УДК 519.95

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ЗАДАЧ

С. Д. Субочев,
канд. техн. наук
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Разработан численный метод интегрирования функций в многомерных сферических координатах, удобный для практических приложений. Приводятся решения двух наглядных примеров предлагаемыми методами и известными, чтобы подтвердить достоверность результатов и показать, как пользоваться методом. Описывается применение метода численного интегрирования для вычисления вероятностей и моментов на многомерных распределениях. Показываются возможные применения многомерных сферических координат для экстремальных задач на поверхностях и некоторых других задач.

The numerical method of integration of functions in multidimensional spherical coordinates, which is convenient for the practical applications, has been worked out. Application of method of numerical integration for calculation of probabilities and moments on multi-dimensional distributions is described. The possible use of multidimensional spherical coordinates for extreme tasks on surfaces and some other tasks are shown.

Многомерные сферические координаты

Общеизвестно соотношение между трехмерными декартовыми прямоугольными координатами x_0, x_1, x_2 и сферическими координатами r, α_0, α_1:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = rl_0,\ x_1 = rl_1,\ x_2 = rl_2 \\ l_0 = \cos\alpha_1\cos\alpha_0,\ l_1 = \cos\alpha_1\sin\alpha_0,\ l_2 = \sin\alpha_0 \end{array}\right\}, \quad (1)$$

где r – длина радиус-вектора, l_0, l_1 и l_2 – его направляющие косинусы; α_0 и α_1 – углы долготы и широты, соответственно.

Обобщая по индукции проектирование в соответствующие подпространства и на координатные оси (этот процесс здесь не приводится в силу сложности его описания и физического представления), приведем окончательные связи между углами и декартовыми координатами для n-мерных пространств:

$$x_i = rl_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad (2)$$

где l_i – направляющие косинусы.

Направляющие косинусы равны соответственно

$$\left.\begin{array}{l} l_0 = \cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\ldots\cos\alpha_2\cos\alpha_1\cos\alpha_0 \\ l_1 = \cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\ldots\cos\alpha_2\cos\alpha_1\sin\alpha_0 \\ l_2 = \cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\ldots\cos\alpha_2\sin\alpha_1 \\ l_3 = \cos\alpha_{n-2}\cos\alpha_{n-3}\ldots\sin\alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{n-2} = \cos\alpha_{n-2}\sin\alpha_{n-3} \\ l_{n-1} = \sin\alpha_{n-2} \end{array}\right\}, \quad (3)$$

где некоторые углы α_j – обобщенные физические аналоги углов долготы и широты.

Записывая единичный вектор направления и соответствующий ему радиус-вектор как

$$\mathbf{e} = [l_0, l_1, l_2, \ldots, l_{n-1}]^T;\ \mathbf{R} = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]^T = r\mathbf{e}, \quad (4)$$

несложно показать, что нормы векторов равны

$$\begin{array}{l} \|e\| = \sqrt{l_0^2 + l_1^2 + \ldots + l_{n-1}^2} = 1; \\ \|R\| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2} = r, \end{array} \quad (5)$$

т. е. концы векторов **e** и **R** лежат на сферах радиусов l и r, соответственно. Следовательно, параметр $r \geq 0$ является текущей длиной радиуса-вектора **R**, а параметры r, α_0, α_1, ..., α_{n-2} в целом являются n-мерными сферическими координатами. Любая линейная координата x_i может принимать два значения (положительное либо отрицательное). Несложно убедиться, что при изменении углов в пределах

$$0 \leq \alpha_0 \leq +2\pi,\ -\pi/2 \leq \alpha_1 \leq +\pi/2,\ \ldots,\ -\pi/2 \leq \alpha_{n-2} \leq +\pi/2, \quad (6)$$

координаты x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, рассчитанные по формулам (3), принимают 2^n всех возможных сочетаний положительных и отрицательных значений, при этом единичный радиус-вектор **e** полностью заметает конус всех возможных направлений в n-мерном пространстве, попадая на одно и то же направление лишь единожды.

Бесконечно малый элемент объема в n-мерных сферических координатах

Этот элемент равен произведению определителя матрицы G – якобиану преобразования координат (3) на соответствующие дифференциалы:

$$dV = \mathrm{Det}[G]drd\alpha_0 d\alpha_1 ... d\alpha_{n-2}. \quad (7)$$

Столбцами матрицы G являются векторы – производные радиус-вектора $\mathbf{R}$ по аргументам r, α_0, α_1, ..., α_{n-2}.

$$G = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_{n-2}}\right]. \quad (8)$$

Можно показать, что все вектор-столбцы в матрице G попарно ортогональны, при этом детерминант матрицы равен произведению норм этих векторов:

$$\det[G] = \left\|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_0}\right\| \cdot \left\|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_1}\right\| \cdot ... \cdot \left\|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \alpha_{n-2}}\right\|. \quad (9)$$

Расписывая эти нормы по индукции и подставляя выражение (9) в (7), получаем

$$dV_n = \cos^{n-2}\alpha_{n-2} ... \times$$
$$\times ... \cos^1\alpha_1 \cos^0\alpha_0 r^{n-1} drd\alpha_0 d\alpha_1 ... d\alpha_{n-2}. \quad (10)$$

Пусть область интегрирования функции $F(r, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2})$ в сферических координатах ограничена гладкой замкнутой гиперповерхностью S, и при этом радиус-вектор, исходящий в любом направлении, пересекает эту поверхность изнутри наружу один раз, т. е. угол между нормалью к внешней стороне поверхности и радиус-вектором всегда меньше $\pi/2$. В этом случае с учетом полных пределов изменения углов (6) представим интеграл от этой функции в виде

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-2}\alpha_{n-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-3}\alpha_{n-3} ... \times$$
$$\times ... \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^1\alpha_1 \int_0^{2\pi} \cos^0\alpha_0 \int_0^{R_e} r^{n-1} \times$$
$$\times F(r, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}) drd\alpha_0 d\alpha_1 ... d\alpha_{n-3} d\alpha_{n-2}, \quad (11)$$

где $R_e \equiv R_{\mathrm{end}}(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2})$ – длина радиус-вектора, исходящего от начала координат в направлении, заданном углами α_0, α_1, ..., α_{n-3}, α_{n-2}, до конечной точки пересечения с поверхностью.

