее завершающий характер.

Потраекторный метод, использующий аппарат стохастических дифференциальных уравнений, наоборот, позволяет в результате последовательного во времени их решения находить текущие значения апостериорных вероятностей и с помощью теории оптимальных правил остановки учесть завершающий характер процедуры обнаружения.

Байесовский подход

Байесовский подход, само его название, предполагает, что должна быть задана априорная информация об обстановке, должно быть определено распределение дистанции, направления, элементов движения обнаруживаемого объекта — $F_t(d, \varphi, v, q)$, характеризующее случайность этих величин. Такое распределение может быть пересчитано в распределение задержки сигнала θ и его параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — $F_t(\theta, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Последнее имеет явно вы-

раженную неравномерность, что является первопричиной того, что для составления алгоритма обнаружения целесообразно использовать байесовский подход.

Эта неравномерность становится особенно выраженной при использовании повторных зондирующих сигналов, когда результаты наблюдений на предшествующем цикле используются для создания более благоприятных условий обнаружения сигнала в следующем цикле. В этом случае формой учета проведенных наблюдений является пересчитываемое от цикла к циклу апостериорное распределение.

Далее мы покажем, как с помощью $F_t(\theta, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ можно определить коэффициенты, входящие в стохастические уравнения для апостериорных вероятностей.

Правило остановки

Байесовский подход должен учитывать завершающий характер процедуры обнаружения объекта, предусматривающий остановку наблюдений в момент поступления сигнала. При отсутствии помех остановка наблюдений совпадает с задержкой сигнала θ . Когда же присутствуют помехи, в определении момента появления сигнала неизбежно возникает неопределенность. Задача обнаружения заключается в том, чтобы своевременно подать команду о появлении сигнала и тем самым как бы приблизиться к обстановке, когда помехи отсутствуют. При байесовском подходе составить алгоритм такой процедуры позволяет теория оптимальных правил остановки [3, 4].

Оптимальное правило остановки играет ключевую роль, поскольку определенный с ее помощью момент означает одновременно начало тех или иных действий, ради которых и ведется обнаружение.

При байесовском подходе наблюдения должны продолжаться до момента времени v^* , когда выигрыш от остановки $U_t(\eta_0^t)$ сравняется с выигрышем от продолжения наблюдений $U_t^T(\eta_0^t)$, т. е.

$$v^* = \min\{t : U_t(\eta_0^t) = U_t^T(\eta_0^t)\}.$$

Из этого условия можно определить статистику σ_t , выраженную через апостериорные вероятности появления сигнала на временной оси ω , и границу областей принятия решения Γ .

Реализация байесовского подхода возможна при представлении сигнала и помехи аппаратом стохастических дифференциальных уравнений.

Воздействие сигнала θ_t задается процессом χ_t в виде

$$\chi_t = \begin{cases} 0, & t < \theta, \\ \theta_t, & t \in [\theta, \theta + h], \\ 0, & t > \theta + h, \quad h \leq \infty, \end{cases}$$

где θ (начало воздействия сигнала) — случайная величина; h (продолжительность сигнала) — посто-

янная или также случайная величина; θ_t — сигнал, представляемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$d\theta_t = a_0(\lambda_1, \dots, \lambda_n)dt + a_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\theta_t dt + bdw_t^{(s)},$$

в котором $w^{(s)}$ — винеровский процесс.

Наблюдаемое воздействие представляется дифференциалом

$$d\eta_t = \chi_t dt + \sqrt{c_2}dw_t^{(n)}.$$

Можно показать, что выигрыши $U_t(\eta_0^t)$ и $U_t^T(\eta_0^t)$ могут быть определены путем вычисления апостериорных вероятностей:

$$\begin{aligned} \pi_t^{(-)} &= P(\theta < t - h | \eta_0^t); \quad \pi_t^{(0)} = P(\theta \in [t - h, t] | \eta_0^t); \\ \pi_t^{(+)} &= P(\theta > t | \eta_0^t) \end{aligned}$$

и что решение о поступлении сигнала должно приниматься по достижении статистикой σ_t в виде

$$\sigma_t = \pi_t^{(-)} + 2\pi_t^{(0)}$$

границы $\Gamma = 1$ областей принятия решений.

