УДК 519.24

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЦИАЛЬНО–ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПОСРЕДСТВОМ МНОГОКАНАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ФОРМИРУЮЩИХ ФИЛЬТРОВ

А. П. Шепета,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Предложен один из возможных подходов к исследованию поведения показателей сложных социально-экономических систем. Подход заключается в представлении показателей в виде векторного случайного процесса специального вида с заданными корреляционными функциями каждого из показателей и заданной матрицей коэффициентов взаимной корреляции между показателями. Приведены алгоритм моделирования системы показателей и явные выражения для расчета параметров алгоритма.

One of the possible approaches to research of complex social and economic systems behavior parameters is offered. The approach is consists of presentation of parameters as a special kind of vector casual process with the set correlation functions of each parameter and the set matrix of factors of mutual correlation between parameters. The algorithm of parameters system modeling and obvious expressions for calculation of algorithm's parameters are resulted.

При исследовании сложных систем, к которым относятся и социально-экономические системы, зачастую единственным методом исследования является моделирование системы на ЭВМ. В качестве математических моделей социально-экономических систем наиболее часто используются параметрические модели, так как при сравнительно малом объеме исходной информации они все же, за счет небольшого количества параметров, позволяют «настроить» модель на конкретные показатели. Особенностью социально-экономических систем является взаимосвязь показателей, что приводит к необходимости оценивать не только автокорреляционную функцию отдельно взятого показателя, но оценивать и взаимные автокорреляционные функции [1, 2]. Это еще больше увеличивает количество параметров математической модели, поэтому часто ограничиваются оценкой лишь коэффициентов взаимной корреляции отдельных показателей, так как в этом случае необходимо будет оценивать корреляционную матрицу, у которой на главной диагонали находятся единицы. При количестве показателей, равном M, количество оцениваемых параметров увеличится только на $M(M-1)$.

В данной работе рассмотрим вопросы математического моделирования поведения системы, считая, что модель системы уже построена и ее параметры определены. Целью математического моделирования в такой ситуации является проверка устойчивости модели к изменению ее параметров, что является весьма важным, так как параметры определяются по исходной информации с некоторой погрешностью [1, 3]. Учет взаимных связей параметров может компенсировать неточность определения отдельных значений, а это может привести к «правильной» реакции системы на соответствующие входные воздействия.

Пусть математическая модель социально-экономической системы включает M показателей. Пусть каждый из показателей описывается некоторым случайным процессом $\varsigma(t)$, при малом разбросе этот процесс можно считать детерминированным (цифровой индекс показателя опущен). Процесс $\varsigma(t)$ представим в виде

$$\varsigma(t) = m_\varsigma(t) + \sigma_\varsigma(t) \cdot \xi(t), \qquad (1)$$

где $m_\varsigma(t)$ и $\sigma_\varsigma(t)$ — математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение процесса $\varsigma(t)$ соответственно, детерминированные функции времени, которые при моделировании полагаются известными. Тренд и сезонные изменения включены в эти детерминированные функции, так как при моделировании нет необходимости различать эти особенности изменения показателей. Из выражения (1) получаем

$$\xi(t) = \frac{\varsigma(t) - m_\varsigma(t)}{\sigma_\varsigma(t)},$$

откуда следует, что $m_\varsigma(t) = 0$ и $\sigma_\varsigma(t) = 1$. Процесс $\xi(t)$, отражающий случайные изменения показателя, является центрированным и нормированным. Будем считать $\xi(t)$ случайным стационарным процессом с корреляционной функцией $r_\xi(t_1, t_2) = r_\xi(|t_1 - t_2|) = r_\xi(\tau)$. Указанное допущение стационарности $\xi(t)$ не является слишком ограничительным. Действительно, при анализе социально-экономических систем в качестве исходной информации используются временные ряды, для которых предполагается, что k-я разность временного ряда является не только стационарным процессом, но даже эргодическим, поскольку корреляционные характеристики этой разности можно определить только через автокорреляционную функцию. Это предположение вынужденно, но, как показывает опыт, в большинстве практических случаев выполняется.

Для корреляционной функции исходного нестационарного процесса $\varsigma(t)$ справедливо выражение

$$K_\varsigma(t_1, t_2) = m_\varsigma(t_1) \cdot m_\varsigma(t_2) + \sigma_\varsigma(t_1) \cdot \sigma_\varsigma(t_2) \cdot r_\xi(|t_1 - t_2|), \quad (2)$$

фактически и используемое на практике для аппроксимации корреляционных функций наблюдаемых показателей социально-экономических систем.

Таким образом, при указанных допущениях, которые и так присутствуют неявно в большинстве математических моделей социально-экономических систем, моделирование нестационарного процесса $\varsigma(t) = m_\varsigma(t) + \sigma_\varsigma(t)\xi(t)$ сводится к моделированию стационарного процесса $\xi(t)$, поскольку моделирование функций $m_\varsigma(t)$ и $\sigma_\varsigma(t)$ тривиально.

Для моделирования всей социально-экономической системы необходимо кроме автокорреляционных функций отдельных показателей задать и матрицу коэффициентов взаимной корреляции всех показателей системы, которая является симметричной действительной невырожденной матрицей. Для полного описания рассматриваемой модели необходимо знать конечно многомерный совместный закон распределения всех M показателей, но на практике можно определить лишь одномерные законы распределения каждого из показателей, их корреляционные функции и матрицу коэффициентов взаимной корреляции. Поэтому будем учитывать только эту информацию и синтезировать алгоритмы моделирования, которые имеют указанные статистические характеристики. Подобные ограничения используются во многих прикладных математических моделях в разных научно-технических областях [4, 5].

