УДК 681.5.013

СИНТЕЗ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С АМПЛИТУДНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

С. А. Цветков,
аспирант
В. Ф. Шишлаков,
доктор техн. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

В статье рассматривается решение задачи параметрического синтеза амплитудно-импульсных систем автоматического управления на основе обобщенного метода Галеркина. Предлагаются математические модели амплитудно-импульсных модуляторов, более полно учитывающие форму импульса, формируемого модулятором.

A solution of the parameter synthesis problem of pulse-amplitude automatic control systems based on Galerkin's generalized method is proposed. Mathematical models of pulse amplitude modulators which take better account of the impulse shape are developed.

Введение

При исследовании систем автоматического управления (САУ) с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ) импульсный элемент (модулятор) обычно считают идеальным, генерирующим с периодом T последовательность бесконечно коротких импульсов типа δ-функции. Такая математическая модель АИМ нашла широкое применение, поскольку существенно упрощает анализ и синтез импульсных САУ. Однако подобное представление импульсного элемента является упрощенным, так как никакой реальный импульсный элемент не может генерировать бесконечно короткие импульсы бесконечной амплитуды. Во многих случаях требуется более полно оценивать влияние АИМ на динамические процессы в системе управления, что вызывает необходимость разработки и применения более точных моделей модуляторов. Так, если длительность замыкания импульсного элемента составляет более 5% от периода прерывания [1], следует применять математические модели АИМ, учитывающие конечную длительность замыкания импульсного элемента [2, 3]. Известно [4], что форма импульса на выходе модулятора отличается от прямоугольной. Это связано с инерционностью полупроводниковых элементов (в том числе и микросхем), на которых реализуется АИМ.

Влияние формы импульсов, формируемых АИМ, на динамику САУ подробно рассмотрено в работах [2, 3], где показано, что при решении задачи синтеза требуемые показатели качества работы системы можно получать, не только разрабатывая соответствующий регулятор, но и изменяя характеристики модулятора.

Математические модели амплитудно-импульсных модуляторов

Математическая модель АИМ, преобразующего входной сигнал в последовательность несимметричных трапецеидальных импульсов постоянной длительности, следующих через одинаковые интервалы времени, описывается выражением

$$\begin{aligned} x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [& k_{1n}(t-nT)1(t-nT) - \\ & -k_{1n}(t-(n+\gamma_1)T)1(t-(n+\gamma_1)T) - \\ & -k_{2n}(t-(n+\gamma_2)T)1(t-(n+\gamma_2)T) + \\ & +k_{2n}(t-(n+\gamma)T)1(t-(n+\gamma)T)], \end{aligned} \quad (1)$$

где $k_{1n} = \dfrac{x(nT)}{t_1} = \dfrac{x(nT)}{\gamma_1 T}$; $k_{2n} = \dfrac{x(nT)}{t_3 - t_2} = \dfrac{x(nT)}{(\gamma - \gamma_2)T}$ – коэффициенты крутизны фронта и среза импульса соответственно; здесь t_1 – длительность фронта; t_3 – длительность импульса; $\gamma_1 = \dfrac{t_1}{T}$; $\gamma_2 = \dfrac{t_2}{T}$; $\gamma = \dfrac{t_3}{T}$;

$0 \le \gamma_1 \le \gamma_2$; $0 \le \gamma_2 \le \gamma$; $0 \le \gamma \le 1$ – относительные длительности фронта и импульса в целом; $x(nT) = \int_0^\infty x(t)\delta(t-nT)\mathrm{d}t$, величина n-го дискретного значения; δ – задержанная импульсная функция, существующая при $t = nT$; T – период прерывания, интервал времени между соседними импульсами.