Уравнения для $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$

Исходным моментом для составления уравнений является соотношение, определяющее апостериорную плотность распределения сигнала θ и продолжительности воздействия сигнала h

$$\begin{aligned} f(\theta, h | \eta_0^t) &= \frac{dP(\eta_0^t, \theta, h)}{dP(\eta_0^t)} = \frac{dP(\eta_0^t | \theta, h)f(\theta, h)}{dP(\eta_0^t)} \times \\ &\times \frac{P(\theta > t | \eta_0^t)}{P(\theta > t | \eta_0^t)} = \frac{dP(\eta_0^t | \theta, h)}{dP(\eta_0^t | \theta > t)} (1 - \pi_t) \frac{f(\theta, h)}{P(\theta > t)} = \\ &= \begin{cases} \varphi_{\theta}^{\theta+h} \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta, h), & \theta < t - h, \\ \varphi_{\theta}^t \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta, h), & \theta \in [t - h, t], \\ \frac{1 - \pi_t}{P(\theta > t)} f(\theta, h), & \theta > t, \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

где $\frac{dP(\eta_0^t | \theta, h)}{dP(\eta_0^t | \theta > t)}$ — производная меры процесса

η_0^t , содержащего сигнал, по мере процесса, не содержащего сигнала (отношение правдоподобия).

Составление дифференциальных уравнений для $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$ и $\pi_t^{(+)}$ осложняется тем обстоятельством, что используемая для этого апостериорная плотность $f(\theta, h | \eta_0^t)$ вычисляется по-разному, в зависи-

мости от интервала, к которому принадлежит начало воздействия сигнала. Чтобы учесть это обстоятельство, вводятся вспомогательные статистики α_t и β_t , первая из которых характеризует наличие сигнала в прошлом, а вторая — присутствие сигнала в наблюдаемый момент времени.

В качестве статистик α_t и β_t принимаются интегралы

$$\alpha_t = \int_0^t d\theta \int_0^{t-\theta} \varphi_0^{\theta+h} f(\theta, h) dh;$$

$$\beta_t = \int_0^t d\theta \int_{t-\theta}^{\infty} \varphi_0^t f(\theta, h) dh.$$

Теперь, используя выражение (1), получим

$$\pi_t^{(-)} = \frac{\alpha_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)};$$

$$\pi_t^{(0)} = \frac{\beta_t}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)};$$

$$\pi_t^{(+)} = \frac{P(\theta > t)}{\alpha_t + \beta_t + P(\theta > t)}.$$

При составлении дифференциальных уравнений для α_t и β_t сначала составляются рекуррентные соотношения с малым временным шагом $\Delta = t_{k+1} - t_k$, а затем в результате предельного перехода (при $\Delta \rightarrow 0$) получаются стохастические дифференциальные уравнения. Особенностью такой процедуры является то, что учитываются получающиеся при разложении $\varphi_t^{t+\Delta}$ в ряд члены вида $(\Delta w_t)^2$, поскольку они имеют порядок Δ (в среднеквадратическом смысле).

Уравнение для α_t .

Для моментов времени $t + \Delta$ значение статистики может быть представлено в виде

$$\alpha_{t+\Delta} = \int_0^t d\theta \int_0^{t-\theta} \varphi_0^{\theta+h} f(\theta, h) dh +$$

$$+ \int_0^t d\theta \int_{t-\theta}^{t+\Delta-\theta} \varphi_0^{\theta+h} f(\theta, h) dh + o(\Delta) =$$

$$= \alpha_t + \Delta \int_0^t \varphi_0^t f(\theta, t-\theta) d\theta + o(\Delta) = \alpha_t + \mu_t \Delta + o(\Delta),$$

где

$$\mu_t = \int_0^t \varphi_0^t f(\theta, t-\theta) d\theta.$$

Устремляя Δ к нулю, получим уравнение для α_t в виде

$$d\alpha_t = \mu_t dt.$$

В случае, когда распределение для h имеет вид

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ \delta e^{-\delta h}, & h \geq 0, \end{cases}$$