Далее возможны два подхода к моделированию социально-экономической системы: при первом — моделирование системы рассматривается как моделирование векторного случайного процесса, при втором — как моделирование ограниченного случайного поля [6]. При втором подходе, в общем случае, каждый из показателей рассматривается как m-мерное поле, поэтому общая размерность возрастает до mM. При моделировании системы как векторного поля можно отдельно учесть и сезонные колебания и многие другие особенности системы, практически не накладывая каких-либо существенных ограничений на статистические характеристики поля, но алгоритмы получаются достаточно сложными даже при $m = 1$. В данной работе ограничимся рассмотрением первого подхода — моделирование социально-экономической системы как векторного случайного процесса (в общем случае негауссовского). Элементами моделируемого вектора являются M показателей системы, каждый из которых является скалярным случайным процессом.

В научной литературе рассмотрены основные теоретические методы моделирования случайных величин и процессов с заданными статистическими характеристиками. Из результатов следует, что при практической реализации наиболее приемлемым методом, позволяющим моделировать процессы в реальном времени и без методической ошибки, является метод функционального нелинейного преобразования нормального случайного процесса, являющегося выходным сигналом линейного дискретного формирующего фильтра (ЛДФФ). В частном случае (моделирование нормальных процессов) нелинейное преобразование отсутствует [3–10]. Математические выражения алгоритмов моделирования векторных процессов, следующие из этого метода, позволяют распараллеливать вычисления [11, 12] при реализации их на многопроцессорных ЭВМ.

Достоинства метода особенно стали проявляться именно при появлении современных многопроцессорных платформ и соответствующих многозадачных и многопоточных операционных систем [11, 12]. Основным недостатком метода является большой объем подготовительной работы, связанной с расчетом параметров алгоритмов. При этом требуется принимать решения по мере выполнения численных расчетов для отдельных частных задач, что делает практически невозможным автоматизацию процесса синтеза алгоритма моделирования [4, 7].

В данной работе представлены некоторые новые результаты по синтезу ЛДФФ произвольного порядка, которые позволяют получить замкнутые аналитические выражения для расчета коэффициентов фильтров и тем самым полностью автоматизировать наиболее трудоемкую часть методики синтеза. Представленные алгоритмы устойчивы, ориентированы на статистические задачи, синтез их проводился с учетом последующей реализации на ЭВМ, что и обусловило их высокую практическую эффективность по сравнению с известными теоретическими алгоритмами [3–10].

Далее метод синтеза ЛДФФ обобщается на синтез многоканального ЛДФФ (МЛДФФ), позволяющего моделировать векторные нормальные случайные процессы с заданной межканальной корреляционной матрицей (определяемой по матрице взаимных коэффициентов корреляции показателей социально-экономической системы). Если показатели системы подчиняются нормальному закону, то на этом синтез алгоритма завершен, если же среди показателей есть негауссовские, то вводятся соответствующие функциональные преобразователи. При этом получаем общий алгоритм моделирования негауссовского вектора с заданной матрицей взаимной корреляции элементов и заданными корреляционными временными характеристиками каждого отдельного показателя. Этот алгоритм реализуется многоканальным нелинейным ДФФ (МНДФФ), в каждом из каналов которого используется ЛДФФ с соответствующим функциональным преобразователем, реализующий, в отличие от известных ЛДФФ, общую модель авторегрессии — скользящего среднего произвольного порядка.

Синтезируемые МНДФФ содержат переменные во времени коэффициенты, т. е. позволяют моделировать нестационарные случайные процессы, но только такие нестационарные процессы, у которых корреляционная функция определяется выражением (2). Для аппроксимаций корреляционных функций отдельных показателей чаще всего используются марковские процессы не выше второго порядка. В данной работе также ограничимся использованием марковских процессов, но произвольного порядка, и, кроме того, приведем явные аналитические выражения для расчета параметров фильтров для марковских процессов вплоть до четвертого порядка.

Метод синтеза нелинейного многоканального НМНДФФ разделим на две части: синтез канального ЛДФФ для моделирования нормального стационарного процесса и синтез межканального матричного фильтра, обеспечивающего заданную межканальную корреляционную зависимость. При этом из-за ограниченности объема рассмотрим только нормальные процессы, обобщение на негауссовский случай, хотя и требует специального рассмотрения, но без принципиальных трудностей может быть получено на основе общих выражений, приведенных в работах [4–6, 13].

Синтез линейных дискретных формирующих фильтров произвольного порядка

Рассмотрим дискретную передаточную функцию рекурсивного ЛДФФ N-го порядка, которую в общем виде можно записать как [9, 10]

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} b_i Z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^{N} a_j Z^{-j}} = \frac{U_k}{\xi_k}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{a}_N = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ и $\mathbf{b}_N = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$ — векторы параметров ЛДФФ; U_k — его выходной сигнал; а ξ_k — нормальный дискретный белый шум с нулевым средним и единичной дисперсией, $\xi_k \sim N(0, 1)$; Z^{-1} — задержка на один такт.