Из соотношения (1) следуют математические модели АИМ:

– АИМ, формирующий последовательность симметричных трапеций:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [(t-nT)1(t-nT) - \\ -(t-(n+\gamma_1)T)1(t-(n+\gamma_1)T) - \\ -(t-(n+\gamma_2)T)1(t-(n+\gamma_2)T) + \\ +(t-(n+\gamma)T)1(t-(n+\gamma)T)], \quad (2)$$

где $k_n = \dfrac{x(nT)}{\gamma_1 T}$;

– АИМ, формирующий последовательность трапеций с вертикальным срезом ($t_1 = g_1T$; $t_2 = g_2T$; $t_3 = 0$):

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [k_{1n}(t-nT)1(t-nT) - k_{1n}(t-(n+\gamma_1)T) \times \\ \times 1(t-(n+\gamma_1)T) - H1(t-(n+\gamma_2)T)], \quad (3)$$

где $k_{1n} = \dfrac{x(nT)}{\gamma_1 T}$;

– АИМ, формирующий последовательность трапеций с вертикальным фронтом ($t_1 = 0$; $t_2 = g_2T$; $t_3 = gT$):

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [H1(t-nT) - k_{2n}(t-(n+\gamma_2)T) \times \\ \times 1(t-(n+\gamma_2)T) + k_{2n}(t-(n+\gamma_2)T)1(t-(n+\gamma_2)T)], \quad (4)$$

где $k_{2n} = \dfrac{x(nT)}{(\gamma-\gamma_2)T}$.

Если в системе управления модулятор генерирует малые по длительности импульсы, то трапеция вырождается в треугольник. В данном случае математическая модель АИМ, преобразующего входной сигнал в последовательность несимметричных треугольных импульсов постоянной длительности, следующих через одинаковые интервалы времени, описывается выражением

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [k_{1n}(t-nT)1(t-nT) - (k_{1n}+k_{2n}) \times \\ \times (t-(n+\gamma_1)T)1(t-(n+\gamma_1)T) + \\ +k_{2n}(t-(n+\gamma)T)1(t-(n+\gamma)T)], \quad (5)$$

где $k_{1n} = \dfrac{x(nT)}{t_1} = \dfrac{x(nT)}{\gamma_1 T}$; $k_{2n} = \dfrac{x(nT)}{t_2 - t_1} = \dfrac{x(nT)}{(\gamma-\gamma_1)T}$ – коэффициенты крутизны фронта и среза импульса соответственно; здесь t_1 – длительность фронта; t_2 – длительность импульса; $\gamma_1 = \dfrac{t_1}{T}$; $\gamma = \dfrac{t_2}{T}$; $0 \le \gamma_1 \le \gamma$; $0 \le \gamma \le 1$ – относительные длительности фронта и импульса в целом.

Из соотношения (5) следуют математические модели АИМ, формирующие импульсы в виде:

– АИМ, формирующий последовательность симметричных треугольных импульсов:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n [(t-nT)1(t-nT) - 2(t-(n+0{,}5\gamma)T) \times \\ \times 1(t-(n+0{,}5\gamma)T) + (t-(n+\gamma)T1(t-(n+\gamma)T)], \quad (6)$$

где $k_n = \dfrac{x(nT)}{\gamma_1 T}$;

– АИМ, формирующий последовательность треугольных импульсов с вертикальным срезом ($t_1 = \gamma_1 T$; $\gamma T - \gamma_1 T = 0$):

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [k_{1n}(t-nT)1(t-nT) - k_{1n}(t-(n+\gamma_1)T) \times \\ \times 1(t-(n+\gamma_1)T) - H1(t-(n+\gamma_1)T)], \quad (7)$$

где $k_{1n} = \dfrac{x(nT)}{\gamma_1 T}$;

– АИМ, формирующий последовательность треугольных импульсов с вертикальным фронтом ($t_1 = 0$; $t_2 = gT$):

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} [H1(t-nT) - k_{2n}(t-nT)1(t-nT) + \\ +k_{2n}(t-(n+\gamma)T)1(t-(n+\gamma)T)], \quad (8)$$

где $k_{2n} = \dfrac{x(nT)}{(\gamma-\gamma_1)T}$.

Решение задачи синтеза параметров САУ с АИМ

Задача параметрического синтеза амплитудно-импульсной системы, в которой модулятор описывается соотношениями (1)–(8), может быть эффективно решена во временно́й области обобщенным методом Галеркина [2, 3].