Чтобы, например, вычислить объем n-мерного шара радиуса r_0, надо принять в формуле (11) длину радиус-вектора и удельную плотность постоянными, соответственно равными

$$R_e = r_0 \text{ и } F(r, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}) = 1.$$

После необходимых преобразований получим объем n-мерного шара в виде

$$V_S = \begin{cases} 2(2\pi)^{(n-1)/2} r_0^n [1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (n-2)\cdot n]^{-1}, \\ \text{если } n - \text{нечетное}, \\ (2\pi)^{n/2} r_0^n [2\cdot 4\cdot 6\cdot ...\cdot (n-2)\cdot n]^{-1}, \\ \text{если } n - \text{четное}. \end{cases} \quad (12)$$

Результаты выражение (12) совпадают с известными формулами для объема n-мерного шара [1, 2], полученными «формальным» и косвенным способами, соответственно, что подтверждает достоверность вышеприведенных выводов и формул, полученных автором путем использования многомерных сферических координат.

Необходимые свойства многократных сферических интегралов

Возьмем в выражении (11) $(j + 1)$ раз интегралы по аргументам r, α_0, α_1, ..., α_{j-1} и обозначим интеграл, зависящий от параметров α_j, α_{j+1}, ..., α_{n-2}, как

$$I_j \equiv I_j(\alpha_j, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_{n-2}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{j-1} a_{j-1} ... \times$$
$$\times ... \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^1 a_1 \int_0^{2\pi} \cos^0 a_0 \int_0^{R\_e} r^{n-1} \times \quad (13)$$
$$\times F(r, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{j-1}/\alpha_j, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_{n-2})\, dr\, d\alpha_0\, d\alpha_1 ... d\alpha_{j-1},$$

где $R_e \equiv \mathrm{R}_{end}(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{j-1}/\alpha_j, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_{n-2})$.

Отметим, что кратность интеграла (13) по аргументам – углам α_0, α_1, ..., α_{j-1} равна j. Запишем связь между интегралами, имеющими кратности по углам $(j+1)$ и j:

$$I_{j+1}(\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, ..., \alpha_{n-2}) =$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^j\alpha_j I_j(\alpha_j/\alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, ..., \alpha_{n-2}) d\alpha_j. \quad (14)$$

Обозначим подынтегральную функцию по углу α_j как

$$f_j \equiv f_j(\alpha_j/\alpha_{j+1}, ..., \alpha_{n-2}) = \cos\alpha_j I_j(\alpha_j/\alpha_{j+1}, ..., \alpha_{n-2}), \quad (15)$$

а численные значения производных на границах интервалов интегрирования как

$$f_j^{(2k-1)} = \left.\frac{\partial^{2k-1} f_j}{\partial \alpha_j^{2k-1}}\right|_{\alpha_j = \pm\pi/2}, \; k = 1, 2, 3...;$$
$$I_j^{(2m)} = \left.\frac{\partial^{2m} I_j}{\partial \alpha_j^{2m}}\right|_{\alpha_j = \pm\pi/2}, \; m = 1, 2, 3, ... \quad (16)$$

Отметим необходимые далее свойства единичного вектора направления $\mathbf{e}$ и составляющих его направляющих косинусов l_i, в окрестности точек $\alpha_j = \pm\pi/2 \pm \Delta\alpha_j$:

$$\mathbf{e}|\, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_j = \pm(\pi/2 - \Delta\alpha_j);$$
$$\mathbf{e}|\, \alpha_0 - \pi, -\alpha_1, -\alpha_2, ..., \alpha_j = \pm(\pi/2 + \Delta\alpha_j). \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что направляющие косинусы (3) будут равны для отсчетов углов, записанных слева и справа в выражении (17), и что такое равенство соблюдается по углам с любыми номерами ($j =$

$=1, 2, ..., n-2$), взятыми в качестве полюсов $\alpha_j = \pm\pi/2$, если проинвертировать значения углов с меньшими номерами $\alpha_i = -\alpha_i$ ($0 < i < j$), а угол с нулевым номером изменить как $\alpha_0 = \alpha_0-\pi$. Следовательно, если единичный вектор направления пересекает полюс по углу $\alpha_j = \pm\pi/2$, перемещаясь на величину $\pm\Delta\alpha_j$, то для этого вектора единственным образом находится равный вектор направления, при этом диапазоны интегрирования по углам с меньшими номерами приводятся к прежним диапазонам

$$-\pi/2 \le -\alpha_i \le \pi/2,\ -\pi \le \alpha_0-\pi \le \pi. \quad (18)$$

Кроме того, частичный элемент объема в подпространстве размерности (j+1)

$$dV_{j+1} = \cos^{j-1}\alpha_{j-1}... \times$$
$$\times ... \cos^1\alpha_1\cos^0\alpha_0 r^{n-1} dr d\alpha_0 d\alpha_1 ... d\alpha_{n-2} \quad (19)$$

при такой замене углов не меняется.

