УДК 681.516.7.015

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРАВИЛО ОСТАНОВКИ НАБЛЮДЕНИЙ – СПОСОБ ДОСТИЖЕНИЯ НАИВЫСШЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ

А. К. Розов,
доктор техн. наук
А. Н. Сырцев,
канд. техн. наук, преподаватель
Н. В. Кузина,
инженер-программист
Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова

Излагается процедура применения оптимального правила остановки наблюдений для достижения наивысшей вероятности обнаружения слабых сигналов.

We discuss an optimal rule of stopping the observations to reach the maximal probability of finding weak signals.

Введение

В работе [1] было показано, как аппарат стохастических дифференциальных уравнений может быть использован для составления алгоритмов систем самонаведения. Отмечалось, что его использование позволяет применять оптимальное правило остановки наблюдений для максимизации вероятности обнаружения сигнала и тем самым увеличить дальность действия систем в $1{,}5$ раза и более.

Вместе с тем для систем, использующих короткие зондирующие сигналы (порядка нескольких микросекунд), решение стохастических дифференциальных уравнений в реальном масштабе времени встречает трудности технического порядка, поскольку современные вычислительные средства еще не в состоянии обеспечить нужное быстродействие. Чтобы в таких условиях сохранить изложенные в статье [1] подходы, имеет смысл перейти к дискретному времени наблюдения.

Дискретное построение алгоритма позволяет также более наглядно интерпретировать основные положения теории оптимальных правил остановки, что немаловажно. Являясь основой для достижения наибольшей вероятности обнаружения, оптимальное правило остановки заслуживает того, чтобы подробнее остановиться на процедуре его использования.

Такому, своего рода, дополнению к статье [2] и посвящено дальнейшее изложение.

Оптимальное правило остановки – способ достижения наибольшего выигрыша

Теория оптимальных правил остановки наблюдений возникла как развитие статистического последовательного анализа А. Вальда.

В статистике случайных процессов значительный круг задач можно сформулировать в рамках следующей схемы. Задан частично наблюдаемый марковский процесс (Θ, η), $t \in T$, где Θ_t – его ненаблюдаемая, а η_t – наблюдаемая компонента. Требуется определить, как, последовательно наблюдая процесс η_t, наилучшим образом различить те или иные статистические гипотезы относительно значений Θ_t, оценить значения неизвестных параметров Θ_t.

Решением этих задач занимается статистический последовательный анализ, который можно определить как такой способ обработки текущих данных, в котором решения о значениях ненаблюдаемой компоненты выносятся не в фиксированный заранее момент времени, а по ходу наблюдений, с их прекращением в случайный момент времени ν.

Наиболее полно в статистическом последовательном анализе исследованы те случаи, когда время наблюдения дискретно, $T\{1, 2, \ldots\}$, ненаблюдаемый параметр λ_t не изменяется во времени, $\lambda_t = \lambda$. Именно к этому случаю относятся вальдовские задачи различения двух или нескольких гипотез о значениях неизвестного параметра λ.

Затем в работах ряда авторов подход А. Вальда был распространен для случаев, когда параметр сам является случайным процессом, например процессом, представляющим факт появления сигнала в случайный момент времени.

И если в задачах различения гипотез необходимость обращения к последовательным методам была не столь уж очевидной, то в приводимых дальше задачах обнаружения последовательный характер производимых наблюдений и проблема отыскания момента остановки обусловлены самим существом этих задач.

Эксцессивность выигрыша. В изменившихся условиях обстановка может быть представлена частично наблюдаемой последовательностью (Θ, η), в которой наблюдается лишь компонента η. Скрытый параметр Θ изменяется во времени случайным образом. Он характеризует момент изменения вероятностных характеристик наблюдаемого процесса (изменение плотности f_0 на f_1).

Все, что нам известно относительно скрытых данных о $\Theta_1^n = (\Theta_1, ..., \Theta_n)$, заключено в распределении вероятностей $\pi_n = \pi(\Theta_1, ..., \Theta_n)$, подсчитываемых в предположении известных $\eta_1^n = (\eta_1, ..., \eta_n)$,т. е. как вероятность $P(\Theta_1^n \eta_1^n)$. Поэтому вся информация о частично наблюдаемой последовательности (Θ, η) полностью описывается парой $\sigma_n = (\pi_n, \eta_1^n)$.