Общая схема решения задачи синтеза параметров импульсных САУ обобщенным методом Галеркина подробно рассмотрена в работах [2, 3], где показано, что с вычислительной точки зрения задача синтеза сводится к задаче нели-

■ *Рекуррентные аналитические соотношения* A_q^* *и* C_q^*

Вид импульса	A_{qi}^* (процесс на входе АИМ $x^0(t)=\left[x_y+H^*e^{-\alpha t}\cos(\beta t-\varphi_0)\right]1(t)$)	C_{qi}^* (процесс на входе АИМ $f(t)=H1(t)$)
АИМ, формирующий последовательность трапецеидальных импульсов		
Симметричный импульс	$\dfrac{1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-e^{-\rho_q\gamma_2 T}+e^{-\rho_q\gamma T}}{\gamma_1 T\rho_q^2}\tilde{A}_q^*$	$\dfrac{H\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-e^{-\rho_q\gamma_2 T}+e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\gamma_1 T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}$
Несимметричный импульс	$\left[\dfrac{1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}}{\gamma_1 T\rho_q^2}-\dfrac{e^{-\rho_q\gamma_2 T}-e^{-\rho_q\gamma T}}{(\gamma-\gamma_2)T\rho_q^2}\right]\tilde{A}_q^*$	$\dfrac{\dfrac{H}{\gamma_1 T}\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}\right)-\dfrac{H}{(\gamma-\gamma_2)T}\left(e^{-\rho_q\gamma_2 T}-e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}$
Импульс с вертикальным фронтом	$\dfrac{\rho_q(\gamma-\gamma_2)T-e^{-\rho_q\gamma_2 T}+e^{-\rho_q\gamma T}}{(\gamma-\gamma_2)T\rho_q^2}\tilde{A}_q^*$	$\dfrac{H\left(\rho_q(\gamma-\gamma_2)T-e^{-\rho_q\gamma_2 T}+e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{(\gamma-\gamma_2)T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}$
Импульс с вертикальным срезом	$\dfrac{1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\gamma_1 T\rho_q e^{-\rho_q\gamma_2 T}}{\gamma_1 T\rho_q^2}\tilde{A}_q^*$	$\dfrac{H\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\gamma_1 T\rho_q e^{-\rho_q\gamma_2 T}\right)}{\gamma_1 T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}$
АИМ, формирующий последовательность треугольных импульсов		
Симметричный импульс	$\dfrac{2\left(1-2e^{-\rho_q\frac{\gamma}{2}T}+e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\gamma T\rho_q^2}\tilde{A}_q^*$	$\dfrac{2H\left(1-2e^{-\rho_q\frac{\gamma}{2}T}+e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\gamma T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}$
Несимметричный импульс	$\left[\dfrac{\gamma-\gamma_1-\gamma e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\gamma_1 e^{-\rho_q\gamma T}}{\gamma_1(\gamma-\gamma_1)T\rho_q^2}\right]\tilde{A}_q^*$	$\dfrac{\dfrac{H}{\gamma_1 T}-\dfrac{H\gamma}{\gamma_1 T(\gamma-\gamma_1)}e^{-\rho_q\gamma_1 T}+\dfrac{H}{(\gamma-\gamma_1)T}e^{-\rho_q\gamma T}}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}$
Импульс с вертикальным фронтом	$\left[\dfrac{T\rho_q\gamma+e^{-\rho_q\gamma T}-1}{\gamma T\rho_q^2}\right]\tilde{A}_q^*$	$\dfrac{\rho_q\gamma T+e^{-\rho_q\gamma T}-1}{\gamma T}\dfrac{H}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}$
Импульс с вертикальным срезом	$\dfrac{1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\rho_q\gamma_1 T e^{-\rho_q\gamma_1 T}}{\gamma_1 T\rho_q^2}\tilde{A}_q^*$	$\dfrac{1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\rho_q\gamma_1 T e^{-\rho_q\gamma_1 T}}{\gamma_1 T}\dfrac{H}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}$

