УДК 621.3

БЫСТРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАХ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППОЙ ОРТОВ

К. Ю. Гагарин,
канд. техн. наук, докторант
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Представлены способы построения алгоритмов быстрого преобразования Фурье в гиперкомплексных алгебрах с мультипликативной группой мнимых ортов, являющихся расширениями поля рациональных чисел.

In this paper we present a methods of fast Fourier transform algorithmic design in hypercomplex algebras with multiplicative groups of imaginary orts. These orts are an extension of rational quantities field.

Введение

В работе [1] был предложен способ построения гиперкомплексных систем на основе циклической мультипликативной группы, которую образуют мнимые орты. Таблица умножений мнимых ортов в таких системах задается правилами умножения элементов циклической мультипликативной группы.

Построенные таким образом гиперкомплексные системы следует рассматривать как обобщения поля комплексных чисел, где мнимая единица является образующим элементом мультипликативной циклической группы порядка четыре.

В работах [2, 3] были рассмотрены быстрые преобразования Фурье (БПФ) в гиперкомплексных системах с мультипликативной группой ортов, являющихся расширениями поля рациональных чисел. Там же была отмечена взаимосвязь гиперкомплексных БПФ с полиномиальными преобразованиями Нуссбаумера.

В настоящей публикации представлены результаты дальнейших исследований по синтезу быстрых гиперкомплексных преобразований Фурье.

Гиперкомплексные системы в расширениях поля рациональных чисел

В работе [4] показано, что всякая гиперкомплексная система задается таблицей умножения мнимых ортов. При этом заданные правила умножения ортов друг на друга определяют многие характерные свойства той или иной системы. Наиболее известной и часто используемой является четырехортовая алгебра кватернионов Гамильтона, таблица умножений для которой задана в виде

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Из таблицы следует некоммутативность операций умножения мнимых ортов: $ij \neq ji$, $ik \neq ki$, $kj \neq jk$.

Характерной особенностью данной алгебры является то, что для всякого кватерниона

$$a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

его норма, определяемая в виде

$$|a| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

есть евклидова норма. Через данные нормы алгебра кватернионов Гамильтона обобщается с алгеброй поля комплексных чисел.

Для гиперкомплексных систем с четырьмя мнимыми ортами, образующими мультипликативную циклическую группу

$$G_8 = \{1, j, i, k, -1, -j, -i, -k\},$$

где $j = \sqrt[4]{-1}$, таблица умножения ортов может быть представлена в виде

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	k	i	-1
k	$-j$	-1	$-i$

Следует заметить, что количество различных гиперкомплексных систем, построенных на основе той или иной циклической мультипликативной группы ортов, не ограничено, и каждая такая система может рассматриваться либо как расширение поля рациональных чисел, либо как расширение поля вещественных чисел. В первом случае построенная таким образом гиперкомплексная система образует в расширении поля рациональных чисел также поле, поскольку в полиномиальном представлении данное расширение образовано по модулю неприводимого в поле рациональных чисел многочлена $f(k)= x^n+1$. Основанием для создания таких гиперкомплексных систем служит возможность получения для них БПФ, подобных полю комплексных чисел, где, как известно, матрица дискретного преобразования Фурье (ДПФ) представлена через степени корней α_N^k многочлена $x^N - 1$, образующих циклическую мультипликативную группу порядка N:

$$G_N = \left\{1, \alpha_N, \alpha_N^2, \ldots, \alpha_N^{N-1}\right\}.$$

Аналогичным образом строятся матрицы ДПФ в полях Галуа, в том числе в простых полях Галуа.

Быстрые гиперкомплексные преобразования Фурье по основанию два (БГПФ)

Рассмотрим математические модели БГПФ по основанию два в ν-ортовых гиперкомплексных системах, являющихся расширениями поля рациональных чисел, где задана циклическая мультипликативная группа

$$G_{2\nu} = \{1, i_1, i_2, \ldots, i_{\nu-1}, -1, -i_1, \ldots, -i_{\nu-1}\}.$$

Тогда матрицу ГПФ можно записать в виде

$$F_N = \left\|\alpha_N^{lm}\right\| = \left\|i_1^{lm}\right\|, \tag{3}$$

где $N = 2\nu = 2^n$, $\alpha_N = i_1$, $l, m = \overline{0, N-1}$.