Отсюда выходной сигнал U_k равен

$$U_k = \sum_{j=1}^{N} a_j Z^{-j} U_k + \sum_{i=0}^{N-1} b_i Z^{-i} \xi_k = \sum_{j=1}^{N} a_j U_{k-j} + g_k, \qquad (4)$$

где g_k — окрашенный шум,

$$g_k = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \xi_{k-i} . \qquad (5)$$

Существует много разных способов синтеза ЛДФФ по заданным корреляционно-спектральным характеристикам выходного сигнала. Основным из этих способов является синтез ЛДФФ по спектральной плотности выходного сигнала путем ее факторизации, однако этот метод на практике можно успешно применять лишь для фильтров второго порядка (теоретически для фильтров не выше 4-го порядка) в силу трудностей, возникающих при факторизации спектральной плотности [4, 7, 9, 10]. Разработаны также методы синтеза, требующие задания корреляционной функции в нескольких точках, однако эти методы, во-первых, приводят к ЛДФФ очень высокого порядка, а во-вторых, не гарантируют поведение корреляционной функции моделируемого процесса вне интервала задания его корреляционной функции [12]. Здесь предложен иной метод синтеза ЛДФФ, по своей сути являющийся промежуточным между статистическим методом [7, 8, 10] и методами синтеза, вытекающими из теории автоматического управления [9], его можно рассматривать как модификацию методов, изложенных в работе [10].

Пусть решетчатая функция выходного сигнала ЛДФФ, равная r_{i-n} соответствует марковскому процессу N-го порядка. Это означает, что очередное рассчитываемое значение должно зависеть только от N предыдущих значений, т. е. может быть представлено в виде (4), а сам алгоритм может быть реализован в виде ЛДФФ с передаточной функцией вида (3). Нетрудно заметить, что среднее значение $\tilde{U}_k = M[U_k] = 0$ при любом значении k, т. е. при любых значениях k значение U_k может быть представлено в виде суммы независимых случайных величин ξ_k, $j < k$ с распределением $\sim N(0, 1)$. Или, так как $\tilde{U}_k = M[U_k] = M[U_m] = \tilde{U}_m$,

$$\tilde{U}_k = M\left[\sum_{j=1}^{N} a_j U_{|k-j|} + \sum_{i=0}^{N-1} b_i \xi_{|k-i|}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_j M\left[U_{|k-j|}\right] + \sum_{i=0}^{N-1} b_i M\left[\xi_{|k-i|}\right] = \tilde{U}_j \sum_{j=1}^{N} a_j, \qquad (6)$$

$$\tilde{U} \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{N} a_j\right) = 0, \qquad (7)$$

но для $\left(1 - \sum_{j=1}^{N} a_j\right) \neq 0$, отсюда $\tilde{U}_k = 0$. Поэтому

$$r_{|k-m|} = M\left[\left(U_k - \tilde{U}_k\right)\left(U_m - \tilde{U}_m\right)\right] = M\left[U_k U_m\right]. \qquad (8)$$

Далее, из выражения (3) следует, что при $m \le (k-N)$, $k \ge N$

$$M\left[u_m g\right] = M\left[U_m \sum_{i=0}^{N-1} b_i \xi_{|k-i|}\right] = = \sum_{i=0}^{N-1} b_i M\left[U_m \xi_{|m+N-i+d|}\right] = 0, \quad (9)$$

так как $k = m + N + d$ и при $k \ge m + n$, $d \ge 0$. Следовательно, наименьший индекс при $\xi_{|k-i|}$ равен $(m + N - i + d) \ge (m + 1 + d) > m$, поэтому при формировании U_m использованы величины ξ_j с индексами меньшими, чем при формировании g_k. Отсюда следует, что при $n \ge 0$

$$M\left[U_k U_{|k-N-n|}\right] = M\left[U_{|k-N-n|} \sum_{j=1}^{N} a_j U_{|k-j|}\right] + +M\left[U_{|k-N-n|} g_k\right] = = \sum_{j=1}^{N} a_j M\left[U_{|k-N-n|} U_{|k-j|}\right] = \sum_{j=1}^{N} a_j r_{N+n-j} = r_{N+n}, \quad (10)$$

в частности, при $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ получаем следующую систему линейных уравнений для определения вектора $\mathbf{a}_N = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$:

$$\begin{cases} r_0 a_N + r_1 a_{N-1} + \ldots + r_{N-1} a_1 = r_N; \\ r_1 a_N + r_2 a_{N-1} + \cdots + r_N a_1 = r_{N+1}; \\ \ldots \\ r_j a_N + r_{J+1} a_{N-1} + \cdots + r_{N-1+j} a_1 = r_{N+j}; \\ \ldots \\ r_{N-1} a_N + r_N a_{N-1} + \cdots + r_{2(N-1)} a_1 = r_{2N-1}. \end{cases} \quad (11)$$

Или, вводя корреляционную матрицу $\mathbf{r}_{N,N} = \{C_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, где $C_{ij} = r_{|i+j-2|}$, вектор свободных членов $\mathbf{r}_N = (r_N, r_{N+1}, \ldots, r_{2N-1})$, вектор неизвестных параметров $\mathbf{a}_N^* = (a_N, a_{N-1}, \ldots, a_1)$, систему уравнений (11) запишем в матричной форме [14]:

$$\mathbf{r}_{N,N} \cdot \mathbf{a}_N^* = \mathbf{r}_N^{\mathrm{T}}, \quad (12)$$

где $()^{\mathrm{T}}$ — знак транспонирования. Используя формулы Крамера, получаем решение

$$a_l = \det \mathbf{r}_{N,N}^{(l)} / \det \mathbf{r}_{N,N}, \quad (13)$$

где $\mathbf{r}_{N,N}^{(l)}$ — матрица $\mathbf{r}_{N,N}$, в которой l-й столбец заменен на вектор $\mathbf{r}_N^{\mathrm{T}}$.