нейного программирования по поиску минимума функционала, построенного на основе уравнений Галеркина, при технических ограничениях на значения искомых параметров, устойчивость и грубость САУ в заданных пределах вариации параметров:

$$J=\sum_{q=1}^{m}\left\{\sum_{i=0}^{n}a_i(c_k)A_{qi}+\sum_{i=0}^{n^*}a_i^*(c_k)A_{qi}^*-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{v}e_i(c_k)C_{qi}-\sum_{i=0}^{v^*}e_i^*(c_k)C_{qi}^*\right\}^2,\qquad \min_{c_k}J,$$

где c_k – варьируемые параметры; $a_i(c_k)$, $a_i^*(c_k)$, $e_i(c_k)$, $e_i^*(c_k)$ – вещественные постоянные коэффициенты полиномов обобщенного дифференцирования D степеней n, v, n^*, v^* соответственно;

$$A_{qi}=\int_0^\infty D^i\{x^0(t)\}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t=A_q\rho_q^{i-1},\ i=0,1,\ldots,n;$$

$$A_{qi}^*=\int_0^\infty D^i\{x^{0*}(t)\}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t=A_q^*\rho_q^{i},\ i=0,1,\ldots,n^*;$$

$$C_{qi}=\int_0^\infty D^i\{f(t)\}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t=C_q\rho_q^{i-1},\ i=0,1,\ldots,v;$$

$$C_{qi}^*=\int_0^\infty D^i\{f^*(t)\}e^{-\alpha t}\mathrm{d}t=C_q^*\rho_q^{i},\ i=0,1,\ldots,v^*.$$

Интегральные соотношения A_q и C_q были получены ранее [2, 3]. Таким образом, для распространения обобщенного метода Галеркина на САУ с модуляторами (1)–(8) необходимо получить аналитические соотношения A_q^* и C_q^* в соответствии с методикой, подробно изложенной в работах [2, 3]. Соотношения A_q^* и C_q^* для различных видов импульса, формируемого модулятором, приведены в таблице.

В таблице принято следующее обозначение:

$$\tilde{A}_q^* = \frac{x_y}{1-e^{-\rho_q T}} +$$
$$+H^* \frac{e^{2(\alpha+\rho_q)T}\cos\varphi_0 - e^{(\alpha+\rho_q)T}\cos(\beta T+\varphi_0)}{e^{2(\alpha+\rho_q)T} - 2e^{(\alpha+\rho_q)T}\cos\beta T + 1}.$$

Доказательство предельных переходов рекуррентных аналитических соотношений

Покажем предельный переход при $\gamma_1 \to 0$ и $\gamma \to \gamma_2$ от соотношений A_q^* и C_q^*, полученных для АИМ, формирующего последовательность модулированных по амплитуде несимметричных трапеций (как наиболее общего случая), к аналогичным соотношениям для АИМ, формирующих последовательность импульсов в виде симметричных трапеций, трапеций с вертикальным фронтом и вертикальным срезом частного вида трапеции.

Так, если $\gamma_1 \to 0$, то модулятор формирует на выходе трапеции с вертикальным фронтом, следовательно:

$$C_q^* = \lim_{\gamma_1\to 0} \frac{\frac{H}{\gamma_1 T}\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}\right) - \frac{H}{(\gamma-\gamma_2)T}\left(e^{-\rho_q\gamma_2 T} - e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}.$$

Введем следующие обозначения: $M = H\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}\right)$, $N = \gamma_1 T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2$, – тогда C_q^* примет вид

$$C_q^* = \frac{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} M}{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} N} - \frac{\frac{H}{(\gamma-\gamma_2)T}\left(e^{-\rho_q\gamma_2 T} - e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}.$$

Однако предел функций M и N при $\gamma_1 \to 0$ равен нулю, т. е. возникает неопределенность, которую можно раскрыть с помощью правила Лопиталя [5], рассматривая предельное отношение первых производных от M и N:

$$\lim_{\gamma_1\to 0} M' = \lim_{\gamma_1\to 0} HT\rho_q e^{-\rho_q\gamma_1 T} = HT\rho_q;$$

$$\lim_{\gamma_1\to 0} N' = T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2.$$

Таким образом:

$$C_q^* = \frac{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} M'}{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} N'} - \frac{\frac{H}{(\gamma-\gamma_2)T}\left(e^{-\rho_q\gamma_2 T} - e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2} =$$
$$= \frac{H\rho_q}{\rho_q^2\left(1-e^{-\rho_q T}\right)} - \frac{\frac{H}{(\gamma-\gamma_2)T}\left(e^{-\rho_q\gamma_2 T} - e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}.$$

Окончательно получаем

$$C_q^* = \frac{H\left(\rho_q(\gamma-\gamma_2)T - e^{-\rho_q\gamma_2 T} + e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{(\gamma-\gamma_2)T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2},$$

что и требовалось доказать.

