УДК 621.396.69

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ИЗМЕРЕНИЯ ДВУХ НЕЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ С РАЗЛИЧНОЙ ТОЧНОСТЬЮ

В. С. Павлов,
канд. техн. наук
М. В. Савинов,
ассистент
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Рассматривается двумерная статистическая задача совместного измерения двух произвольных неэнергетических параметров информативного процесса с различной точностью. Показано, что оптимальное совместное измерение обеспечивается при гармоническом информативном процессе, спектр которого может содержать произвольное число δ-функций, но не менее трех, расположенных по окату эллипса в определенной закономерности. При этом точности совместного измерения определяются только параметрами эллипса и не зависят от числа δ-функций.

The bidimentional joint measurement statistical task of two any non-power parameters of informative process with various accuracy is considered. It is shown, that optimum joint measurement is provided by harmonious informative process which spectrum can contain various number of δ-functions, but not less than three, located on an ellipse in certain law. Thus accuracy of joint measurement is defined only by the parameters of an ellipse, and do not depend on the number of δ-of functions.

Вопросы оптимального измерения неизвестных параметров случайных полей, содержащих как информативные, так и мешающие составляющие, актуальны в различных практических областях: телеметрии, навигации, радиолокации, гидролокации и др., – где задачи измерения при наличии случайных мешающих факторов являются определяющими для построения систем. В частности, важной научно-практической задачей является теоретическое обоснование оптимальности измерителей угловых координат со структурой, отличающейся от распространенной, что дает возможность увеличить число вариантов их построения и, следовательно, число параметров, позволяющих их оптимизировать.

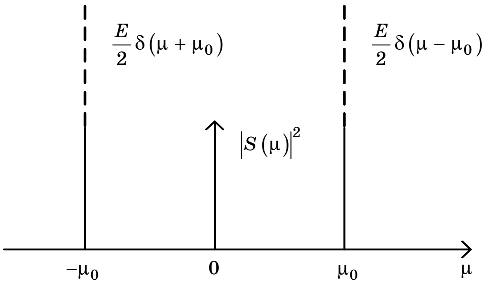
При совместном измерении двух произвольных неэнергетических параметров $\{\nu_1, \nu_2\}$ предметом исследования является информативный процесс $s(\nu_1, \nu_2)$, содержащий эти параметры, имеющий спектральную плотность $S(\mu_1, \mu_2)$, где μ_1 и μ_2 – обобщенные частоты, характеризующие скорость изменения параметров ν_1 и ν_2 [1, 2]. Известно, что потенциальная точность при совместном измерении двух неэнергетических параметров описывается минимальными дисперсиями

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2q^2\left(1-\eta_{12}^2\right)\left(2\pi\mu_{e1}\right)^2};$$

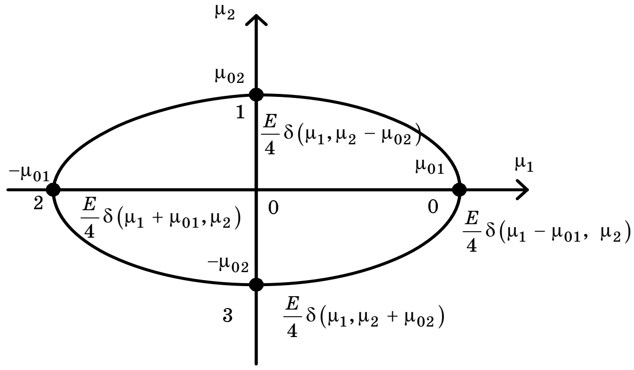
$$\sigma_2^2 = \frac{1}{2q^2\left(1-\eta_{12}^2\right)\left(2\pi\mu_{e2}\right)^2}, \qquad (1)$$