Теперь определим вектор $\mathbf{b}_N = (b_0, b_1, \ldots, b_{N-1})$. Сначала заметим, что

$$\tilde{g}_k = M\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i \xi_{k-1}\right] = \sum_{i=0}^{N-1} b_i M\left[\xi_{k-1}\right] = 0, \quad (14)$$

и, обозначая через $R_n \triangleq M\left[g_k g_{k-n}\right]$, получим, что при $0 \le n \le N-1$

$$M\left[g_k g_{k-n}\right] = R_n = M\left[\left(\sum_{i=0}^{N-1} b_i \xi_{k-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{N-1} b_j \xi_{k-n-j}\right)\right] = = \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} b_i b_j M\left[\xi_{k-i}\xi_{k-n-j}\right] = \sum_{j=0}^{k-n-1} b_j b_{n+j}. \quad (15)$$

Отсюда для определения вектора $\mathbf{b}_N$ получаем систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_{N-1}^2 = \sum_{j=0}^{N-1} b_j^2 = R_0; \\ b_0 b_1 + b_1 b_2 + \cdots + b_{N-2} b_{N-1} = \sum_{j=0}^{N-2} b_j b_{j+1} = R_1; \\ \ldots \\ b_0 b_i + b_1 b_{i+1} + \cdots + b_{N-1-i} b_{N-1} = \sum_{j=0}^{N-i-1} b_j b_{j+i} = R_i; \\ \ldots \\ b_0 b_{N-1} = R_{N-1}, \end{cases} \quad (16)$$

где $R_0, R_1, \ldots, R_{N-1}$ — отсчеты решетчатой функции корреляции окрашенного нормального шума g_k, $R_j = 0$, при $j \ge N$. Найдем R_n для $n > 0$. По определению

$$R_n = M\left[g_k g_{k-n}\right] = M\left[\left(U_k - \sum_{j=1}^{N} a_j U_{k-j}\right) \times \times \left(U_{k-n} - \sum_{i=1}^{N} a_i U_{k-n-i}\right)\right] = M\left[U_k U_{k-n}\right] - -\sum_{j=1}^{N} a_j M\left[U_{k-j} U_{k-n}\right] - \sum_{i=1}^{N} a_i M\left[U_k U_{k-n-i}\right] + +\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j M\left[U_{k-j} U_{k-n-i}\right] = = r_n - \sum_{j=1}^{N} a_j r_{|j-n|} - \sum_{i=1}^{N} a_i r_{|i-n|} + +\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j r_{|n+i-j|} = r_n - \sum_{l=1}^{N} a_l \left(r_{|n-l|} + r_{|n+l|}\right) + +\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_i a_j r_{|n+i-j|}. \quad (17)$$

Резюмируя, получаем, при задании марковского дискретного нормального случайного процесса N-го порядка с корреляционной функцией $\mathbf{r}(nT) = r_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (T — интервал дискретизации) передаточная функция ЛДФФ, формирующего этот марковский процесс из нормального дискретного шума $\xi_k \sim N(0, 1)$, определяется векторами $\mathbf{a}_N$ и $\mathbf{b}_N$, где вектор $\mathbf{a}_N$ является решением системы линейных уравнений, а вектор $\mathbf{b}_N$ — нелинейных вида

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{N-1} r_{i+j} a_{N-i} = r_{N+j}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1, \\ \sum\limits_{l=0}^{N-1} b_i b_{i+l} = r_l - \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \left(r_{|l-k|} + r_{|l+k|} \right) + \sum\limits_{i=1}^{N} \sum\limits_{j=1}^{N} a_i a_j r_{|l+i-j|}, \\ \qquad l = 0, 1, \ldots, N-1; \end{cases} \tag{18}$$

Система из $2N$ уравнений (18) и определяет решение задачи синтеза ЛДФФ. Если в качестве $\mathbf{r}(nT)$ используется нормированная корреляционная функция, то $r_0 = 1$ и на выходе ЛДФФ, коэффициенты которого определяются системой (18), образуется дискретный нормальный шум, представляющий собой марковский процесс N-го порядка с заданной корреляционной функцией, нулевым средним и единичной дисперсией. ЛДФФ имеет стандартную структуру и может быть представлен как последовательное соединение двух фильтров: нерекурсивного фильтра с конечной импульсной характеристикой, определяемой вектором $\mathbf{b}_N$, формирующим окрашенный шум g_k, $k = 1, 2\ldots$, с корреляционной функцией $R_0, R_1, \ldots, R_{N-1}$ и $R_n = 0$ при $n \geq N$ (модель скользящего среднего), и рекурсивного фильтра с бесконечной импульсной характеристикой, определяемой вектором $\mathbf{a}_N$, на выходе которого и формируется требуемый случайный процесс U_k.

Изложенный процесс синтеза ЛДФФ, по сути, и представляет собой методику синтеза канального ЛДФФ для моделирования нормальных процессов с заданными корреляционно-спектральными характеристиками. Эта методика является обобщением методик синтеза подобных фильтров, изложенных в работах [4, 5, 7, 10], так как здесь получены выражения для непосредственного расчета коэффициентов общей модели авторегрессии-скользящего среднего, а в указанной литературе — частные случаи синтеза: авторегрессии или скользящего среднего.

Метод синтеза многоканального нелинейного дискретного формирующего фильтра с произвольной межканальной корреляционной матрицей

Выше синтезирован канальный ЛДФФ для моделирования нормального марковского процесса произвольного порядка. В данном подразделе решается задача синтеза M-канального матричного ЛДФФ, в каждом канале которого воспроизводится марковский процесс N-го порядка. Объединение матричного и канальных фильтров дает общую структуру многоканального (матричного) фильтра, на выходе которого воспроизводится векторный марковский N-связный процесс с заданной межэлементной (межканальной) корреляционной матрицей размером $M \times M$.