Если $\gamma \to \gamma_2$, то модулятор формирует последовательность трапеций с вертикальным срезом, следовательно:

$$C_q^* = \lim_{\gamma\to\gamma_2} \frac{\frac{H}{\gamma_1 T}\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}\right) - \frac{H}{(\gamma-\gamma_2)T}\left(e^{-\rho_q\gamma_2 T} - e^{-\rho_q\gamma T}\right)}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}.$$

Введем следующие обозначения: $M = H\left(e^{-\rho_q\gamma_2 T} - e^{-\rho_q\gamma T}\right)$, $N = (\gamma-\gamma_2)T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2$, – тогда C_q^* примет вид

$$C_q^* = \frac{H\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}\right)}{\gamma_1 T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2} - \frac{\lim\limits_{\gamma\to\gamma_2} M}{\lim\limits_{\gamma\to\gamma_2} N}.$$

Однако предел функций M и N при $\gamma_1 \to 0$ равен нулю, следовательно, необходимо рассмотреть предел отношения первых производных данных функций

$$\lim_{\gamma\to\gamma_2} M' = \lim_{\gamma\to\gamma_2} HT\rho_q e^{-\rho_q\gamma T} = HT\rho_q e^{-\rho_q\gamma_2 T};$$

$$\lim_{\gamma\to\gamma_2} N' = T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2.$$

Таким образом:

$$C_q^* = \frac{H\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}\right)}{\gamma_1 T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2} - \frac{\lim\limits_{\gamma\to\gamma_2} M'}{\lim\limits_{\gamma\to\gamma_2} N'} =$$
$$= \frac{H\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T} - \gamma_1 T\rho_q e^{-\rho_q\gamma_2 T}\right)}{\gamma_1 T\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2},$$

что и требовалось доказать.

Наконец, при $\gamma_1 \to 0$ и $\gamma \to \gamma_2$ АИМ формирует последовательность модулированных по амплитуде прямоугольных импульсов. Используя результаты, полученные выше:

$$C_q^* = \lim_{\substack{\gamma_1 \to 0 \\ \gamma \to \gamma_2}} \frac{\frac{H}{\gamma_1 T}\left(1 - e^{-\rho_q \gamma_1 T}\right) - \frac{H}{(\gamma - \gamma_2)T}\left(e^{-\rho_q \gamma_2 T} - e^{-\rho_q \gamma T}\right)}{\left(1 - e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2} =$$

$$= \frac{H\left(1 - e^{-\rho_q \gamma_2 T}\right)}{\rho_q \left(1 - e^{-\rho_q T}\right)},$$

что соответствует рекуррентному аналитическому выражению, определяющему данный интеграл [2, 3].

Аналогично изложенному выше покажем предельный переход от соотношений A_q^*, полученных для модулятора, формирующего последовательность импульсов в виде несимметричной трапеции, к соотношению, определяющему интеграл Галеркина для АИМ, который при $\gamma_1 \to 0$ формирует на выходе трапеции с вертикальным фронтом:

$$A_q^* = \lim_{\gamma_1 \to 0} \left[\frac{1 - e^{-\rho_q \gamma_1 T}}{\gamma_1 T \rho_q^2} - \frac{e^{-\rho_q \gamma_2 T} - e^{-\rho_q \gamma T}}{(\gamma - \gamma_2) T \rho_q^2} \right] \tilde{A}_q^*.$$