Для $\nu = 4$ в соответствии с таблицей умножения ортов имеем матрицу F_8:

$$F_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & i & k & -1 & -j & -i & -k \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & k & -i & j & -1 & -k & i & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & i & -k & -1 & j & -i & k \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -k & -i & -j & -1 & k & i & j \end{pmatrix},$$

где $i_1 \overset{\Delta}{=} j$, $i_2 \overset{\Delta}{=} i$, $i_3 \overset{\Delta}{=} k$.

Матрицу обратного ДПФ можно определить по аналогии с матрицей комплексного ДПФ, т. е. в виде транспонированной гиперкомплексно-сопряженной матрицы

$$\left(F_8^*\right)' = F_8^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -k & -i & -j & -1 & k & i & j \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -j & i & -k & -1 & j & -i & k \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & k & -i & -j & -1 & -k & i & -j \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & j & i & k & -1 & -j & -i & -k \end{pmatrix}.$$

В более общем случае матрицу обратного ГПФ можно записать в виде

$$F_N^{-1} = J_N F_N = \left\|\alpha_N^{-lm}\right\| = \left\|i_1^{-lm}\right\|,$$

где $J_N = 1 \oplus \overline{I}_{N-1}$, $\oplus$ – оператор кронекеровской (прямой) суммы; I_N – матрица инверсной перестановки.

Выполнив в матрице F_8 четно-нечетные перестановки строк, можно получить матрично-блочную рекурсивную форму

$$F_8 = J_8' \left(\begin{array}{c|c} F_4 & F_4 \\ \hline F_4 D_4 & -F_4 D_4 \end{array}\right),$$

где F_4 – матрица комплексного ДПФ $F_4 = \left\|i^{lm}\right\|$; $l, m = \overline{0, 3}$; $i = \sqrt{-1}$; $D_4 = \mathrm{diag}\{1, j, i, k\}$; J_8 – матрица четно-нечетной перестановки.

В общем виде матрично-блочную рекурсивную форму для матрицы F_N можно записать

$$F_N = J_N \left(\begin{array}{c|c} F_{N/2} & F_{N/2} \\ \hline F_{N/2} D_{N/2} & -F_{N/2} D_{N/2} \end{array}\right), \tag{4}$$

где $D_{N/2} = \mathrm{diag}\left\{1, i_1, i_2, \ldots, i_{N/2-1}\right\}$.

На основе матрично-блочной рекурсивной формы (4) для матриц F_N и F_N^{-1} можно построить факторизованные формы, соответствующие быстрым алгоритмам. Например, для $N = 2^n$, матрицу F_N можно представить в факторизованной форме