Из перечисленных свойств следуют свойства четности интегралов I_j (α_j) относительно полюсов $\alpha_{Pj} = \pm\pi/2$:

$$I_j(\alpha_{Pj}+\Delta\alpha_j) = I_j(\alpha_{Pj}-\Delta\alpha_j). \quad (20)$$

Из свойств четности интегралов I_j (α_j) несложно доказать полезные (и необходимые далее) свойства равенства нулю всех производных нечетного порядка от подынтегральных функций по углам с четными номерами

$$f_j^{(2k-1)} = 0,\ \alpha_j = \pm\pi/2, j = 2, 4, 6...; k =1, 2, 3... \quad (21)$$

и ряда нечетных производных по углам с нечетными номерами

$$\frac{\partial f_3}{\partial\alpha_3} = 0,\ \frac{\partial f_5}{\partial\alpha_5} = \frac{\partial^3 f_5}{\partial\alpha_5^3} = 0,$$

$$\frac{\partial f_7}{\partial\alpha_7} = \frac{\partial^3 f_7}{\partial\alpha_7^3} = \frac{\partial^5 f_7}{\partial\alpha_7^5} = 0, ...\ \alpha_j = \pm\frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

Полагая в общем случае невозможным взять интегралы аналитически, предложим численный метод интегрирования на основе полученных результатов и опишем вытекающий отсюда алгоритм вычислений по шагам.

Численный метод интегрирования функций внутри замкнутой гладкой области в многомерных сферических координатах

0. Зафиксируем углы $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ как параметры и допустим, что найдена численно или аналитически длина радиус-вектора от начала координат до точки пересечения с поверхностью, ограничивающей область интегрирования $R_{\text{end}} \equiv R_{\text{end}}(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2})$.

Обозначим интегрируемую функцию по радиусу r, как по аргументу. В ней углы $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}$ являются параметрами:

$$F_0(r) \equiv F_0(r/\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}) = r^{n-1}F(r/\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}). \quad (23)$$

Значения производных нечетных порядков от подынтегральной функции в начале и конце интервала, обозначим соответственно

$$F_0^{(2k-1)}(0) = \left.\frac{\partial^{2k-1}F_0}{\partial r^{2k-1}}\right|_{r=0} \text{ и } F_0^{(2k-1)}(R_{\text{end}}) = \left.\frac{\partial^{2k-1}F_0}{\partial r^{2k-1}}\right|_{r=R_{end}}. \quad (24)$$

Представим внутренний интеграл по радиусу, применяя формулу Эйлера–Маклорена [3], в виде приближенных конечных сумм из N ненулевых отсчетов подынтегральной функции и m уточняющих поправок, учитывающих разности нечетных производных на концах интервала интегрирования:

$$I_0 \equiv I_0(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-2}) =$$
$$= \int_0^{R\_e} F_0(r)\,dr \approx \sum_{i=1}^{N-1} F_0(i\Delta r)\Delta r + \frac{1}{2}F_0(R_{end})\Delta r +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\Delta r^{2k}[F_0^{(2k-1)}(0) - F_0^{(2k-1)}(R_{end})], \quad (25)$$

где $\Delta r = R_{end}/N$ – шаг суммирования отсчетов функции.

При этом на первом шаге (и далее) положим, что используется формула Эйлера–Маклорена.

1. Последующий интеграл по углу α_0 (при фиксированных углах ($\alpha_1, ..., \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}$) представим в виде конечной приближенной суммы из N_0 отсчетов подынтегральной функции:

$$I_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-2}) =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^0\alpha_0\, I_0(\alpha_0/\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-2})d\alpha_0 \approx$$
$$\approx \sum_{i=0}^{N_0-1} f_0(i\Delta\alpha_0/\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-2})\Delta\alpha_0, \quad (26)$$

где $\Delta\alpha_0 = 2\pi/N_0$.

Уточняющих поправок не требуется, так как в начале и конце интервала интегрирования при $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_0 = 2\pi$ радиус-вектор имеет равные направляющие косинусы (3), попадая на одно и то же пространственное направление. Следовательно, подынтегральная функция является периодической по углу α_0 (период равен 2π) и поэтому разности всех производных и соответствующих им уточняющих поправок равны нулю.

2. Следующий интеграл по углу α_1 представим в виде конечной суммы из (N_1 – 1) отсчетов и, например, пяти уточняющих поправок:

$$I_2(\alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_{n-2}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(\alpha_1)d\alpha_1 \approx \sum_{i=1}^{N_1-1} f_1(-\frac{\pi}{2} + i\Delta\alpha_1) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{5}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\Delta\alpha_1^{2k}[f_1^{(2k-1)}(-\pi/2) - f_1^{(2k-1)}(+\pi/2)], \quad (27)$$

где $\Delta\alpha_1 = \pi/N_1$;

$f_1(\alpha_1)$ и $f_1^{(2k-1)}$ ($\pm\pi/2$) – подынтегральная функция и ее производные, определенные в соответствии с (23) и (24).

Здесь и далее ограничимся практическим и очевидным случаем, когда заведомо нулевые отсчеты отбрасываются: $f_j\ (\alpha_j = \pm\pi/2) = 0$, так как $\cos^j(\pm\pi/2) = 0$.