можно показать, что $\mu_t = \delta \beta_t$ и поэтому в этом случае

$$d\alpha_t = \delta \beta_t dt.$$

Уравнение для β_t . Для момента времени $t + \Delta$ значение статистики может быть представлено в виде

$$\beta_{t+\Delta} = \varphi_t^{t+\Delta} \left[\int_0^t d\theta \int_{t-\theta}^{\infty} \varphi_0^t f(\theta, h) dh + \int_t^{t+\Delta} d\theta \int_{t-\theta}^{\infty} \varphi_0^t f(\theta, h) dh - \right.$$

$$\left. - \int_0^t d\theta \int_{t-\theta}^{t+\Delta-\theta} \varphi_0^t f(\theta, h) dh + o(\Delta) \right] =$$

$$= \varphi_t^{t+\Delta} \left[\beta_t + f(t) \Delta - \Delta \int_0^t \varphi_0^t f(\theta, t-h) d\theta + o(\Delta) \right].$$

В случае, когда помехой является белый шум, т. е. дифференциал наблюдаемого воздействия имеет вид

$$d\eta_t = \chi_t dt + \sqrt{c_2} dw_t^{(n)},$$

$\varphi_t^{t+\Delta}$ может быть представлено в виде

$$\varphi_t^{t+\Delta} = e^{\frac{1}{c_2} m_0(t) \Delta \eta_t - \frac{1}{2c_2} m_0^2(t) \Delta} \approx$$

$$\approx 1 + \frac{1}{c_2} m_0(t) \Delta \eta_t - \frac{1}{2c_2} m_0^2(t) \Delta +$$

$$+ \frac{1}{2c_2^2} [m_0(t) \Delta \eta_t]^2 + o(\Delta) \approx 1 + \frac{1}{c_2} m_0(t) \Delta \eta_t.$$

Здесь вместо $(\Delta \eta_t)^2$ взято его среднее значение $c_2 \Delta$, которое не зависит от того, содержит η_t сигнал или нет.

Теперь, пренебрегая членами порядка $o(\Delta)$ и устремляя Δ к нулю, получим стохастическое дифференциальное уравнение для β_t в виде

$$d\beta_t = [f_1(t) - \mu_t] dt + \frac{1}{c_2} m_0(t) \beta_t d\eta_t,$$

где

$$\mu_t = \int_0^t \varphi_0^t f(\theta, t-\theta) d\theta.$$

В частном случае, когда $f_2(h)$ имеет вид

$$f_2(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ \delta e^{-\delta h}, & h \geq 0, \end{cases}$$

можно показать, что уравнение для β_t будет следующим:

$$d\beta_t = [f_1(t) - \delta \beta_t] dt + \frac{1}{c_2} m_0(t) \beta_t d\eta_t.$$

Значения оценки текущих значений сигнала $m_0(t)$ определяются в результате решения уравнений Калмана—Бьюси.

Когда параметр сигнала случаен и дискретен, условные апостериорные вероятности $\pi_i^{(-)}(t)$, $\pi_i^{(0)}(t)$ и $\pi_i^{(+)}(t)$ определяются соотношениями:

$$\pi_i^{(-)}(t) = \frac{\alpha_i(t)}{[\cdot]}; \quad \pi_i^{(0)}(t) = \frac{\beta_i(t)}{[\cdot]};$$

$$\pi_i^{(+)}(t) = \frac{P(\lambda_i|t)P(\theta > t)}{[\cdot]},$$

где $[\cdot] = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) + \sum_{j=1}^n \beta_j(t) + P(\theta > t)$.

С помощью $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, получаемых в результате решения соответствующих уравнений, определяются $\pi_i^{(-)}(t)$, $\pi_i^{(0)}(t)$, $\pi_i^{(+)}(t)$ и затем вычисляются $\pi_t^{(-)}$, $\pi_t^{(0)}$, $\pi_t^{(+)}$ по формулам:

$$\pi_t^{(-)} = \sum_{i=1}^n \pi_i^{(-)}(t); \quad \pi_t^{(0)} = \sum_{i=1}^n \pi_i^{(0)}(t); \quad \pi_t^{(+)} = \sum_{i=1}^n \pi_i^{(+)}(t).$$

Наряду с двухэтапным способом вычисления апостериорных вероятностей возможен и одноэтапный способ их нахождения. Такую возможность открывает формула замены переменных (формула Ито), позволяющая уравнения для многомерного вектора x_t [в нашем случае $\alpha_i(t)$ и $\beta_i(t)$] с

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)dw_t$$

трансформировать в уравнения для $y(x, t)$ [в нашем случае $\pi_i^{(-)}(t)$; $\pi_i^{(0)}(t)$; $\pi_i^{(+)}(t)$]:

$$dy = \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} b_i dw_t.$$

Выполнив соответствующие подстановки, получим уравнения для $\pi_i^{(-)}(t)$; $\pi_i^{(0)}(t)$; $\pi_i^{(+)}(t)$.