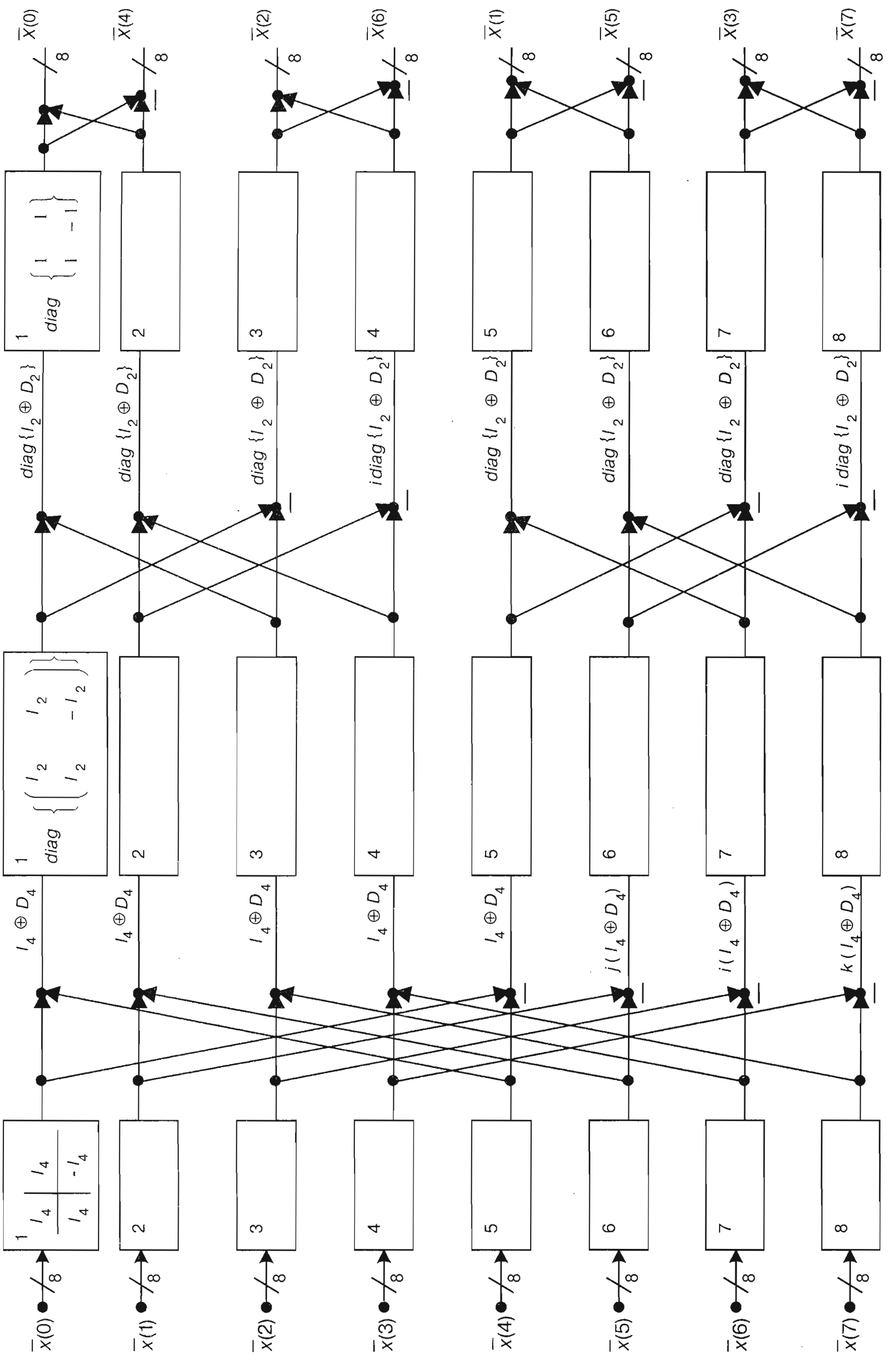
$$F_N = \tilde{J}_N \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\} \times$$
$$\times\, \mathrm{diag}\left\{\left(\begin{array}{c|c} I_2 & I_2 \\ \hline D_2 & -D_2 \end{array}\right)\right\} \times \ldots \times \left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & I_{N/2} \\ \hline D_{N/2} & -D_{N/2} \end{array}\right), \tag{5}$$

где $D_{N/2} = \mathrm{diag}\left\{1, i, i_2, \ldots, i_{N/2-1}\right\}$; $D_2 = \mathrm{diag}\{1, i\}$, $\tilde{J}_N$ – матрица двоично-инверсной перестановки.

Факторизованная форма F_N (5) соответствует БПФ по основанию два с прореживанием по частоте. Посредством ее транспонирования легко получается БПФ с прореживанием по времени

$$F_N = F_N' = \left(\begin{array}{c|c} I_{N/2} & D_{N/2} \\ \hline I_{N/2} & -D_{N/2} \end{array}\right) \times \ldots \times$$
$$\times\, \mathrm{diag}\left\{\left(\begin{array}{c|c} I_2 & D_2 \\ \hline I_2 & -D_2 \end{array}\right)\right\} \mathrm{diag}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\} \tilde{J}_N', \tag{6}$$

где $\tilde{J}_N' = \tilde{J}_N$.