При каждом n заданы функции $g\left(\Theta_1^n,\ \eta_1^n\right)$, интерпретируемые как выигрыши, полученные в состоянии $\left(\Theta_1^n,\ \eta_1^n\right)$, если наблюдения прекращаются в момент времени n. Поскольку Θ_1^n для наблюдателя неизвестно, он знает не истинный выигрыш $g\left(\Theta_1^n,\ \eta_1^n\right)$, а лишь его среднее значение

$$g\left(\sigma_n\right) = \sum_{\Theta_1^n} g\left(\Theta_1^n, \eta_1^n\right) \pi_n .$$

Оптимальное правило остановки наблюдений предполагает нахождение такой процедуры, при которой достигался максимум функционала

$$U_1^N\left(\sigma_1\right) = \sup_{\nu\in K_n} T^{\nu} g\left(\sigma_1\right) = \sup_{\nu\in K_N} M\left[g\left(\sigma_\nu\right)\middle|\sigma_1\right],$$

когда начальное состояние есть σ_1.

Для ее определения вводится выигрыш

$$U_n^N\left(\sigma_n\right) = \sup_{\nu\in K_{N-n}} T^{\nu} g\left(\sigma_n\right),$$

который можно трактовать как наибольший выигрыш, который мы получим, если наблюдения заведомо совершаются до момента времени n и могут прекращаться в любой из моментов n, $n + 1$, ..., N.

Для нахождения оптимального правила остановки надо определить динамику изменения выигрыша $U_n^N\left(\sigma_1^n\right)$, $n = 1,\ \dots,\ N$. Нахождение последнего возможно благодаря тому, что он может рассматриваться как эксцессивная функция, т. е. функция, удовлетворяющая условию

$$f\left(x\right) \geq Tf\left(x\right),$$

$$Tf\left(x\right) = M_x f\left(x\right),$$

более того – как наименьшая эксцессивная мажоранта функции $g(x)$, т. е. наименьшая из функций $f(x)$, удовлетворяющая условию

$$f\left(x\right) \geq g\left(x\right).$$

Иногда вместо эксцессивности используется возможность представления выигрыша процессом типа супермартингал.

Оказывается, и в этом смысл введения эксцессивности функции $f(x)$, что сам минимизируемый функционал $U_1^N\left(\sigma_1\right)$ является наименьшей эксцессивной мажорантой функции $g\left(\sigma_\nu \middle| \sigma_1\right)$.

С точки зрения традиционных исследований в последовательном анализе, динамическом программировании, теории игр, «эксцессивная» характеризация функционала выигрыша важна потому, что из нее сразу следует рекуррентное уравнение

$$U_n^N\left(\sigma_1^n\right) = \max\left\{g\left(\sigma_1^n\right), TU_{n+1}^N\left(\sigma_1^n\right)\right\}. \qquad (1)$$

Решение рекуррентного уравнения для $U_n^N\left(\sigma_n\right)$ возможно методом индукции назад – методом Белмана. В соответствии с этим методом для момента $n = N$ получаемый выигрыш приравнивается к значению $g(\sigma_N)$. В момент времени $N-1$ мы можем или прекратить наблюдения и получить тогда выигрыш $g(\sigma_{N-1})$, или же сделать еще одно наблюдение и тогда получить выигрыш, в среднем равный $M\left[g\left(\sigma_N\right)\middle|\sigma_{N-1}\right]$. Аналогичным образом надо поступать на интервале $[N-2,\ N]$. Здесь выигрыш $g(\sigma_{N-2})$ сравнивается с суммарным выигрышем от остановки в моменты $N-1$ и N. В результате могут быть заранее определены значения $U_n^N\left(\sigma_1^n\right)$, с которыми последовательно должны сравниваться выигрыши $g(\sigma_n)$.