Введем обозначения $M = \left(1 - e^{-\rho_q \gamma_1 T}\right)$ и $N = \gamma_1 T \rho_q^2$, тогда

$$A_q^* = \left(\frac{\lim\limits_{\gamma_1 \to 0} M}{\lim\limits_{\gamma_1 \to 0} N} - \frac{\left(e^{-\rho_q \gamma_2 T} - e^{-\rho_q \gamma T}\right)}{(\gamma - \gamma_2) T \rho_q^2} \right) \tilde{A}_q^*.$$

Поскольку предел функций M и N при $\gamma_1 \to 0$ равен нулю, то для определения предела необходимо рассмотреть предел первых производных от M и N

$$\lim_{\gamma_1 \to 0} M' = \lim_{\gamma_1 \to 0} \rho_q e^{-\rho_q \gamma_1 T} = T\rho_q; \quad \lim_{\gamma_1 \to 0} N' = T\rho_q^2.$$

В результате

$$A_q^* = \left(\frac{T\rho_q (\gamma - \gamma_2) - e^{-\rho_q \gamma_2 T} + e^{-\rho_q \gamma T}}{(\gamma - \gamma_2) T \rho_q^2} \right) \tilde{A}_q^*,$$

что и требовалось доказать.

При $\gamma \to \gamma_2$ модулятор формирует последовательность трапеций с вертикальным срезом, следовательно:

$$A_q^* = \lim_{\gamma \to \gamma_2} \left[\frac{1 - e^{-\rho_q \gamma_1 T}}{\gamma_1 T \rho_q^2} - \frac{e^{-\rho_q \gamma_2 T} - e^{-\rho_q \gamma T}}{(\gamma - \gamma_2) T \rho_q^2} \right] \tilde{A}_q^*.$$

Введем обозначения $M = e^{-\rho_q \gamma_2 T} - e^{-\rho_q \gamma T}$, $N = (\gamma - \gamma_2) T \rho_q^2$, тогда

$$A_q^* = \left(\frac{\left(1 - e^{-\rho_q \gamma_1 T}\right)}{\gamma_1 T \rho_q^2} - \frac{\lim\limits_{\gamma \to \gamma_2} M}{\lim\limits_{\gamma \to \gamma_2} N} \right) \tilde{A}_q^*.$$

Предел функций M и N при $\gamma \to \gamma_2$ равен нулю, тогда, используя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\gamma \to \gamma_2} M' = \lim_{\gamma \to \gamma_2} \left(-\rho_q T e^{-\rho_q \gamma T}\right) = -\rho_q T e^{-\rho_q \gamma_2 T};$$

$$\lim_{\gamma \to \gamma_2} N' = -T\rho_q^2,$$

окончательно

$$A_q^* = \left(\frac{\left(1 - e^{-\rho_q \gamma_1 T}\right)}{\gamma_1 T \rho_q^2} - \frac{\rho_q T e^{-\rho_q \gamma_2 T}}{T \rho_q^2} \right) \tilde{A}_q^* =$$

$$= \left(\frac{1 - e^{-\rho_q \gamma_1 T} - \rho_q e^{-\rho_q \gamma_2 T}}{\gamma_1 T \rho_q^2} \right) \tilde{A}_q^*,$$

что и требовалось доказать.

Наконец, при $\gamma_1 \to 0$ и $\gamma \to \gamma_2$ АИМ формирует последовательность модулированных по амплитуде прямоугольных импульсов. Используя результаты, полученные выше:

$$A_q^* = \lim_{\substack{\gamma_1 \to 0 \\ \gamma \to \gamma_2}} A_{q\ \text{несимметр}}^* =$$

$$= \lim_{\substack{\gamma_1 \to 0 \\ \gamma \to \gamma_2}} \left[\frac{1 - e^{-\rho_q \gamma_1 T}}{\gamma_1 T \rho_q^2} - \frac{e^{-\rho_q \gamma_2 T} - e^{-\rho_q \gamma T}}{(\gamma - \gamma_2) T \rho_q^2} \right] \tilde{A}_q^* =$$

$$= \left[\frac{1 - e^{-\rho_q \gamma_2 T}}{\rho_q} \right] \tilde{A},$$

что соответствует интегралу Галеркина [2, 3].