где q^2 – отношение сигнал/шум по мощности; η_{12} – нормированный коэффициент взаимной корреляции параметров ν_1 и ν_2 [1, 2]; μ_{e1} и μ_{e2} – частоты эквивалентных гармонических процессов, к которым, согласно работам [1, 2], можно привести процесс $s(\nu_1, \nu_2)$ произвольного вида. Величины μ_{e1}^2 и μ_{e2}^2 отражают островершинность корреляционной функции процесса $s(\nu_1, \nu_2)$ по координатам ν_1 и ν_2 и определяются ее вторыми производными при $\nu_1, \nu_2 = 0$. Из (1) следует, что уменьшение дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 возможно за счет увеличения как энергетической q, так и метрических μ_{e1}, μ_{e2} характеристик измерительной системы, а наличие взаимной корреляции измеряемых параметров, учитываемой сомножителем $(1-\eta_{12}^2)$ в знаменателе (1), ухудшает точность измерений.

В работах [1, 2] показано, что в одномерном случае требованию наибольшей потенциальной точности измерения отвечает гармонический информатив-



■ *Рис. 1. Оптимальный по точности обобщенный энергетический спектр в случае одиночного измеряемого параметра*



■ *Рис. 2. Четырехотсчетный энергетический спектр информативного процесса при различных требованиях к потенциальной точности измерения параметров ν_1 и ν_2*

ный процесс, энергетический спектр $|S(\mu)|^2$ которого состоит из двух δ-функций с координатами $-\mu_0$ и μ_0 (рис. 1), площадь каждой из которых равна половине энергии информативного процесса $E/2$. Исходя из этого оптимальный по точности энергетический спектр $|S(\mu)|^2$ в случае измерения двух параметров $\{\nu_1, \nu_2\}$ может быть представлен в виде четырех δ-функций объемом $E/4$, расположенных по осям обобщенных частот μ_1 и μ_2 со смещением μ_0. Нетрудно предположить, что геометрическим местом всех возможных положений спектра $|S(\mu_1,\ \mu_2)|^2$, состоящего из четырех δ-функций на плоскости $\langle\mu_1,\ \mu_2\rangle$, будет окружность, поскольку поворот системы координат на произвольный угол в данном случае не нарушает гармонический характер процесса $s\{\nu_1, \nu_2\}$.

Перейдем к более общему случаю, когда требуются различные потенциальные точности измерения, т. е. один из параметров является приоритетным. При этом множество возможных координат четырех δ-функций, составляющих спектр $|S(\mu_1,\ \mu_2)|^2$, в плоскости $\langle\mu_1,\ \mu_2\rangle$ можно рассматривать в виде эллипса, так как изменение масштаба по одной из осей обобщенных частот соответствует либо сжатию, либо растяжению окружности (рис. 2). Подобный прием часто используется в различных задачах, например при исследовании фазированных антенных решеток [3], когда расположение элементов по кольцу является только частным случаем. Эллипс в плоскости $\langle\mu_1,\ \mu_2\rangle$ можно задать каноническим уравнением $\mu_1^2/\mu_{01}^2+\mu_2^2/\mu_{02}^2=1$ [4], описывающим сжатую в ρ^{-1} раз по оси $\overrightarrow{0\mu_2}$ окружность радиуса $\mu_0=\mu_{01}$, где $\rho=\mu_{02}/\mu_{01}$ – коэффициент сжатия ($\rho\le 1$).

При расположении составляющих двумерного энергетического спектра $|S(\mu_1,\ \mu_2)|^2$ по окату эллипса в плоскости $\langle\mu_1,\mu_2\rangle$ (см. рис. 2) вполне правомерно поставить вопрос о возможном числе данных составляющих, при котором обеспечиваются оптимальные условия измерения параметров ν_1 и ν_2. Из интуитивных соображений ясно, что совместное измерение двух параметров ν_1, ν_2 возможно и при любом другом числе таких составляющих энергетического спектра, в том числе и при трех.