Для простоты будем считать, что статистические характеристики случайных нормированных процессов в каждом из каналов, содержащих ЛДФФ, одинаковы. Это означает, что исследуется социально-экономическая система с показателями, имеющими равную «статистическую инерционность». Если это не так, то в окончательных выражениях изменятся лишь выражения для взаимных корреляционных функций между процессами в каналах, которые в данной модели точно не воспроизводятся, а фактически определяются только одним параметром — коэффициентом межканальной корреляции. Поэтому подобное упрощение позволяет избежать излишней индексации, оставляя в силе все выражения, кроме выражений для взаимных корреляционных функций, которые в данной модели точно воспроизведены быть не могут.

Пусть нормированные корреляционные функции любого j-го канала, $j = 1, 2, \ldots, M$, помеченные верхним индексом $^{(B)}$ (временные корреляционные функции), равны $r_j^{(B)}(\tau) = r_j^{(B)}(n\Delta\tau) = r_{n,j}^{(B)} = r_n^{(B)}$, $n = 1, 2, \ldots$. Элементы межканальной нормированной корреляционной матрицы, помеченные верхним индексом $^{(П)}$ (взаимные корреляционные функции параметров системы), равны $r_{p,q}^{(П)}$ — коэффициенту корреляции между p-м и q-м каналами.

Пусть $r^{(B)}$ (в соответствии со сделанным выше замечанием здесь опущен индекс канала) имеет вид, соответствующий нормальному марковскому процессу N-го порядка (задача формирования такого процесса решена в предыдущем подразделе). Как следует из изложенного выше, каждый из M каналов должен содержать N-мерный ЛДФФ, характеристики которого определяются вектором коэффициентов $(\mathbf{a}_{j,N}, \mathbf{b}_{j,N})$, $j = 1, 2, \ldots M$. Поскольку $r^{(B)}(\tau)$ от индекса j (номера канала) не зависит, то $(\mathbf{a}_{j,N}, \mathbf{b}_{j,N}) = (\mathbf{a}_N, \mathbf{b}_N)$. Межканальные корреляционные связи описываются нормированной ковариационной матрицей $\left\{ r_{m,j}^{(П)} \right\}$, $m, j \in [1, M]$, на которую, кроме естественного требования положительной определенности, никаких других требований не налагается [15].

Рассмотрим последовательность независимых нормальных векторов с совместно независимыми компонентами $\xi_{i,M} = \{\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \ldots, \xi_{i,M}\}$, из которых сформируем последовательность независимых векторов $\eta_{i,M} = \{\eta_{i,1}, \eta_{i,2}, \ldots, \eta_{i,M}\}$ по выражениям [6]:

$$\eta_{i,j} = -\sum_{l=1}^{j-1} \frac{D_{l,j}^{(П)}}{D_{j-1}^{(П)}} \eta_{i,j} + \sqrt{\frac{D_j^{(П)}}{D_{j-1}^{(П)}}} \xi_{i,j}, \quad j = 2, 3, \ldots, M, \tag{19}$$

где $\eta_{i,1} = \xi_{i,1}$, для $\forall i$, $\left\| D_j^{(П)} \right\|$ — нормированная ковариационная матрица размера j, элементами которой являются коэффициенты корреляции $r_{m,p}^{(П)}$; $m, p = 1, 2, \ldots, M$; $D_{l,j}^{(П)}$ — алгебраические дополнения элементов $r_{l,j}^{(П)}$ в определителе матрицы $\left\| D_j^{(П)} \right\|$.

Тогда матрица $\left\| D_j^{(П)} \right\|$ будет корреляционной матрицей элементов вектора $\eta_{i,M} = \{\eta_{i,1}, \eta_{i,2}, \ldots, \eta_{i,M}\}$, а сами векторы $\eta_{i,M}$ и $\eta_{n,M}$ — независимы при $i \neq n$. Теперь сформируем векторы $\mathbf{U}_{k,\mathbf{M}} = \left(U_{k,1}, U_{k,2}, \ldots, U_{k,M}\right)$, каждый элемент которых определим как

$$U_{k,j} = \sum_{i=1}^{N} a_i U_{k-i,j} + \sum_{l=0}^{N-1} b_l \eta_{k-l,j}, \quad k = 1, 2, \ldots, M, \quad (20)$$

где коэффициенты a_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ и b_l, $l = 0, 1, \ldots, N-1$ определим в соответствии с заданными векторами ($\mathbf{a}_N$, $\mathbf{b}_N$). Покажем, что коэффициент корреляции между любыми двумя случайными величинами $U_{i,j}$ и $U_{n,m}$ ($j, m = 1, 2, \ldots, M$, $i, n = 1, 2, \ldots$) в установившемся режиме равен $r^{(П)}_{j,m} \cdot r^{(B)}_{|i-n|}$, среднее $\forall U_{i,j} = 0$, а его дисперсия равна единице.

Сначала отметим, что, поскольку векторы $\eta_{i,M}$ и $\eta_{n,M}$ независимы при $i \neq n$, то для $\forall k$ в выражении (20) для $U_{k,j}$ последовательность $\eta_{k,l}$, $l = 1, 2, \ldots, M$ представляет собой совокупность совместно независимых нормальных величин. Несложно показать, что эти величины имеют нулевое среднее и единичную дисперсию. Отсюда, в соответствии с результатами, полученными в предыдущем подразделе, следует, что последовательность $U_{k,j}$ при $\forall j$ имеет нулевые средние, единичные дисперсии и корреляционную функцию, равную $r^{(B)}_{|i-n|}$, т. е.

$$\begin{cases} M\left[U_{k,j}\right] = 0; \\ D\left[U_{k,j}\right] = 1; \\ M\left[U_{k,j} \cdot U_{n,j}\right] = r^{(B)}_{|i-n|}, \quad \forall j \in [1, M]. \end{cases} \quad (21)$$