Рассмотрим предельный переход при $\gamma_1 \to 0$ и $\gamma \to \gamma_1$ от соотношений A_q^* и C_q^*, полученных для АИМ, формирующего последовательность модулированных по амплитуде несимметричных треугольных импульсов (как наиболее общего случая), к аналогичным соотношениям для АИМ, формирующих последовательность импульсов в виде симметричных треугольников, треугольников с вертикальным фронтом и вертикальным срезом.

При $\gamma_1 \to 0$ АИМ формирует последовательность треугольных импульсов с вертикальным фронтом, следовательно:

$$C_q^* = \lim_{\gamma_1\to 0} \frac{\dfrac{H}{\gamma_1 T} - \dfrac{H\gamma}{\gamma_1 T(\gamma-\gamma_1)} e^{-\rho_q\gamma_1 T} + \dfrac{H}{(\gamma-\gamma_1)T} e^{-\rho_q \gamma T}}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}.$$

Введем следующие обозначения:

$$M = \left(\gamma-\gamma_1-\gamma e^{-\rho_q\gamma_1 T}+\gamma_1 e^{-\rho_q\gamma T}\right),\quad N=\gamma_1 T(\gamma-\gamma_1), \text{ –}$$

тогда

$$C_q^* = \frac{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} M}{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} N} \frac{H}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}.$$

Поскольку предел функции M и N при $\gamma_1\to 0$ равен нулю, используем правило Лопиталя и рассматриваем предел первых производных данных функций

$$\lim_{\gamma_1\to 0} M' = \lim_{\gamma_1\to 0}\left(-1+\rho_q\gamma T e^{-\rho_q\gamma_1 T}+e^{-\rho_q\gamma T}\right) = $$
$$=\rho_q\gamma T + e^{-\rho_q\gamma T} - 1;$$

$$\lim_{\gamma_1\to 0} N' = \gamma T - 2\gamma_1 = \gamma T.$$

Таким образом:

$$C_q^* = \frac{\rho_q\gamma T+e^{-\rho_q\gamma T}-1}{\gamma T}\frac{H}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2},$$

что и требовалось доказать.

Если $\gamma\to\gamma_1$, то на выходе АИМ формируется последовательность модулированных по амплитуде треугольных импульсов с вертикальным срезом

$$C_q^* = \lim_{\gamma\to \gamma_1} \frac{\dfrac{H}{\gamma_1 T} - \dfrac{H\gamma}{\gamma_1 T(\gamma-\gamma_1)} e^{-\rho_q\gamma_1 T} + \dfrac{H}{(\gamma-\gamma_1)T} e^{-\rho_q \gamma T}}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2},$$

либо, используя принятые выше обозначения:

$$C_q^* = \frac{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} M}{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} N} \frac{H}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2}.$$

Предел функции M и N при $\gamma\to\gamma_1$ равен нулю, тогда рассматриваем

$$\lim_{\gamma\to\gamma_1} M' = \lim_{\gamma\to\gamma_1}\left(1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\rho_q\gamma_1 T e^{-\rho_q\gamma T}\right) =$$
$$=1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\rho_q\gamma_1 T e^{-\rho_q\gamma_1 T};$$

$$\lim_{\gamma\to\gamma_1} N' = \gamma_1 T.$$

Таким образом:

$$C_q^* = \frac{1-e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\rho_q\gamma_1 T e^{-\rho_q\gamma_1 T}}{\gamma_1 T}\frac{H}{\left(1-e^{-\rho_q T}\right)\rho_q^2},$$

что и требовалось доказать.