В частном случае, когда продолжительность сигнала h имеет экспоненциальное распределение,

$$f(h) = \begin{cases} 0, & h < 0; \\ \delta e^{-\delta h}, & h \geq 0, \end{cases}$$

уравнения имеют вид:

$$d\pi_i^{(-)}(t) = P(\lambda_i|t)\delta\pi_i^{(0)}(t)dt - \frac{1}{c_2} \pi_i^{(-)}(t) \sum_{j=1}^n m_{\theta}(\lambda_j|t) \pi_j^{(0)}(t) \left[d\eta_t - \sum_{j=1}^n m_{\theta}(\lambda_j|t) \pi_j^{(0)}(t) dt \right];$$

$$d\pi_i^{(0)}(t) = P(\lambda_i|t) \frac{f(t)}{P(\theta > t)} \sum_{j=1}^n \pi_j^{(+)}(t) dt - P(\lambda_i|t) \delta \pi_i^{(0)}(t) dt + \frac{1}{c_2} \pi_i^{(0)}(t) \left[m_{\theta}(\lambda_i|t) - \sum_{j=1}^n m_{\theta}(\lambda_j|t) \pi_j^{(0)}(t) \right] \times \left[d\eta_t - \sum_{j=1}^n m_{\theta}(\lambda_j|t) \pi_j^{(0)}(t) dt \right];$$

$$d\pi_i^{(+)}(t) = -P(\lambda_i|t) \frac{f(t)}{P(\theta > t)} \sum_{j=1}^n \pi_j^{(+)}(t) dt + \frac{1}{c_2} \pi_i^{(+)}(t) \sum_{j=1}^n m_{\theta}(\lambda_j|t) \pi_j^{(0)}(t) \times \left[d\eta_t - \sum_{j=1}^n m_{\theta}(\lambda_j|t) \pi_j^{(0)}(t) dt \right];$$

$$\pi_i^{(-)}(0) = \pi_i^{(0)}(0) = 0; \quad \pi_i^{(+)}(0) = P(\lambda_i|0).$$

Здесь плотность $f(t)$ — распределение начала воздействия сигнала θ ; $P(\lambda_i|t)$ — распределение параметра сигнала; $m_{\theta}(\lambda_j|t)$ — оценка текущих значений сигнала, вычисляемая по Калману—Бьюси.

Уравнения для апостериорных вероятностей описывают динамику изменения $\pi_i^{(-)}(t)$; $\pi_i^{(0)}(t)$; $\pi_i^{(+)}(t)$ во времени. Их последовательное во времени решение позволяет находить значения апостериорных вероятностей для текущего момента времени.

В приведенных уравнениях наблюдаемое воздействие η_t входит в виде дифференциала $d\eta_t$, а при их решении с помощью рекуррентных соотношений — в виде $\Delta\eta_t = \eta_{t_{k+1}} - \eta_{t_k}$. Такой характер считывания обусловлен тем, что

$$\eta_t = \int_0^t \theta_s ds + \sqrt{c_2} w_t^{(n)}$$

нестационарен, в то время как приращение

$$\Delta\eta_t = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \theta_s ds + \sqrt{c_2} (w_{t_{k+1}}^{(n)} - w_{t_k}^{(n)})$$

стационарно, хотя и требует интегрирования наблюдаемых воздействий за время шага дискретизации $\Delta = t_{k+1} - t_k$.

Необходимые значения c_2 , входящие в уравнение в виде коэффициентов $1/c_2$, определяются в результате вычисления математического ожидания $M(\Delta\eta_{t_k})^2$ и приравнивания его к $c_2\Delta$.