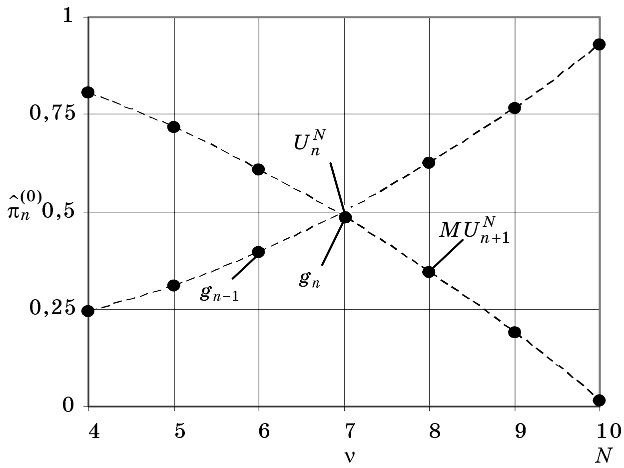
Здесь наиболее отчетливо видно, что выигрыш от продолжения наблюдений должен подсчитываться не только с учетом эволюции значений η_1^n на $n + 1$, ..., N, но также с учетом ожидаемых решений после момента n – на $[n + 1,\ N]$.

Принятие решения о прекращении наблюдений происходит в момент ν, когда $g(\sigma_n)$ сравняется с $U_n^N\left(\sigma_n\right)$ (рис. 1):

$$\nu = \min\left\{n : g\left(\sigma_n\right) = U_n^N\left(\sigma_n\right)\right\}. \qquad (2)$$

Предыдущее изложение относилось к варианту дискретного времени. В случае непрерывного времени функционал выигрыша $U_t^T\left(\sigma_n\right)$ (потерь) также допускает эксцессивную или регулярную характеризацию. Однако установление этих фактов и определение процедуры нахождения оптимальных моментов остановки требует привлечения довольно тонких результатов из теории марковских процессов и теории мартингалов.

Подобным образом можно поступать и в случае функционала, минимизирующего потери. Это за-



■ *Рис. 1. Выигрыши и их математические ожидания*

дачи классификации и оценивания сигнала, когда потери состоят из среднего времени наблюдения и вероятности ошибочных решений.

Обнаружение сигнала, появляющегося в случайный момент времени

Будем предполагать, что воздействие сигнала задается процессом

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n < \Theta \\ \Theta_n, & n = \Theta, \\ 0, & n > \Theta \end{cases}$$

где Θ – момент воздействия сигнала; Θ_n – сигнал известной или случайной величины.

Наблюдаемый процесс представляется в виде

$$\eta_t = \chi_n + x_n,$$

где x_n – помеха, имеющая нормальное распределение $x_n \sim N(0,\, 1)$.

В частном случае такая модель может точно соответствовать реальной обстановке. Имеется в виду случай, когда сигнал может появиться в одном из подынтервалов $[0,\, h]$, $[0,\, 2h]$, ... Тогда для каждого подынтервала могут быть образованы интегралы

$$\Theta_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Theta_s ds, \quad x_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} dw_s,$$

соответствующие воздействию сигнала и помех (w_s – вилеровский процесс). Тем самым случайные величины χ_n и η_n приобретают вполне реальный смысл и без каких-либо приближений представляют реальную обстановку с квантованным во времени сигналом и помехой.

Необходимо в результате последовательного наблюдения за η_i, $i = 1, \ldots, n$, обнаружить появление сигнала, т. е. подать тревогу, когда он появится. В этом случае будет своевременное обнаружение.

Это случай, когда момент остановки должен совпадать с моментом появления сигнала, т. е. когда выигрыш $g(\sigma_n)$ представляется как

$$g(\sigma_n) = W(\nu,\, \Theta) P\left(\Theta \middle| \eta_1^n\right),$$

где функция выигрыша $W(\nu, \Theta)$ имеет вид

$$W(\nu,\, \Theta) = \begin{cases} 0, & \nu < \Theta \\ 1, & \nu \in [\Theta, \Theta + m]. \\ 0, & \nu > \Theta \end{cases}$$

Вид выигрыша (наличие апостериорной вероятности $P\left(\Theta \middle| \eta_1^n\right)$) определяет байесовский характер процедуры обнаружения – использование апостериорных вероятностей в качестве «рабочих» статистик. Это означает, что, согласно выражению (2), такая (или такие) статистика должна сравниваться с границей областей принятия решений и по достижении ею границ наблюдения должны прекращаться и приниматься решения об обнаружении сигнала.

Желательно, чтобы рабочие статистики были достаточными, но определение их в таком виде осложняется немарковостью процесса χ_n, представляющего воздействие сигнала. Интуитивно понятно, что одной из основных статистик должна быть апостериорная вероятность $\pi_n^{(0)} = P\left(\Theta \middle| \eta_1^n\right)$. В информационном смысле желательно большее их число, например $\pi_n^{(0)}$ и $\pi_n = P\left(\Theta \le n \middle| \eta_1^n\right)$.