$D_4 = \mathrm{diag}\ \{1, j, i, k\}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

■ *Векторный граф двумерного псевдогнездового алгоритма ГПФ*

Заметим, что в матрично-факторизованных формах (4) и (5) блочная матрица $\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline D_n & -D_n \end{array}\right)$ и ее транспонированная форма $\left(\begin{array}{c|c} I_n & D_n \\ \hline I_n & -D_n \end{array}\right)$ при реализации БПФ должны быть представлены соответственно сомножителями $\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & D_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline I_n & -I_n \end{array}\right)$ и $\left(\begin{array}{c|c} I_n & I_n \\ \hline I_n & -I_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & D_n \end{array}\right)$.

Характерной особенностью алгоритмов гиперкомплексных БПФ (ГБПФ) является отсутствие в диагональных матрицах D_N нетривиальных весовых множителей, но при этом получаемые коэффициенты преобразования имеют гиперкомплексную (полиномиальную) форму. Учитывая то, что каждая мнимая единица представлена как $i_k = \alpha_N^k$, где α_N – корень многочлена $x^{N/2}+1$, можно легко выполнить переход от коэффициентов ГБПФ к коэффициентам комплексного БПФ (КБПФ). Данную взаимосвязь коэффициентов ГБПФ и КБПФ можно использовать для конвейеризации вычислений КБПФ в задачах спектрального анализа, фильтрации и сжатия цифровых сигналов. Для этого необходимо в одной фазе конвейера реализовать арифметические операции сложения-вычитания, соответствующие алгоритму ГБПФ, а во второй фазе реализовать арифметические операции (преимущественно умножения), связанные с переходом от коэффициентов ГБПФ к коэффициентам БПФ. Учитывая, что операций сложений-вычитаний много больше, чем умножений, каждую из фаз конвейера можно реализовать на элементной базе, быстродействие которой наиболее соответствует типу и количеству выполняемых арифметических операций.

В случае обработки вещественных или комплексных последовательностей отсчетов сигнала полученные коэффициенты гиперкомплексных БПФ будут сопряженно взаимосвязаны. Такие взаимосвязи хорошо известны для коэффициентов ДПФ в расширениях полей Галуа, где они определяются через корни минимальных многочленов.

Для рассматриваемых расширений поля рациональных чисел сопряженность гиперкомплексных коэффициентов определяется неприводимыми многочленами, являющимися делителями многочлена x^N-1, где N – длина преобразования. При этом по своей симметрии коэффициенты объединяются по мультипликативным подгруппам ортов. Например, для $N=2^n$ симметричными являются: $x(0)$, $x(N/2)$ – вещественные; $x(k)$ – для четных k – симметрия по мнимым единицам, образующим всевозможные подгруппы в группе $G_H = \{j_1, j_1^2, j_1^3, \ldots, j_1^{N-1}\}$; $x(k)$ – для нечетных k – симметрия по всем ортам $\{j_1, j_2, \ldots, j_{N/2-1}\}$.

Заметим, что здесь под симметрией понимается наличие одинаковой вещественной части и одинаковых коэффициентов при мнимых единицах.

Примерно такими же соотношениями может быть представлена сопряженность коэффициентов двумерного гиперкомплексного преобразования для двумерных вещественных входных данных. Отличие состоит в том, что соотношения сопряженности записываются различным образом для четных и нечетных строк и столбцов, а также для диагоналей матрицы коэффициентов.

Быстрые гиперкомплексные преобразования Фурье с длиной, факторизованной взаимно простыми числами

Поскольку длина ГПФ N связана с количеством мнимых ортов через порядок мультипликативной группы, которая задана ее образующим элементом α_N, то первоначально необходимо рассмотреть такие гиперкомплексные системы, в которых количество мнимых единиц (с учетом знака) есть число либо простое, либо разложимое на взаимно-простые числа. Согласно результатом работы [5], всякую гиперкомплексную алгебру $A^{(v)}$ можно задать в виде расширения поля рациональных чисел через круговой многочлен $C_N(x)\,|\,x^N-1$.