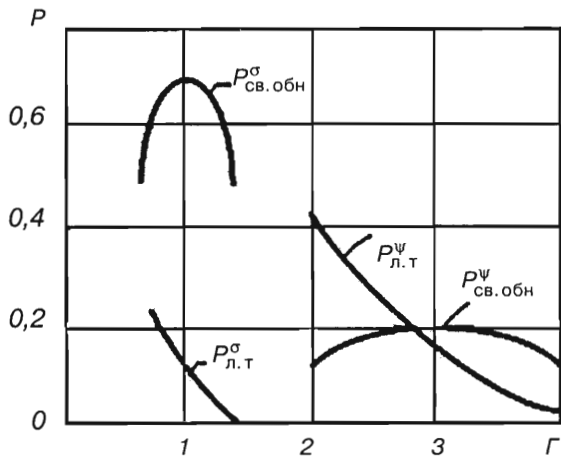
Пример. Рассмотрим случай, когда носитель системы обнаружения со скоростью $v_H = 30$ м/с начинает движение в направлении цели, отстоящей от него на 6 км. Цель движется со случайными значениями скорости v и курса q , распределенными равномерно $v \approx R [0, 15$ м/с] и $q \approx R [0, 180$ град].

В этом случае, когда локатор пройдет 4 км, двухмерная гистограмма распределения $F(\theta, v)$ в зависимости от значений интервалов задержки эхосигнала θ (скорость звука — 1,5 км/с) и относительной величины сигнала $r = 1/R$ (где R — расстояние между носителем и целью) будет иметь вид, представленный в таблице (значения вероятностей увеличены в 10 раз).

Наличие нулей в гистограмме технически означает целесообразность запираения в соответствующие моменты каналов, стробированных по дальности. Это позволит снизить мешающее воздействие помех. Математически эту роль выполняют переменные во времени коэффициенты $P(\lambda_i|t)$, входящие

■ Таблица

Δr \ $\Delta \theta$	1,07 1,50	1,50 1,93	1,93 2,35	2,35 2,78	2,78 3,21	3,21 3,64	3,64 4,07	4,07 4,49	4,49 4,92	4,92 5,35
0,03 0,09	0	0	0	0	0	0	0	0,8	0,56	0,28
0,09 0,15	0	0	0	0	0	0,39	0,91	0,18	0	0
0,15 0,20	0	0	0	0	0,87	0,73	0	0	0	0
0,20 0,26	0	0	0	1,08	0,75	0	0	0	0	0
0,26 0,32	0	0	0	0,92	0	0	0	0	0	0
0,32 0,37	0	0	0,51	0,05	0	0	0	0	0	0
0,37 0,43	0	0	0,37	0	0	0	0	0	0	0
0,43 0,49	0	0,02	0,22	0	0	0	0	0	0	0
0,49 0,54	1,0	0,19	0	0	0	0	0	0	0	0
0,54 0,60	0,01	0,16	0	0	0	0	0	0	0	0



■ Вероятности ложных тревог и своевременного обнаружения сигналов

в дифференциальные уравнения для $\pi_i^{(-)}(t)$; $\pi_i^{(0)}(t)$ и $\pi_i^{(+)}(t)$.

Практическая значимость предлагаемой процедуры обнаружения определяется возможностью увеличения дальности обнаружения по сравнению с системами обнаружения, построенными без учета обстановки и использующими статистику в виде логарифма отношения правдоподобия

$$\Psi_{t-h}^t(\lambda_i) = \frac{1}{c_2} \int_{t-h}^t m_{\theta}(s|\lambda_i) d\eta_s - \frac{1}{2c_2} \int_{t-h}^t m_{\theta}^2(s|\lambda_i) ds.$$

Результаты моделирования приведены на рисунке. Графиками показаны вероятности своевременного обнаружения сигнала для предлагаемого метода ($P_{св.обн}^{\psi}$) и традиционного ($P_{св.обн}^{\sigma}$). Приведены также вероятности ложных тревог $P_{л.т}^{\sigma}$ и $P_{л.т}^{\psi}$. Видно, что предлагаемый метод по сравнению с традиционным увеличивает вероятность обнаружения сигнала $P_{св.обн}$ с 0,22 до 0,73.

Для достижения в аналогичных условиях вероятности своевременного обнаружения $P_{св.обн} = 0,73$ традиционным методом потребуется увеличение сигнала в 2,5–3,0 раза. При квадратичной зависимости величины сигнала от дистанции это значит, что предлагаемый метод обеспечивает увеличение дальности действия систем обнаружения в 1,5 раза и более.

Литература

1. Ито К., Маккини Г. Диффузионные процессы и их траектории. — М.: Мир, 1968. — 396 с.
2. Калман Р. Е., Бьюси Р. С. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Техническая механика. Сер. 83. Д 1. — М., 1961. — С. 95–107.
3. Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И. Теория оптимальных правил останова. — М.: Наука, 1975. — 168 с.
4. Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1976. — 272 с.