Производные нечетных порядков от подынтегральной функции $f_1\ (\alpha_1) = \cos^1 \alpha_1 I_1(\alpha_1)$, применяя формулы многократного дифференцирования произведений, удобно рассчитывать через производные четных порядков (на один порядок ниже) функции $I_1(\alpha_1)$. Приведем эту связь между численными значениями производных до 9-го и 8-го порядков при $\alpha_1 = \pm\pi/2$:

$$\left.\begin{aligned}
&f_1^{(1)} = -I_1,\ f_1^{(3)} = -3I_1^{(2)} + I_1,\ f_1^{(5)} = -5I_1^{(4)} + 10I_1^{(2)} - I_1,\\
&f_1^{(7)} = -7I_1^{(6)} + 35I_1^{(4)} - 21I_1^{(2)} + I_1,\\
&f_1^{(9)} = -9I_1^{(8)} + 84I_1^{(6)} - 126I_1^{(4)} + 36I_1^{(2)} - I_1.
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

На основе формул (28) можно рассчитать для приближенной суммы (27) пять уточняющих поправок на ошибки до 10-го порядка малости, включительно.

3. Из свойства (21) следует, что все уточняющие поправки в применяемой формуле Эйлера–Маклорена равны нулю и следующий интеграл по углу α_2 заменяется конечной суммой из $(N_2 - 1)$ отсчетов:

$$I_3 = I_3(\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}) =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\alpha_2 I_2(\alpha_2/\alpha_3, \ldots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2})d\alpha_2 \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{N_2-1} \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} + i\Delta\alpha_2\right) I_2\left(-\frac{\pi}{2} + i\Delta\alpha_2\right)\Delta\alpha_2, \quad (29)$$

где $\Delta\alpha_2 = \pi/N_2$.

4. Интеграл по углу α_3 вычислим как конечную сумму, взяв пять уточняющих поправок на ошибки до 12-го порядка малости, включительно:

$$I_4(\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_{n-2}) =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_3\ (\alpha_3)d\alpha_3 \approx \sum_{i=1}^{N_3-1} f_3\left(-\frac{\pi}{2} + i\Delta\alpha_3\right) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{6} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \Delta\alpha_3^{2k}[f_3^{(2k-1)}(-\pi/2) - f_3^{(2k-1)}(+\pi/2)], \quad (30)$$

где $\Delta\alpha_3 = \pi/N_3$.

При этом, как и на втором шаге, можно воспользоваться аналогичными связями между производными при $\alpha_3 = \pm\pi/2$:

$$\left.\begin{aligned}
&f_3^{(1)} = 0,\ f_3^{(3)} = -6I_3,\ f_3^{(5)} = -60I_3^{(2)} + 60I_3,\\
&f_3^{(7)} = -210I_3^{(4)} + 1260I_3^{(2)} - 546I_3,\\
&f_3^{(9)} = -504I_3^{(6)} + 7560I_3^{(4)} - 19656I_3^{(2)} + 4920I_3,\\
&f_3^{(11)} = -990I_3^{(8)} + 27720I_3^{(6)} - 80180I_3^{(4)} +\\
&+27060I_3^{(2)} - 44286I_3.
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Необходимые производные вида $I_1^{(2m)}$ по углу α_1 на предшествующем втором шаге, $I_3^{(2m)}$ по углу α_3 на данном четвертом шаге и т. д. (по углам α_5, α_7, … на последующих четных шагах) удобно вычислять численно по четырем узлам, используя четность функций – интегралов I_1, I_3, I_5, … относительно полюсов:

$$\left.\begin{aligned}
&I_j^{(2)} \approx [8064I_j(1) - 1008I_j(2) + 128I_j(3) - 9I_j(4)]/(2520\delta\alpha_j^2),\\
&I_j^{(4)} \approx [-1952I_j(1) + 676I_j(2) - 96I_j(3) + 7I_j(4)]/(120\delta\alpha_j^4),\\
&I_j^{(6)} \approx [116I_j(1) - 52I_j(2) + 12I_j(3) - I_j(4)]/(2\delta\alpha_j^6),\\
&I_j^{(8)} \approx [-112I_j(1) + 56I_j(2) - 16I_j(3) + 2I_j(4)]/\delta\alpha_j^8,
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

где $I_j(i) \equiv I_j\ (\pm\pi/2 + i\delta\alpha_j)$ – первый отсчет функции, четной относительно $\alpha_j = \pm\pi/2$; $j = 1, 3, 5, \ldots$; $i = 1, 2, 3, 4$; $\delta\alpha_j$ – выбранный шаг численного дифференцирования.

5. Следующий интеграл по углу α_4 представим суммой отсчетов без уточняющих поправок, аналогично, как и на третьем шаге по углу α_4, и т. д.

На последующих четных шагах (как и на предшествующем четвертом шаге) можно использовать полезное свойство (22), например, для уменьшения порядка малости ошибки при сохранении количества отсчетов численного дифференцирования.

Итак, в предлагаемом алгоритме интегралы по радиусу – r и углам с нечетными индексами – α_1, α_3, α_5, … рассчитываются как суммы с уточняющими поправками, а интегралы по углам с четными индексами α_0, α_2, α_4, … – без этих поправок. При этом циклы вычислений по углам α_j организуются как внутренние циклы по отношению к циклам по углам α_{j+1}, самый внутренний цикл вычислений – по радиусу. Необходимый переход от многомерных прямоугольных координат к сферическим осуществляется по формулам (2) и (3).