Пусть $N=5$ и $C_5(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$. Тогда можно построить четырехортовую алгебру $A^{(4)}$ с таблицей умножения ортов

	i_1	i_2	i_3
i_1	i_2	i_3	$-i_3-i_2-i_1-1$
i_2	i_3	$-i_3-i_2-i_1-1$	1
i_3	$-i_3-i_2-i_1-1$	1	i_1

Матрица гиперкомплексного ДПФ имеет вид

$$F_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \\ 1 & i_2 & i_4 & i_1 & i_3 \\ 1 & i_3 & i_1 & i_4 & i_2 \\ 1 & i_4 & i_3 & i_2 & i_1 \end{pmatrix},$$

где $i_4 = -i_3 - i_2 - i_1 - 1$.

После перестановки строк и столбцов на основе соответствия $j \to \langle 2^j \rangle_5$, $j=\overline{1,4}$ получим форму представления матрицы F_5 через циркулянт

$$\hat{F}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i_4 & i_3 & i_1 & i_2 \\ 1 & i_3 & i_1 & i_2 & i_4 \\ 1 & i_1 & i_2 & i_4 & i_3 \\ 1 & i_2 & i_4 & i_3 & i_1 \end{pmatrix}.$$

На основе матрицы $\hat{F}_5$ может быть построен алгоритм БПФ через быструю четырехточечную свертку. Поскольку элементами матрицы $\hat{F}_5$ являются мнимые орты и единицы, то в алгоритмах таких БПФ отсутствует умножение на нетривиальные множители.

Рассмотрим теперь случай факторизации величины N взаимно-простыми множителями. Например, пусть $N = 2\cdot 3 = 6$. Выбирая $C_6(x) = x^2 - x + 1$, имеем матрицу ГПФ

$$F_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & i-1 & -1 & -i & 1-i \\ 1 & i-1 & -i & 1 & i-1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & i-1 & 1 & -i & i-1 \\ 1 & 1-i & -i & -1 & i-1 & i \end{pmatrix}.$$

С целью получения БПФ с факторизацией $N = N_1N_2$, $(N_1, N_2) = 1$, для $N_1 \neq N_2$, к матрице F_N могут быть применены перестановки строк и столбцов на основе китайской теоремы об остатках, которые в нашем примере могут быть выражены следующими соответствиями, если принять $N_1 = 2$, $N_2 = 3$:

$0 \to (0,0)$, $1 \to (1,1)$, $2 \to (0,2)$, $3 \to (1,0)$, $4 \to (0,1)$, $5 \to (1,2)$.

После перестановок получим матрицу

$$\hat{F}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & i-1 & 1 & -i & i-1 \\ 1 & i-1 & -i & 1 & i-1 & -i \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -i & i-1 & 1 & i & 1-i \\ 1 & i-1 & -i & 1 & 1-i & i \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} F_3 & 0 \\ \hline 0 & F_3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_3 & I_3 \\ \hline I_3 & -I_3 \end{array}\right),$$

где $$F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & i-1 \\ 1 & i-1 & -i \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Из формы (7) получим алгоритм ГБПФ длины $N = 6$, который можно записать в матрично-блочном виде

$$\hat{F}_6 = \begin{pmatrix} I_3 & I_3 \\ I_3 & -I_3 \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} D_3 & 0 \\ \hline 0 & D_3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} (11)\oplus I_2 & 0 \\ \hline 0 & (11)\oplus I_2 \end{array}\right)\times$$
$$\times\left(\begin{array}{c|c} 1\oplus\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right), \qquad (8)$$

где $D_3 = \mathrm{diag}\,\{1, 1/2, 1/2-i\}$.

Факторизованная форма (8) представляет гнездовой алгоритм БПФ в поле комплексных рациональных чисел, когда мнимая единица определяется из многочлена $f(x) = x^2 - x + 1$.

В общем случае величина N может быть факторизована более чем двумя взаимно-простыми множителями. Для построения алгоритмов ГБПФ типа (8) необходимо воспользоваться известным выражением [5] для определения круговых многочленов

$$C^{(z)}_{mp^k} = C_{mp}(z^{p^{k-1}}), \qquad (9)$$

где $C_{mp}(z) = \dfrac{C_m(z^p)}{C_m(z)}$.

Таким образом, учитывая, что

$$C_p(z) = z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + 1,$$

где p – простое число, с помощью выражения (9) легко определяются круговые многочлены для любых практически используемых значений величины N.