Для разрешения данного вопроса рассмотрим совокупность из N элементов энергетического спектра, каждый из которых представлен двумерной δ-функцией с энергией E/N. В статье [5] на примере кольцевой N-элементной антенной решетки показано, что в случае равной потенциальной точности измерения параметров ν_1 и ν_2 элементы двумерного энергетического спектра являются равноотстоящими по окружности. Задавая их положение в полярных координатах $\langle\mu,\ \vartheta\rangle$ на плоскости обобщенных частот $\mu_1=\mu\cos\vartheta$ и $\mu_2=\mu\sin\vartheta$, запишем для координаты n-го элемента (отсчета) энергетического спектра: $\langle\mu_0,\ \gamma+2\pi n/N\rangle$, где μ_0 – радиус окружности; γ – произвольное угловое смещение совокупности отсчетов $(\gamma\in\ ]-\pi,\ \pi])$; $n=0,\ 1,\ \ldots,\ N-1$ – номер отсчета. При сжатии данной окружности в ρ^{-1} раз по оси $\overrightarrow{0\mu_2}$ и трансформации ее в эллипс каждый отсчет с номером n изменит свои координаты на новые $\langle\mu_n',\ \vartheta_n\rangle$, которые можно определить, исходя из геометрической интерпретации (рис. 3 – штрихами обозначены номера отсчетов, расположенных по окружности). При этом долгота ϑ_n n-го элемента спектра $|S(\mu_1,\ \mu_2)|^2$, расположенного на окате эллипса, определяется выражением

$$\vartheta_n=\mathrm{arctg}\left(\rho\,\mathrm{tg}\left(\gamma+\frac{2\pi}{N}n\right)\right). \quad (2)$$

Из (2) следует, что значению $\rho=1$ соответствуют координаты равноотстоящих отсчетов спектра

$\left|S(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2$, которые расположены по окружности радиуса μ_0. При этом $\vartheta_n = \gamma + 2\pi n/N$ и обеспечиваются условия равной потенциальной точности измерения параметров ν_1 и ν_2 [5]. Широту n-го отсчета μ_n' можно найти из уравнения эллипса в полярных координатах [4]

$$\mu_n' = \frac{\mu_{02}}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\gamma_n}} = \sqrt{\mu_{1n}^2+\mu_{2n}^2}, \quad (3)$$

где $\varepsilon = \sqrt{1-\rho^2}$ – эксцентриситет эллипса; $\mu_{1n} = \mu_n'\cos\gamma_n = \mu_{01}\cos(\gamma+2\pi n/N)$, $\mu_{2n} = \mu_n'\sin\gamma_n = \rho\mu_{01}\sin(\gamma+2\pi n/N)$ – декартовы координаты n-го отсчета по осям μ_1 и μ_2.

С учетом выражений (2) и (3) двумерный энергетический спектр $\left|S(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2$ представим в виде суммы частных двумерных энергетических спектров $\left|S_n(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2$:

$$\left|S(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\left|S_n(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2 =$$

$$= \frac{E}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\delta\left(\mu_1-\mu_{1n},\ \mu_2-\mu_{2n}\right). \quad (4)$$

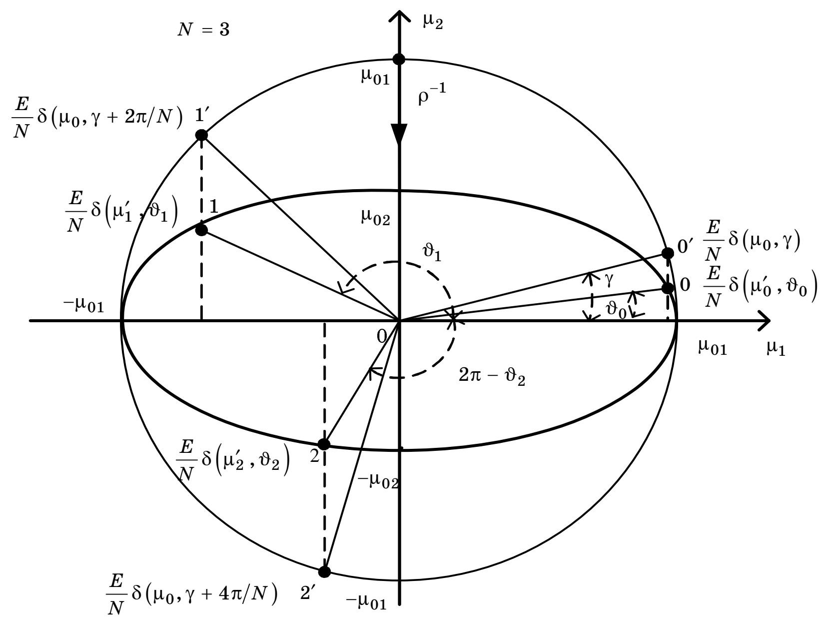
В силу линейности преобразования Фурье функция корреляции информативного процесса может быть представлена как сумма частных функций корреляции, каждая из которых определяется через двумерное обратное преобразование Фурье: $\Psi_n(\nu_1,\ \nu_2) = \mathbf{F}_2^{-1}\left\{\left|S_n(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2\right\}$, т. е.