Предлагаемый метод численного интегрирования в многомерных сферических координатах удобен тем, что во многих практических случаях гладкая замкнутая область интегрирования в угловых пределах является параллелепипедом и при разбиении не имеет элементарных граничных участков, частично не попадающих в нее. В сравнении с методом Монте-Карло [4], который дает лишь вероятностные оценки искомых интегралов, в предлагаемом методе не требуется громоздкого статистического моделирования распределений случайных величин. Обнаруженные свойства четности подынтегральных функций относительно полюсов по углам с четными номерами позволяют рассчитывать интегралы в виде конечных сумм [рассмотрение погрешностей из-за несходимости рядов вида (25) выходит за рамки статьи]. Результаты изложены по убывающей общности, также возможны изменения и развития алгоритма в интересах пользователя. Так, при численном интегрировании по нечетным углам можно использовать не только формулу Эйлера–Маклорена, но и другие известные способы уточнения.

Примеры численного интегрирования в многомерных сферических координатах

Приведем два примера решения задач, которые иллюстрируют использование метода и подтверждают его достоверность. Каждая задача решается дважды на основе известного метода и предлагаемого. Известный метод является точным и эталонным, предлагаемый – приближенным и тестируемым. Результаты решения предлагаемым методом сходятся к точным результатам.

Пример 1. Вычислить полярный момент второго порядка для четырехмерного эллипсоида с единичной равномерной плотностью. Уравнение эллипсоида:

$$\frac{(x_0-0{,}9)^2}{6^2}+\frac{(x_1-1{,}1)^2}{10^2}+\frac{(x_2-1{,}5)^2}{12^2}+\frac{(x_3-1{,}7)^2}{16^2}=1. \quad (33)$$

Центр этого эллипсоида смещен в точку с координатами

$$\mathbf{R}_c=[x_{c0},x_{c1},x_{c2},x_{c3}]^T=[0{,}9;\ 1{,}1;\ 1{,}5;\ 1{,}7]^T. \quad (34)$$

Полярный момент второго порядка рассчитывается относительно полюса – начала координат и равен интегралу от квадрата радиус-вектора по объему, заключенному внутри поверхности эллипсоида:

$$M_P=\int\limits_V \rho(R)R^2dV\ , \quad (35)$$

где $\rho(R)$ – удельная плотность, как функция радиус-вектора (далее для упрощения примера примем $\rho(R)$ = const = 1).

Можно показать, что полярный момент второго порядка смещенного эллипсоида равен

$$M_{PA}=M_{PCA}+V_A\left\|R_c\right\|^2, \quad (36)$$

где M_{PCA} – полярный момент центрированного эллипсоида; V_A – его объем; $\left\|R_c\right\|^2=(x_{c0})^2+(x_{c1})^2+(x_{c2})^2+$ $+(x_{c3})^2$ – квадрат нормы вектора $\mathbf{R}_c$.

Данный эллипсоид (33) получается из шара с радиусом $r_0=2$ при коэффициентах растяжения по соответствующим осям $k_0=3$, $k_1=5$, $k_2=6$ и $k_3=8$ раз. Тогда, используя свойства подобия и формулу (12) при $n=4$, получим

$$M_{PA}{}^{(COR)}=k_V(M_{PS}/4)$$
$$(k_0{}^2+k_1{}^2+k_2{}^2+k_3{}^2)+k_VV_S\left\|R_c\right\|^2, \quad (37)$$

где $k_V=k_0k_1k_2k_3$ – коэффициент увеличения объема;

$$V_S=2\pi^2r_0{}^4/4 \text{ и } M_{PS}=2\pi^2r_0{}^6/6 \quad (38)$$

– объем и полярный момент соответствующего шара. Подставляя в формулы (36) и (37) необходимые величины, рассчитаем численное значение полярного момента эллипсоида, которое и примем за точное (корректное):

$$M_{PA}{}^{(COR)}=5\,485\,541{,}917\ldots\ . \quad (39)$$

Полярный момент в сферических координатах несложно привести к интегралу:

$$M_{PA}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\alpha_2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\alpha_1\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}[R_{end}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)]^6d\alpha_0d\alpha_1d\alpha_2, \quad (40)$$

где $R_{end}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$ – конечная длина радиус-вектора, исходящего из начала координат в направлении, заданном углами α_0, α_1, α_2, до точки его пересечения с поверхностью эллипсоида. Чтобы найти это значение, необходимо уравнения связи (3) при $n=4$ подставить в уравнение эллипсоида (13) и, решая получившееся квадратное уравнение относительно r, выбрать положительное значение корня (это тривиальное решение здесь не приводится). 0-й шаг алгоритма – вычисление $[R_{end}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)]^6$ в этом примере производится аналитически без шагов по Δr. Производя оставшиеся шаги по углам α_0, α_1, α_2 согласно описанному алгоритму, вычислим приближенное (аппроксимированное) значение полярного момента эллипсоида $M_{PA}{}^{(APPR)}$.

Пример 2. Вычислить объем шестимерного эллипсоида

$$\frac{x_0^2}{3{,}9^2}+\frac{x_1^2}{3{,}9^2}+\frac{x_2^2}{3{,}9^2}+\frac{(x_3-1{,}2)^2}{5{,}1^2}+$$
$$+\frac{(x_4-1{,}5)^2}{6{,}9^2}+\frac{(x_5-2{,}1)^2}{5{,}7^2}=1. \quad (41)$$