Быстрые алгоритмы многомерных ГПФ и сверток

По аналогии с комплексными БПФ для двумерных данных можно использовать построчно-столбцовый алгоритм

$$[X_N] = F_N\,[x_N]\,F_N,$$

где $[X_N]$ и $[x_N]$ – матрицы соответственно коэффициентов преобразования и отсчетов исходного двумерного сигнала.

Для многомерных данных наиболее часто используются быстрые алгоритмы на основе кронекеровской факторизации, в форме которой может представлена матрица одномерного эквивалентного преобразования

$$F_{n^r} = F_n^{[r]}, \qquad (10)$$

где $[r]$ – обозначение кронекеровской степени.

Подставляя в выражение (10) одну из факторизованных форм матрицы F_n, можно получить быстрый алгоритм многомерного ГПФ, в том числе псевдогнездовой алгоритм ГПФ, который имеет по сравнению с другими алгоритмами меньшее количество умножений на мнимые единицы. Заметим, что сокращение количества используемых мнимых единиц позволит упростить управление в вычислительном процессе.

В общем виде матрицу эквивалентно-одномерного ГПФ по основанию два и с прореживанием по частоте можно записать в виде

$$F_{n^r} = \tilde{J}_n^{[r]} \prod_{j=0}^{t-1} \left(\hat{D}_n^{(j)}\right)^{[r]} \left(\hat{I}_n^{(j)}\right)^{[r]}, \qquad (11)$$

где $\hat{D}_n^{(j)} = I_{2^{t-j-1}} \otimes \left(I_{2^j} \oplus D_{2^j}\right)$; $\hat{I}_n^{(j)} = I_{2^{t-j-1}} \otimes \left(\begin{array}{c|c} I_{2^j} & I_{2^j} \\ \hline I_{2^j} & -I_{2^j} \end{array}\right)$; $t = \log_2 n$ – количество итераций в быстром алгоритме.

Например, для $n = 8$, $t = 3$ и $r = 2$ факторизованная форма принимает следующий вид:

$$F_{64} = \tilde{J}_8^{[2]} \prod_{j=0}^{2} \left(\hat{D}_8^{(j)}\right)^{[2]} \left(\hat{I}_8^{(j)}\right)^{[2]},$$

где $\hat{D}_8^{(j)} = I_{2^{3-j-1}} \otimes (I_{2^j} \oplus D_{2^j})$; $\hat{I}_8^{(j)} = I_{2^{3-j-1}} \otimes \left(\begin{array}{c|c} I_{2^j} & I_{2^j} \\ \hline I_{2^j} & -I_{2^j} \end{array}\right)$.

Из графа, представленного на рисунке, следует, что для двумерного 8×8 ГПФ требуется 328 сложений-вычитаний и 46 умножений на мнимые единицы.

Рассмотрим, каким образом можно использовать алгоритмы БГПФ для вычисления двумерных сверток и корреляций.

Пусть заданы две матрицы цифровых отсчетов исходных сигналов $[x_N]$ и $[h_N]$, свертки которых требуется вычислить. Обычный алгоритм вычисления циклической двумерной свертки можно задать через последовательностную модель

$$y(k,\ n) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} x(m,\ l) \cdot h\,(k-m,\ n-l).$$

Для получения быстрого алгоритма воспользуемся векторно-матричной формой представления сверток. Существует выражение для одномерных циклических сверток в виде

$$Y_N = S_N \cdot \bar{x}'_N, \qquad (12)$$

где S_N – циклическая матрица (циркулянт), заданная последовательностью $\{h_i\}$; $\bar{x}_N$ – вектор, соответствующий инвертированной во времени последовательности $\{x_0, x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_1\}$; Y_N – вектор, соответствующий последовательности значений свертки $\{y_n\}$. Для любой матрицы-циркулянта существует выражение, связывающее его с ДПФ:

$$S_N = F_N^{-1} D_N F_N, \qquad (13)$$

где $D_N = \mathrm{diag}\{d_0, d_1, \dots, d_{N-1}\}$; $d_N = d_0, d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$, $d'_N = F_N \bar{h}'_N$, $\bar{h}_N$ – образующая строка матрицы S_N.