Окрашенный шум j-го канала $g_{k,j}$ определяется теперь выражением

$$g_{k,j} = \sum_{l=0}^{N-1} b_l \eta_{k-l,j}, \quad j = 1, 2, \ldots, M. \quad (22)$$

Откуда, учитывая, что $M[g_{k,j}] = 0$ при $\forall k$ и $\forall j$, получаем

$$M\left[g_{k,p} g_{k,q}\right] = M\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i \eta_{k-i,p} \sum_{j=0}^{N-1} b_j \eta_{k-j,q}\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1} b_i^2 r^{(П)}_{p,q} = r^{(П)}_{p,q} \sum_{i=0}^{N-1} b_i^2 = r^{(П)}_{p,q} R_0, \quad (23)$$

поскольку при $i \neq j$ $M\left[\eta_{k-i,p} \eta_{k-j,q}\right] = 0$. Поэтому дисперсии $g_{k,p}$ равны R_0 при $\forall k$ и $\forall p$, а коэффициент корреляции между $g_{k,p}$ и $g_{k,q}$ равен $r^{(П)}_{p,q}$, т. е. тому же коэффициенту, что и для $\eta_{k,p}$ и $\eta_{k,q}$.

Отсюда следует, что $g_{k,q}$ при $q \geq p$ можно представить в виде

$$g_{k,q} = \sum_{l=0}^{N-1} b_l \eta_{k-l} = \sum_{l=0}^{N-1} b_l \left(r^{(П)}_{p,q} \eta_{k-l,p} + \sqrt{1 - r^{(П)2}_{p,q}} \xi_{|k-l|,q} \right) =$$
$$= r^{(П)}_{p,q} \sum_{l=0}^{N-1} b_l \eta_{k-l,p} + \sqrt{1 - r^{(П)2}_{p,q}} \sum_{l=0}^{N-1} b_l \xi_{|k-l|,q} =$$
$$= r^{(П)}_{p,q} g_{k,p} + \sqrt{1 - r^{(П)2}_{p,q}} \cdot g'_{k,q}, \quad (24)$$

где $g'_{k,q}$ ортогональна (независима) $g_{k,p}$, поскольку при формировании $g'_{k,q}$ использованы случайные величины $\xi_{k-1,g}$, не входящие в $g_{k,p}$. Это означает, что $g_{k,q}$ мы разложили на две ортогональные составляющие [16].

Выходной сигнал q-го канала представляет собой выходной сигнал линейной системы с оператором $L(.)$, а так как входной сигнал q-го канала является взвешенной суммой входных сигналов $g_{k,p}$ и $g'_{k,q}$, то и выходной можно представить в виде взвешенной суммы реакции ЛДФФ на $g_{k,p}$ и $g'_{k,q}$. В этом случае $U_{k,q}$ можно записать как

$$U_{k,q} = L\left(g_{k,q}\right) = L\left(r^{(П)}_{p,q} g_{k,p} + \sqrt{1 - r^{(П)2}_{p,q}} g'_{k,q} \right) =$$
$$= r^{(П)}_{p,q} L\left(g_{k,p}\right) + \sqrt{1 - r^{(П)2}_{p,q}} L\left(g'_{k,q}\right) =$$
$$= r^{(П)}_{p,q} U_{k,p} + \sqrt{1 - r^{(П)2}_{p,q}} U'_{k,q}, \quad (25)$$

где $U_{k,p}$ и $U'_{k,q}$ также ортогональны, при этом средние $U_{k,p}$ и $U'_{k,q}$ равны нулю, а их дисперсии равны единице в силу свойств оператора $L(.)$. Поэтому коэффициент корреляции между $U_{k,p}$ и $U_{l,q}$ равен

$$M\left[U_{k,q} U_{l,p}\right] = M =$$
$$= \left[\left(r^{(П)}_{p,q} U_{k,p} + \sqrt{1 - r^{(П)2}_{p,q}} U'_{k,q} \right) U_{l,p}\right] =$$
$$= r^{(П)}_{p,q} M\left[U_{k,p} U_{l,p}\right] + \sqrt{1 - r^{(П)2}_{p,q}} M\left[U'_{k,p} U_{l,p}\right] =$$
$$= r^{(П)}_{p,q} r^{(B)}_{|k-l|}. \quad (27)$$

В том случае, когда $l = k$, получаем $r^{(B)}_{|k-l|} = 1$, т.е. коэффициент корреляции между каналами равен заданному коэффициенту $r^{(П)}_{p,q}$.

Итак, на входы многоканального фильтра подается последовательность нормальных векторов $\xi_{i,M}$, $i = 1, 2, \ldots$, канальные ЛДФФ определяются $r^{(B)}_{|i-n|}$, т. е. вектором ($\mathbf{a}_N$, $\mathbf{b}_N$), при изменении вектора средних $\mathbf{U}_{i,M}$ и среднеквадратических отклонений $\sigma_{U,M}$ к векторному выходу многоканального ЛДФФ следует добавить элемент умножения вектора $\mathbf{U}_{i,M}$ на элементы вектора $\sigma_{U,M}$ и элементы суммирования полученных сигналов с вектором $\bar{\mathbf{U}}_{i,M}$. Тогда общий выходной сигнал будет определяться выражением

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,M} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{U_{i,M}} \mathbf{U}_{i,M} + \bar{\mathbf{U}}_{i,M}, \quad (28)$$

где $\tilde{\sigma}_{U_{i,M}}$ — диагональная матрица среднеквадратических отклонений $\sigma_{U,M}$, изменяющихся во времени (по индексу i). В этом случае многоканальный ЛДФФ может использоваться для моделирования и нестационарных случайных процессов, которые используются в качестве моделей изменения параметров социально-экономических систем.