Этот эллипсоид получается из шара радиусом $r_0=3$ при его растяжении по соответствующим осям в $k_0=k_1=k_2=1{,}3$ и $k_3=1{,}7$, $k_4=2{,}3$, $k_5=1{,}9$ раз. Тогда объем данного шестимерного эллипсоида больше объема соответствующего шестимерного шара V_S в $k_0k_1\ldots k_5$ раз. Подставляя необходимые величины $n=6$ и $r_0=3$ в формулу (12), рассчитываем численное значение объема эллипсоида, которое будем принимать за точное:

$$V_A{}^{(COR)}=k_0k_1k_2k_3k_4k_5V_S=61\,487{,}425\ldots\ . \quad (42)$$

Во втором примере уравнение эллипсоида (41) специально задано так, что длина радиус-вектора R_{end} не зависит от углов α_0 и α_1, а зависит только от углов α_2, α_3 и α_4 (что несложно показать). Кроме того, в обоих примерах центры эллипсоидов специально смещены относительно начала координат, чтобы уничтожить осевую симметрию, которая препятствовала бы проверке свойств четности интегралов относительно полюсов. Записывая соответствующую формулу для объема и взяв первые три внутренних интеграла по r, α_0 и α_1 аналитически, (т. е. выполняя 0-й, 1-й и 2-й шаги алгоритма), получаем

$$V_A=\frac{2\pi}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\alpha_4\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\alpha_3\times$$

$$\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\alpha_2\, [R_{end}(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)]^6 d\alpha_2 d\alpha_3 d\alpha_4. \quad (43)$$

(Аналитическое интегрирование введено для того, чтобы снизить количество необходимых вычислений на три порядка и соответственно иметь возможность по быстродействию рассчитать этот пример на ПК). Далее, производя 3-й, 4-й и 5-й шаги алгоритма – численное интегрирование по углам α_2, α_3 и α_4, вычисляем приближенное (аппроксимированное) значение объема эллипсоида $V_A^{(APPR)}$. Результаты решения примеров сведены в таблице.

Искомые величины – полярный момент четырехмерного и объем шестимерного эллипсоидов – вычислялись с точностью до ошибок от 2-го до 12-го и от 4-го до 14-го порядков малости, соответственно. Фактические относительные ошибки вычислений при порядках малости $2k$ соответственно равны

$$\delta_{Rel\text{-}F}(M) = \frac{M_{PA}^{(APPR)} - M_{PA}^{(COR)}}{M_{PA}^{(COR)}};$$

$$\delta_{Rel\text{-}F}(V) = \frac{V_A^{(APPR)} - V_A^{(COR)}}{V_A^{(COR)}}.$$

Минимальные относительные ошибки достигают десятичных порядков 10^{-14}–10^{-15}.

Величины, которыми аппроксимировались фактические относительные ошибки вычислений $2k$-го порядков малости (и которые можно принять за относительные теоретические ошибки), составляют

$$\delta_{Rel\text{-}T} = B_{2k}\Delta\alpha_j^{2k}[f_j^{(2k-1)}(-\pi/2) - f_j^{(2k-1)}(+\pi/2)]/(2k)!, \quad (44)$$

где $j = 3$ и $j = 5$ при вычислении полярного момента и объема, соответственно. Также в таблице приводится относительное расхождение между истинными относительными ошибками и соответствующими аппроксимирующими величинами:

$$\delta\delta_{Rel} = (\delta_{Rel\text{-}T} - \delta_{Rel\text{-}F})(\delta_{Rel\text{-}F})^{-1} 100\,\%.$$

Эти расхождения не превышают –6,47 % для первого и –5,18 % для второго примеров, т. е. фактические относительные ошибки с порядком малости $2k$ можно аппроксимировать первым отброшенным членом вида (44) (если, разумеется, предшествующие интегралы с меньшей кратностью вычислены более точно).

Шаг численного дифференцирования в обоих примерах выбран равным $\delta\alpha_1 = \delta\alpha_3 = 1/256$. Количества циклов по углам для первого и второго примеров соответственно равны

$N_0 = 128$, $N_1 = N_2 = 64$; $N_2 = N_3 = N_4 = 64$. Относительные ошибки с повышением порядка малости уточняющих поправок уменьшаются на два порядка.

О применении численного интегрирования в многомерных сферических координатах для некоторых задач статистической радиотехники

Разработанный автором метод численного интегрирования был практически использован и апробирован в вышеназванных применениях. Приведем две задачи в общем виде, для решения которых предлагаемый метод оказался удобным и целесообразным.

Задача 1. Найти вероятность P попадания многомерного вектора ошибки $\mathbf{R} = [x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]^T$ в определении параметров сигнала в некоторую область V, заключенную внутри поверхности $S \equiv S(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = C$, при функции плотности распределения вероятностей ошибок $f \equiv f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, которая в общем случае не интегрируется аналитически:

$$P \equiv P(\mathbf{R} \subset V) = P[S(\mathbf{R}) < C] =$$

$$= \int_V f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) dx_0 dx_1 \ldots dx_{n-1}. \quad (45)$$

В статистической радиотехнике, теории автоматического управления, навигации и других областях часто рассчитывают вероятность того, что модуль многомерного вектора ошибок не превысит заданный радиус. При этом поверхность S, ограничивающая область интегрирования, превращается в n-мерную сферу и очевидно удобство перехода к многомерным сферическим координатам, заключающееся в том, что пределы интегрирования по радиусу и по