$$\Psi_n(\nu_1,\ \nu_2) = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\mu_1-\mu_{1n},\ \mu_2-\mu_{2n}\right)\times$$

$$\times\exp\left(j2\pi(\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2)\right)d\mu_1 d\mu_2 =$$

$$= \frac{1}{N}\exp\left(j2\pi\left(\mu_{1n}\nu_1+\mu_{2n}\nu_2\right)\right). \quad (5)$$

Потенциальную точность измерения параметров ν_1 и ν_2 можно определить на основе функции корреляции $\Psi(\nu_1,\ \nu_2)$, равной сумме всех частных функций $\Psi_n(\nu_1, \nu_2)$, либо на основе квадрата ее модуля $\left|\Psi(\nu_1,\ \nu_2)\right|^2$, что предпочтительнее [2]. Представляя $\left|\Psi(\nu_1, \nu_2)\right|^2$ в виде произведения комплексно-сопряженных функций $\Psi(\nu_1,\nu_2)\Psi^*(\nu_1,\nu_2)$ и раскрывая сомножители с использованием (5), запишем



■ ***Рис. 3.*** *Преобразование полярных координат равноотстоящих частотных отсчетов, расположенных по окружности, к полярным координатам отсчетов, расположенных по окату эллипса*

$$\Psi(\nu_1,\ \nu_2)\Psi^*(\nu_1,\ \nu_2) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\Psi_n(\nu_1,\ \nu_2)\sum_{m=0}^{N-1}\Psi_m^*(\nu_1,\ \nu_2) =$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\exp\Big(j2\pi\Big(\nu_1\left(\mu_{1n}-\mu_{1m}\right)+$$

$$+\nu_2\left(\mu_{2n}-\mu_{2m}\right)\Big)\Big). \quad (6)$$

Оценка потенциальной точности измерения совокупности параметров $\{\nu_1,\ \nu_2\}$ требует определения информационной матрицы Фишера $\mathbf{A}$: $\left\{a_{ij} = \partial^2\left|\Psi(\nu_1,\ \nu_2)\right|^2\Big/\partial\nu_i\partial\nu_j;\ i,\ j\in(1,\ 2)\right\}$ [2]. Вычисляя вторые смешанные частные производные функции (6) по ν_1 и ν_2 при $\nu_1,\ \nu_2 = 0$, получим

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1}\begin{bmatrix}\left(\mu_{1n}-\mu_{1m}\right)^2 & \left(\mu_{1n}-\mu_{1m}\right)\left(\mu_{2n}-\mu_{2m}\right)\\ \left(\mu_{2n}-\mu_{1m}\right)\left(\mu_{2n}-\mu_{2m}\right) & \left(\mu_{2n}-\mu_{2m}\right)^2\end{bmatrix}_{\nu_1,\ \nu_2=0}. \quad (7)$$

После подстановки (2), (3) в выражение (7) и выполнения последовательности преобразований матрица (7) приобретает простой вид

$$\mathbf{A} = 2\pi^2 \begin{bmatrix} \mu_{01}^2 & 0 \\ 0 & \mu_{02}^2 \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