Применим аналогичные шаги для соотношений A_q^*, тогда при $\gamma_1\to 0$ АИМ формирует последовательность треугольных импульсов с вертикальным фронтом, следовательно:

$$A_q^* = \lim_{\gamma_1\to 0} A_{q\ \text{несимметр}}^* =$$
$$=\lim_{\gamma_1\to 0}\left[\frac{\gamma-\gamma_1-\gamma e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\gamma_1 e^{-\rho_q\gamma T}}{\gamma_1(\gamma-\gamma_1)T\rho_q^2}\right]\tilde{A}_q^*.$$

Введем следующие обозначения:

$$M = \left(\gamma-\gamma_1-\gamma e^{-\rho_q\gamma_1 T}+\gamma_1 e^{-\rho_q\gamma T}\right),\quad N=\gamma_1 T\rho_q^2(\gamma-\gamma_1), \text{ –}$$

тогда

$$A_q^* = \frac{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} M}{\lim\limits_{\gamma_1\to 0} N}\tilde{A}_q^*.$$

Поскольку предел функции M и N при $\gamma_1\to 0$ равен нулю, используем правило Лопиталя и рассматриваем предел первых производных функций

$$\lim_{\gamma_1\to 0} M' = \lim_{\gamma_1\to 0}\left(-1+\rho_q\gamma T e^{-\rho_q\gamma_1 T}+e^{-\rho_q\gamma T}\right) = $$
$$=\rho_q\gamma T + e^{-\rho_q\gamma T} - 1;$$

$$\lim_{\gamma_1\to 0} N' = \rho_q^2\gamma T - 2\gamma_1\rho_q^2 T = \rho_q^2\gamma T.$$

Таким образом:

$$A_q^* = \left[\frac{T\rho_q\gamma + e^{-\rho_q\gamma T}-1}{\gamma T\rho_q^2}\right]\tilde{A}_q^*,$$

что и требовалось доказать.

Если $\gamma\to\gamma_1$, то на выходе АИМ формируется последовательность модулированных по амплитуде треугольных импульсов с вертикальным срезом

$$A_q^* = \lim_{\gamma\to \gamma_1} A_{q\ \text{несимметр}}^* =$$
$$=\lim_{\gamma\to \gamma_1}\left[\frac{\gamma-\gamma_1-\gamma e^{-\rho_q\gamma_1 T}-\gamma_1 e^{-\rho_q\gamma T}}{\gamma_1(\gamma-\gamma_1)T\rho_q^2}\right]\tilde{A}_q^*,$$

либо, используя принятые выше обозначения:

$$A_q^* = \frac{\lim\limits_{\gamma\to \gamma_1} M}{\lim\limits_{\gamma\to \gamma_1} N}\tilde{A}_q^*.$$

Предел функции M и N при $\gamma \to \gamma_1$ равен нулю, следовательно, рассматриваем

$$\lim_{\gamma\to\gamma_1} M' = \lim_{\gamma\to\gamma_1}\left(1 - e^{-\rho_q\gamma_1 T} - \rho_q\gamma_1 T e^{-\rho_q\gamma T}\right) = $$
$$= 1 - e^{-\rho_q\gamma_1 T} - \rho_q\gamma_1 T e^{-\rho_q\gamma_1 T};$$

$$\lim_{\gamma\to\gamma_1} N' = \rho_q^2\gamma_1 T.$$

Таким образом:

$$A_q^* = \frac{1 - e^{-\rho_q\gamma_1 T} - \rho_q\gamma_1 T e^{-\rho_q\gamma_1 T}}{\gamma_1 T\rho_q^2}\tilde{A}_q^*,$$

что и требовалось доказать.

Заключение

Предлагаемые математические модели АИМ позволяют более полно и всесторонне исследовать динамические свойства импульсных САУ и учитывать их при решении задачи синтеза параметров регулятора обобщенным методом Галеркина. Решение практических задач показывает, что введение параметров модулятора в число варьируемых дает возможность, при прочих равных условиях, осуществлять синтез регулятора более простой структуры.

Литература

1. **Джури Э.** Импульсные системы автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1963. 445 с.
2. **Шишлаков В. Ф.** Синтез нелинейных САУ с различными видами модуляции: Монография / СПбГУАП. СПб., 1999. 268 с.
3. **Никитин А. В., Шишлаков В. Ф.** Параметрический синтез нелинейных систем автоматического управления: Монография / СПбГУАП. СПб., 2003. 355 с.
4. **Ту Ю. Т.** Цифровые и импульсные системы автоматического управления. М.: Машиностроение, 1964. 704 с.
5. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.