Выражения (12) и (13) можно использовать для вычисления двумерных циклических сверток, если каждую из исходных последовательностей представить эквивалентно-одномерной последовательностью, т. е. матрицам $[x_N]$ и $[h_N]$ сопоставить соответственно векторы

$$X_{N^2} = X_0, X_1, \dots, X_{N-1}; \quad H_{N^2} = H_0, H_1, \dots, H_{N-1},$$

где X_i – i-я строка матрицы $[x_N]$; H_i – i-я строка матрицы $[h_N]$.

Тогда выражения (12) и (13) можно записать в следующем виде

$$Y'_{N^2} = \hat{S}_{N^2} \bar{X}'_{N^2}; \qquad (14)$$

$$\hat{S}_{N^2} = \left(F_N^{-1} \otimes F_N^{-1}\right) \cdot \hat{D}_N \left(F_N \otimes F_N\right),$$

где $\hat{D}_{N^2} = \mathrm{diag}\left\{\hat{d}_0, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_{N^2-1}\right\}$; $\hat{d} = \hat{d}_0, \hat{d}_1, \dots, \hat{d}_{N^2-1}$, $\hat{d}' = \left(F_N \otimes F_N\right) H'_{N^2}$; $\bar{Y}_{N^2} = Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}$ – блоковый вектор, соответствующий отчетам двумерной свертки; $\hat{S}_{N^2}$ – блоковый циркулянт с образующим вектором-строкой h_{N^2};

$\bar{X}'_{N^2} = \left(X_0, X_{N-1}, X_{N-2}, \dots, X_1\right)'$; $\bar{X}_i = x_0 x_{N-1}, \dots, x_1$ – i-я инвертированная вектор-строка матрицы $[X_N]$.

Заметим, что S_N в выражении (12) и $\hat{S}_{N^2}$ в выражении (13) – левые циркулянты. Векторно-матричные формы (12) и (13) можно использовать для вычисления периодических корреляций, если добавить оператор $E(\cdot)$ осреднения. С учетом того, что циркулянты должны быть правыми, векторы $\bar{X}'_N$ и $\bar{X}'_{N^2}$ заменяются на X'_N и X'_{N^2}, соответствующие неинвертированным последовательностям $\{x_i\}$ и $\{X_i\}$, и матрица $\hat{D}_{N^2}$ заменяется на сопряженную матрицу $\bar{D}_{N^2}$.

Выводы

1. Предложенный способ построения гиперкомплексных алгебр с мультипликативной группой мнимых ортов позволил их обобщить с полем комплексных чисел через дискретное преобразование Фурье.

2. В алгебрах, являющихся расширением поля рациональных чисел, для преобразования Фурье существуют быстрые алгоритмы, аналогичные быстрым алгоритмам преобразования Фурье в поле комплексных чисел.

3. Быстрые преобразования Фурье в гиперкомплексных алгебрах с точки зрения реализации обладают рядом особенностей, которые могут быть использованы, например, для конвейеризации вычислений.

В заключение следует отметить, что опубликованные в данной работе результаты были получены при финансовой поддержке Минобразования РФ НИР-грант Т02-03.2-2731.

Литература

1. **Гагарин Ю. И.** Системы гиперкомплексных чисел с мультипликативной группой ортов // Труды СПбГТУ, серия ВТАРЭ. – № 464. – 1996. – С. 52–54.
2. **Гагарин Ю. И., Гагарин К. Ю.** Гиперкомплексные быстрые преобразования Фурье в расширениях поля рациональных чисел // Труды СПбГТУ, серия ВТАРЭ. – № 472. – 1998. – С. 77–80.
3. **Гагарин К. Ю.** Быстрые гиперкомплексные преобразования Фурье в расширениях поля рациональных чисел с длиной преобразования, факторизованной взаимно-простыми множителями // Труды СПбГТУ, серия ВТАРЭ. – № 480. – 2000. – С. 89–92.
4. **Кантор И. Л., Солодовников А. С.** Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.
5. **Применение** теории чисел в цифровой обработке сигналов / Под ред. Дж. Н. Макклеллан, Ч. Н. Рейдер. – М.: Радио и связь, 1984. – 264 с.