Аналитические выражения для расчета коэффициентов формирующих фильтров первого, второго и четвертого порядков для моделирования случайных процессов и их производных

Приведем сводку расчетных формул для ДФФ, наиболее часто встречающихся на практике. Для фильтров второго порядка нижеприведенные корреляционные функции соответствуют дифференцируемым марковским процессам. Выбор корреляционной функции для фильтра четвертого порядка обусловлен тем фактом, что именно такой ее вид используется для аппроксимации корреляционных функций в некоторых практических моделях [9, 17].

1. Фильтр первого порядка.

Для корреляционной функции вида

$$r(nT) = \exp(-\mu Tn) \tag{29}$$

$$\begin{cases} a_1 = \exp(-\mu T); \\ r_0 = 1 - \exp(-2\mu T); \\ b_0 = \sqrt{r_0}. \end{cases} \tag{30}$$

2. Фильтр второго порядка.

Для корреляционной функции вида

$$r(nT) = \exp(-\mu Tn)\left(\cos(\gamma Tn) + \mu/\gamma \sin(\gamma Tn)\right) \tag{31}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2\exp(-\mu T)\cos(\gamma T); \\ a_2 = \exp(-2\mu T); \\ r_0 = 1 - 2\dfrac{\mu}{\gamma}\exp(-2\mu T)\sin(\gamma T) - \exp(-4\mu T); \\ r_1 = -\exp(-\mu T)\left(1 - \exp(-2\mu T)\right)\cdot\cos(\gamma T) + \\ \quad + \dfrac{\mu}{\gamma}\exp(-\mu T)\left(1 + \exp(-2\mu T)\right)\sin(\gamma T); \\ b_0 = 0{,}5\left(\sqrt{r_0 + 2r_1} + \sqrt{r_0 - 2r_1}\right); \\ b_1 = 0{,}5\left(\sqrt{r_0 + 2r_1} - \sqrt{r_0 - 2r_1}\right). \end{cases} \tag{32}$$

Для корреляционной функции вида

$$r(nT) = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\exp(-\mu_1 Tn) + \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}\exp(-\mu_2 Tn) \tag{33}$$

$$\begin{cases} a_1 = \exp(-\mu_1 T) + \exp(-\mu_2 T); \\ a_2 = \exp\left(-(\mu_1 + \mu_2)T\right); \\ r_0 = 1 - 2\dfrac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}\left(\exp(-2\mu_1 T) - \exp(-2\mu_2 T)\right) - \\ \quad - \exp\left(-2(\mu_1 + \mu_2)T\right); \\ r_1 = -\left(\exp(-\mu_1 T) + \exp(-\mu_2 T)\right) + \\ \quad \left(1 + \exp\left(-(\mu_1 + \mu_2)T\right)\right)\times \\ \times\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\exp(-\mu_1 T) + \dfrac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}\exp(-\mu_2 T)\right); \\ b_0 = 0{,}5\left(\sqrt{r_0 + 2r_1} + \sqrt{r_0 - 2r_1}\right); \\ b_1 = 0{,}5\left(\sqrt{r_0 + 2r_1} - \sqrt{r_0 - 2r_1}\right). \end{cases} \tag{34}$$

Для корреляционной функции вида

$$r(nT) = (1 + \mu Tn)\exp(-\mu Tn) \tag{35}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2\exp(-\mu T); \\ a_2 = -\exp(-2\mu T); \\ r_0 = 1 - 4\mu T\exp(-2\mu T) - \exp(-4\mu T); \\ r_1 = -(1 - \mu T)\exp(-\mu T) + (1 + \mu T)\exp(-3\mu T); \\ b_0 = 0{,}5\left(\sqrt{r_0 + 2r_1} + \sqrt{r_0 - 2r_1}\right); \\ b_1 = 0{,}5\left(\sqrt{r_0 + 2r_1} - \sqrt{r_0 - 2r_1}\right). \end{cases} \tag{36}$$

3. Фильтр четвертого порядка.

Для этого фильтра коэффициенты ДФФ приведены для корреляционной функции вида

$$\begin{aligned} r(nT) = {} & C_1\exp(-\alpha_1 Tn)\cos(\gamma Tn) + \\ & + C_2\exp(-\alpha_2 Tn) + C_3\exp(-\alpha_3 Tn). \end{aligned} \tag{37}$$

(где $C_1 + C_2 + C_3 = 1$):

$$\begin{cases} a_1 = 2\exp(-\alpha_1 T)\cos(\gamma T) + \exp(-\alpha_2 T) + \\ \quad + \exp(-\alpha_3 T); \\ a_2 = -\exp(-2\alpha_1 T) - \exp\left(-(\alpha_2 + \alpha_3)T\right) - \\ \quad - 2\exp(-\alpha_1 T)\times \\ \quad \times\left(\exp(-\alpha_2 T) + \exp(-\alpha_3 T)\right)\cos(\gamma T); \\ a_3 = \exp(-2\alpha_1 T)\left(\exp(-\alpha_2 T) + \exp(-\alpha_3 T)\right) + \\ \quad + 2\exp\left(-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)T\right)\cos(\gamma T); \\ a_4 = \exp\left(-(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)T\right); \\ b_0^4 - \dfrac{\sqrt{r_+} - \sqrt{r_-}}{2}b_0^3 + r_2 b_0^2 - \dfrac{2}{\sqrt{r_+} - \sqrt{r_-}}(r_1 + r_3)r_3 b_0 + r_3^2 = 0; \\ b_1 = 0{,}5\left(\sqrt{r_+} - \sqrt{r_-}\right) - \dfrac{r_3}{b_0}; \\ b_2 = 0{,}5\left(\sqrt{r_+} + \sqrt{r_-}\right) - b_0; \\ b_3 = \dfrac{r_3}{b_0}, \end{cases} \tag{38}$$

где $r_- = r_0 + 2r_1 + 2r_2 + 2r_3$, $r_+ = r_0 - 2r_1 + 2r_2 - 2r_3$, а в качестве b_0 следует принять максимальное положительное решение уравнения относительно b_0 [7, 17].