Выражение (8) показывает, что в случае рассматриваемого двумерного энергетического спектра отсутствует взаимная связь параметров ν_1 и ν_2, поскольку $a_{12} = a_{21} = 0$. Это, согласно (1), обеспечивает независимость и наибольшие потенциальные точности измерения каждого из параметров ν_1 и ν_2, которые с учетом (8) определяются минимальными дисперсиями:

$$\sigma_1^2 = (2\pi\mu_{01}q)^{-2};\ \sigma_2^2 = (2\pi\mu_{02}q)^{-2}. \qquad (9)$$

Отношение данных дисперсий $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = \mu_{02}^2/\mu_{01}^2 = \rho^2$ говорит о том, что различие точностей измерения пропорционально квадрату отношения обобщенных частот μ_{01} и μ_{02}, соответствующих координатам эллипса по осям μ_1 и μ_2. Сравнивая выражения (9) и (1), нетрудно увидеть, что $\mu_{e1} = \mu_{01}/\sqrt{2}$, $\mu_{e2} = \mu_{02}/\sqrt{2}$. Данное соотношение обусловливается разделением двумерного энергетического спектра $\left|S(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2$ на две равные части для обеспечения измерения каждого из параметров ν_1 и ν_2, что не учитывается в (1).

Наибольший интерес представляет независимость матрицы $\mathbf{A}$ от числа отсчетов N двумерного энергетического спектра. Это означает равную потенциальную точность измерения при любом $N \geq 3$. Полученный результат имеет важное практическое значение, поскольку показывает путь упрощения измерительной системы (например, при сокращении числа элементов спектра $\left|S(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2$ с четырех до трех) при соблюдении условия (2).

Из (2) следует, что зависимости координаты ϑ_n от смещения γ повторяются с периодом $2\pi/N$, а любая совокупность угловых положений отсчетов, соответствующая произвольному значению γ, также будет удовлетворять условию совместной максимальной точности измерения ввиду независимости матрицы $\mathbf{A}$ от γ. Если угловое положение отсчетов спектра $\left|S(\mu_1,\ \mu_2)\right|^2$ на эллипсе не соответствует (2), возникает корреляция между параметрами ν_1 и ν_2, т. е. $\eta_{12}^2 = a_{12}^2/a_{11}a_{22} > 0$, а точность совместного измерения снижается.

Выводы

1. Условие оптимального по точности совместного измерения двух неэнергетических параметров достигается при двумерном гармоническом информативном процессе, содержащем данные параметры. При равной потенциальной точности измерения по каждому из параметров энергетический спектр их информативного процесса может состоять из произвольного (большего трех) числа δ-функций, расположенных по окружности на равном расстоянии друг от друга.

2. При различии потенциальной точности измерения двух параметров область определения энергетического спектра их информативного процесса сжимается по оси обобщенной частоты параметра, измеряемого с меньшей точностью. В этом случае элементы оптимального энергетического спектра располагаются по окату эллипса согласно полученному в работе соотношению (2), а минимальные дисперсии измерения каждого из параметров зависят только от размеров этого эллипса.

3. Наиболее существенным является независимость потенциальной точности совместного измерения двух неэнергетических параметров от числа δ-функций (отсчетов), составляющих оптимальный энергетический спектр информативного процесса для данных параметров. В практическом плане это дает возможность варьировать числом таких отсчетов при постоянстве потенциальной точности измерения, а также, с целью упрощения измерительной системы, свести их число к минимальному, т. е. к трем.

Литература

1. Теоретические основы радиолокации / Под ред. В. Е. Дулевича. М.: Сов. радио, 1978. 607 с.
2. **Коростелев А. А.** Пространственно-временная теория радиосистем. М.: Радио и связь, 1987. 319 с.
3. Антенные решетки. Методы расчета и проектирования / Под ред. Л. С. Бененсона. М.: Сов. радио, 1966. 368 с.
4. **Натансон И. П.** Краткий курс высшей математики. М.; Л.: Физматгиз, 1963. 748 с.
5. **Павлов В. С.** Точностные характеристики многоотсчетных чувствительных элементов локационных систем измерения угловых координат // Изв. вузов. Сер. Приборостроение. 2003. Т. 46. № 1. С. 87–98.