Порядок малости ошибки $2k$	Ошибки вычисления M_{PA}, $n = 4$			Ошибки вычисления V_A, $n = 6$		
	$\delta_{Rel\text{-}F}(M)$	$\delta_{Rel\text{-}T}(M)$	$\delta\delta_{Rel}(M)$, %	$\delta_{Rel\text{-}F}(V)$	$\delta_{Rel\text{-}T}(V)$	$\delta\delta_{Rel}(V)$, %
2	$-6{,}12\cdot10^{-4}$	$-6{,}11\cdot10^{-4}$	–0,09	–	–	–
4	$-5{,}36\cdot10^{-7}$	$-5{,}33\cdot10^{-7}$	–0,41	$-7{,}48\cdot10^{-7}$	$-7{,}43\cdot10^{-7}$	–0,70
6	$-2{,}19\cdot10^{-9}$	$-2{,}17\cdot10^{-9}$	–0,87	$-5{,}25\cdot10^{-9}$	$-5{,}19\cdot10^{-9}$	–1,13
8	$-1{,}90\cdot10^{-11}$	$-1{,}87\cdot10^{-11}$	–1,44	$-5{,}91\cdot10^{-11}$	$-5{,}81\cdot10^{-11}$	–1,70
10	$-2{,}74\cdot10^{-13}$	$-2{,}56\cdot10^{-13}$	–6,47	$-1{,}01\cdot10^{-13}$	$-9{,}80\cdot10^{-13}$	–2,46
12	$-1{,}84\cdot10^{-14}$	–	–	$-2{,}47\cdot10^{-14}$	$-2{,}35\cdot10^{-14}$	–5,18
14	–	–	–	$-1{,}30\cdot10^{-15}$	–	–

углам становятся независимыми. Если ограничивающая поверхность не является сферой, то следует от уравнения поверхности

$$S(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = C$$

перейти к уравнению ее радиус-вектора как функции углов:

$$R_{end} \equiv R_{end}(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}).$$

Соответствующий переход делается и в подынтегральной функции:

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) \to F[R(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})].$$

Задача 2. Найти моменты для распределения на области определения V:

$$M(p_0, p_1, \ldots, p_{N-1}) =$$

$$= \int_V x_0{}^{p_0} x_1{}^{p_1} \ldots x_{N-1}{}^{p_{N-1}} f(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) dx_0 dx_1 \ldots dx_{N-1}, \quad (46)$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_{N-1} = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Эта задача встречается в статистике и ее технических приложениях. При не интегрируемой аналитически функции распределения искомые моменты можно определить предлагаемым численным методом. В общем случае область интегрирования V может иметь и бесконечную протяженность, при условии сходимости соответствующих интегралов (45), (46).

Возможные применения многомерных сферических координат для поиска экстремума на поверхностях и для некоторых других задач

Многомерные сферические координаты можно рассматривать как частный случай многомерных криволинейных координат. Переход к каким-либо криволинейным координатам от прямоугольных может определяться различными соображениями, в частности, удобством поиска экстремума функций и функционалов на поверхностях. Эти задачи оптимизации при ограничениях, встречающиеся, например, в теории управления и навигации [5], решаются методом неопределенных множителей Лагранжа [6, 7]. Однако, когда минимизируемая (или максимизируемая) функция характерно зависит от радиального направления, можно перейти к сферическим координатам и решать задачу прямым методом. При этом количество аргументов поиска экстремума становится равным числу степеней свободы в экстремальной задаче, т. е. устраняется неопределенность.

Пример. Найти минимальное и максимальное собственные числа матрицы квадратической формы и соответствующие им собственные векторы:

$$F(\mathbf{R}) = 0{,}5\langle\mathbf{R}, M\mathbf{R}\rangle, \quad (47)$$

где $\mathbf{R} = [x_0, x_1, x_2, x_3]^T$ – четырехмерный вектор прямоугольных координат;

$$M \approx \begin{bmatrix} 4{,}1908 & 2{,}7032 & -0{,}8016 & 1{,}2733 \\ 2{,}7032 & 5{,}7507 & 2{,}2245 & 0{,}9414 \\ -0{,}8016 & 2{,}2245 & 8{,}1563 & -0{,}1829 \\ 1{,}2733 & 0{,}9414 & -0{,}1829 & 9{,}2522 \end{bmatrix}$$

– матрица квадратической формы, которая сформирована на основе канонического жорданового разложения так, что ее собственные числа в точности равны

$$\lambda_i = \{1{,}530\ 6{,}240\ 9{,}210\ 10{,}37\}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

При этом собственные нормированные векторы ($||\mathbf{e}_i|| = 1$), соответствующие минимальному и максимальному собственным числам, равны

$$\mathbf{e}_0 = [0{,}731231\ -0{,}614461\ 0{,}293668\ -0{,}038707]^T;$$

$$\mathbf{e}_3 = [0,\ 327727\ 0,\ 495632\ 0,\ 318361\ 0{,}738641]^T.$$

Подставляя в равенство (47) уравнения связи (2) и (3) при $n = 4$, получаем уравнение квадратической формы в виде

$$F(\mathbf{R}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = 0{,}5R^2F_S,$$

где $F_S \equiv F_S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \langle\mathbf{e}, M\mathbf{e}\rangle$ – значение квадратической формы на единичной четырехмерной сфере;

$\mathbf{e} = [cs_2cs_1cs_0,\ cs_2cs_1sn_0,\ cs_2sn_1,\ sn_2]^T$ – единичный вектор направления, где $cs_i \equiv \cos\alpha_i$, $sn_i \equiv \sin\alpha_i$, $i = 0, 1, 2$.