Фильтр первого порядка формирует недифференцируемый процесс. Корреляционные функции фильтров второго порядка записаны в таком виде, что на их выходах формируются однократно дифференцируемые процессы. Для фильтра четвертого порядка можно построить как однократно, так и двукратно дифференцируемые процессы. Корреляционные функции дифференцируемых процессов соответственно получаются двукратным дифференцированием исходных корреляционных функций и изменением их знака [16].

Выводы

Моделирование показателей социально-экономических систем может быть представлено как моделирование векторного случайного процесса или случайного поля (в общем случае негауссовских), при этом необходимо учитывать не только корреляционные функции каждого отдельного показателя, но и взаимную корреляцию между показателями. Более простые алгоритмы моделирования получаются при представлении показателей в виде случайного вектора и использовании алгоритмов моделирования векторного случайного процесса.

Наиболее приемлемым методом, позволяющим моделировать случайные процессы в реальном времени и без методической ошибки, является метод нелинейного функционального преобразования нормального случайного процесса, прошедшего через линейный дискретный формирующий фильтр, так как алгоритмы моделирования, вытекающие из него, позволяют распараллеливать вычисления при реализации их на многопроцессорных ЭВМ. При моделировании нормальных процессов функциональный преобразователь отсутствует.

При моделировании реальных процессов, описывающих изменения показателей социально-экономических систем, достаточно ограничиться случайными процессами с корреляционными зависимостями типа (2); при этом нестационарность моделируемых процессов может быть учтена путем изменения математического ожидания и дисперсии процесса. Порождающий случайный процесс является стационарным, что и позволяет использовать для его моделирования метод нелинейного функционального преобразования.

Основным недостатком метода нелинейного функционального преобразования является большой объем подготовительной работы, связанной с расчетом параметров линейного формирующего фильтра. При этом требуется принимать решения по мере выполнения численных расчетов для отдельных частных задач, что делает практически невозможным автоматизацию процесса синтеза алгоритма моделирования.

Представленный в работе модифицированный метод расчета коэффициентов линейного формирующего фильтра позволяет рассчитывать коэффициенты для общего случая процесса авторегрессии-скользящего среднего, что минимизирует число коэффициентов разностного уравнения, реализующего формирующий фильтр, и, следовательно, повышает быстродействие алгоритма моделирования. Полученные замкнутые выражения для коэффициентов фильтров позволяют автоматизировать и процесс его синтеза.

Для моделирования негауссовского векторного процесса целесообразно использовать линейный многоканальный формирующий фильтр, в каждом из каналов которого содержится нелинейный функциональный преобразователь; при этом каждый компонент вектора моделируется своим каналом. Наиболее эффективен подобный алгоритм в том случае, когда допускается факторизация межканальной и временной (канальной) корреляционных функций.

Литература

1. **Айвазян С. А., Мхитарян И. С.** Прикладная статистика и основы эконометрики.— М.: ЮНИТИ, 1998.— 1022 с.
2. **Колемаев В. А.** Математическая экономика. Учебник для вузов.— М.: ЮНИТИ,1998. — 240 с.
3. **Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.** Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное издание.— М.: Финансы и статистика, 1983. — 471 с.
4. **Шалыгин А. С., Палагин Ю. И.** Прикладные методы статистического моделирования.— Л.: Машиностроение, 1986. — 320 с.
5. **Шелухин О. И., Беляков И. В.** Негауссовские процессы.— СПб.: Политехника, 1992. — 312 с.
6. **Изранцев В. В., Шепета Д. А.** Моделирование негауссовых числовых последовательностей и полей с заданными корреляционно-спектральными характеристиками // Информационно-управляющие системы и сети. Структуры, моделирование, алгоритмы: Сб. статей/ Под общ. ред. М. Б. Сергеева. — СПб.: Политехника, 1999. — С. 152–156.
7. **Борисов Ю. П.** Математическое моделирование радиосистем. — М.: Сов. радио, 1976. — 296.
8. **Ермаков С. М., Михайлов Г. А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982. — 296 с.
9. **Бесекерский В. А.** Цифровые автоматические системы. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
10. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.— 584 с.
11. **Воеводин В. В.** Математические модели и методы в параллельных процессах. — М.: Наука, 1986.— 296 с.
12. **Кастер Х.** Основы Windows NT и NTFS /Пер. с англ.— М.: Издательский отдел «Русская редакция» ТОО «Channel Trading Ltd.», 1996.— 440 с.
13. **Тихонов В. И.** Нелинейные преобразования случайных процессов.— М.: Радио и связь, 1986.— 296 с.
14. **Мишина А. П., Проскуряков И. В.** Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра) / Под ред. П. К. Рашевского.— М.: Наука, 1965.— 300 с.
15. **Крамер Г.** Математические методы статистики / Пер. с англ; Под ред. А. Н. Колмогорова.— М.: Мир, 1975.— 648 с.
16. **Свешников А. Г.** Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968. — 464 с.
17. **Оводенко А. А., Култышев Е. И., Шепета А. П.** Бортовая радиоэлектронная аппаратура.— М.: Изд-во МПИ, 1989.— 335 с.