Квадратическая форма приводится к каноническому виду

$$F = 0{,}5(\lambda_0 u_0^2 + \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2). \quad (48)$$

Дифференцируем дважды (47) и (48) и сопоставляем

$$\frac{\partial^2 F}{\partial R^2} = F_S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \text{ и } \frac{\partial^2 F}{\partial u_i^2} = \lambda_i. \quad (49)$$

Из формулы (49) можно заключить, что минимальное значение второй производной от квадратической формы по радиусу F_S будет получено тогда, когда единичный вектор направления $\mathbf{e}$ совпадет с направлением оси $0U_j$, которой соответствует минимальное собственное число $\lambda_j = \lambda_{\min}$; максимум F_S также будет достигаться при аналогичном совпадении:

$$\min\{F_S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)\} = \lambda_{\min} \text{ и } \max\{F_S(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)\} = \lambda_{\max}.$$

Таким образом задача сводится к поиску экстремумов квадратической формы на единичной сфере. Минимум (максимум) несложно найти градиентным методом, соответственно как

$$\alpha_{m+1} = \alpha_m \mp k_{reg} \nabla \mathbf{F}_{\mathbf{s}_m},$$

где $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]^T$ – вектор углов;

$\nabla \mathbf{F}_\mathbf{S} = \left[\dfrac{\partial F_S}{\partial\alpha_0}, \dfrac{\partial F_S}{\partial\alpha_1}, \dfrac{\partial F_S}{\partial\alpha_2}\right]^T$ – вектор первых производных (аналитические выражения для производных здесь не приводятся); k_{reg} – регулировочный коэффициент, m – номер итерации.

В этой задаче минимальное и максимальное собственные числа находятся, например, за 16 и 32 итерации, соответственно, с относительными погрешностями

$$\delta(\lambda_0) = 0{,}618 \cdot 10^{-7}\ \delta(\lambda_3) = 0{,}119 \cdot 10^{-7},$$

а нормированные собственные векторы находятся с угловой ошибкой в направлении

$$\delta\mathbf{e}_0 = 0{,}142 \cdot 10^{-3}\text{ рад},\ \delta\mathbf{e}_1 = 0{,}100 \cdot 10^{-3}\text{ рад}$$

от нулевого приближения, в качестве которого было выбрано направление по оси $0X_0$ ($\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$). Минимальное собственное число для корреляционной матрицы шума может использоваться, например, для расчета обобщенной дисперсии [8]:

$$D = E/\lambda_{min},$$

где E – энергия сигнала.

Оба числа – минимальное и максимальное – могут использоваться, например, как границы диапазона прогонки при решении характеристического уравнения и т. д. В этом простом иллюстративном примере итерации сходятся к искомым решениям и от других начальных приближений с погрешностями такого же порядка. Однако в экстремальных задачах функция может иметь несколько экстремумов на поверхности поиска. Тогда направляющие косинусы удобны для задания различных начальных приближений, от которых и начинается движение к экстремуму, так как можно упорядоченно перебирать пространственные направления и соответствующие им точки пересечения на поверхностях.

Следует упомянуть еще об одной интересной возможности приложения формул для направляющих косинусов в виде (3). В теории управления или навигации может встретиться задача аппроксимации траектории движения системы в многомерном пространстве состояний (или параметров), или аналогичная задача управления системой. При этом вектор состояния или параметров системы $\mathbf{R} = [x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]^T$ является функцией времени, где в общем случае могут быть неизвестны (или безразличны) как функциональная зависимость, так и отсчеты времени.

Введем некоторые аппроксимирующие функции от времени $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, ..., $\alpha_{n-2}(t)$ таким образом, что обобщенные скорости системы $x_i' \equiv \dfrac{dx_i}{dt}$ будут выражены как направляющие косинусы

$$x_0' = \cos\alpha_0(t)\cos\alpha_1(t) \ldots \cos\alpha_{n-2}(t),$$

$$x_1' = \cos\alpha_0(t)\cos\alpha_1(t) \ldots \sin\alpha_{n-2}(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{n-1}' = \sin\alpha_0(t).$$

При таком задании появляется удобное и полезное свойство

$$S(T) = \int_0^T \|V\| dt = T, \tag{50}$$

где $S(T)$ – путь, проходимый системой в пространстве состояний за условное время T;

$||V|| = [(x_0')^2 + (x_1)^2 + \ldots + (x_{n-1}')^2]^{1/2}$ – модуль скорости. Известно, что одной траектории в пространстве может соответствовать множество функций времени $\mathbf{R}(t)$. Свойство (50) позволяет автоматически ввести нормировку и избавиться от неопределенности.

Из существующей литературы известны и другие способы задания многомерных сферических координат, которые используются, например, для задач квантования [9].

Автор выражает благодарность коллеге по работе – доценту кафедры №42 СПбГУАП С. Н. Воробьеву, который инициировал автора к написанию статьи и дал необходимые ценные советы.

Литература

1. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики. – Т.2. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1953. – 627 с.
2. **Возенкрафт Дж., Джекобс И.** Теоретические основы техники связи. – М.: Мир, 1969. – 640 с.
3. **Демидович Б. П., Марон И. А.** Основы вычислительной математики. – М.: ГИФМЛ, 1968. – 659 с.
4. **Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М.**, MATLAB 6. x: Программирование численных методов. – СПб.: «БХВ-Петербург», 2004. – 662 с.
5. **Алексеев В. И., Кориков А. М., Полонников Р. И., Тараченко В. П.,** Экстремальная радионавигация. – М.: Наука, 1978. – 279 с.
6. **Булдырев В. С., Павлов Б. С.** Линейная алгебра и функции многих переменных. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 496 с.
7. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.
8. **Нестерук В. Ф.** О влиянии формы сигнала на его обнаружение при нормальных коррелированных помехах // Радиотехника и электроника. –1963. – № 8. – С. 1319–1325.
9. **Peter F., Swaszek, John B. Thomas** Multidimensional spherical coordinats. Quantization // IEEE. Transfction of information theory. – Vol. It-29. – N 4. – July 1983. – C. 570–576.