Остановимся на характеристике использования этих двух вариантов.

Байесовское правило. Использование одной статистики $\pi_n^{(0)}$, когда $m = 0$, позволяет определить границу областей принятия решений. Последняя определяется методом индукции назад, основанном на рекуррентном соотношении (1), в котором $MU_{n+1}^N\left(\sigma_1^n\right)$ рассматривается как максимальный выигрыш от продолжения наблюдений. Максимальный, поскольку в его вычислении участвуют ранее определенные границы $\hat{\pi}_N^{(0)}, \ldots, \hat{\pi}_{n+1}^{(0)}$. Этот выигрыш приравнивается к $U_n^N(\sigma_n)$, который в соответствии с формулой (2) выступает как граница $\hat{\pi}_n^{(0)}$.

Итак, нахождение границы $\hat{\pi}_n^{(0)}$ сводится к ее приравниванию к математическому ожиданию выигрыша от обнаружения сигнала на интервале $[n + 1,\, N]$. Последний вычисляется как взвешенная сумма отношений числа своевременных обнаружений к числу разыгрываемых реализаций $\pi_n^{(0)}$, $n = 1, \ldots, N$, с весами, определяемыми априорными вероятностями появления сигнала в соответствующие моменты времени.

Видим, что процедура хотя и громоздка, но проста в своей основе. Она становится совсем простой в случае довольно сильных сигналов, когда «апостериорный» характер подсчета числа своевременных обнаружений на интервале $[n+1, N]$ может быть заменен суммированием расположенных справа вероятностей $P(n+1), \ldots, P(n)$.

Полученная таким образом граница является оптимальной, т. е. гарантирующей получение наивысшей вероятности своевременного обнаружения сигнала с использованием статистики $\pi_n^{(0)}$, $n = 1, \ldots, N$.

Если допустить возможность небольшого (на m шагов) запаздывания в обнаружении сигнала и использовать для этого апостериорную вероятность $\pi_n^{(m)} = P\left(\Theta \in [n-m, n] \middle| \eta_1^n\right)$, то вероятность обнаружения сигнала может быть увеличена. При нахождении границ $\widehat{\pi}_n^{(m)}$ в этом случае вместо числа своевременных обнаружений участвует число своевременных и запоздавших обнаружений.

Так, определенные границы будут зависеть как от величины сигнала, так и от априорного распределителя момента его появления.

Модифицированное байесовское правило. Как уже отмечалось, статистика может состоять из нескольких апостериорных вероятностей, в частности из $\pi_n^{(-)}$ и $\pi_n^{(0)}$, что обещает получение большей вероятности своевременного обнаружения сигнала. Но здесь возникают сложности в нахождении границы.

Приходится отказаться от учета границ на интервале $[n+1, N]$ и заменить эволюцию математического ожидания $MU_{n+1}^N(\sigma_n)$ на апостериорную вероятность появления сигнала в будущем – $\pi_m^{(+)} = P\left(\Theta > n \middle| \eta_1^n\right)$. При этом, конечно, теряется информация о характере обнаружения сигнала за моментом n.

Тогда граница в момент n могла бы быть равной $\widehat{\pi}_n^{(0)} = \pi_n^{(+)}$. Это неудобно, поскольку в этом случае она бы зависела от реализации η_1^n. Такой зависимости можно избежать, если воспользоваться соотношением

$$\pi_n^{(+)} = 1 - \pi_n^{(-)} - \pi_n^{(0)}$$

и ввести новую статистику

$$\Omega_n = \pi_n^{(-)} + 2\pi_n^{(0)}$$

с границей $\widehat{\Omega}_n = \widehat{\Omega} = 1$.

Моделирование процедуры обнаружения показало, что в действительности $\widehat{\Omega}_n$ несколько меньше единицы (в пределах от 0,95 до 1,0) и практически не критична к величине сигнала и априорному распределению момента его появления.

Пример. Воздействие сигнала величины r задается процессом

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n < \Theta \\ r, & n = \Theta, \\ 0, & n > \Theta \end{cases}$$

где Θ – момент воздействия сигнала.

Наблюдается величина

$$\eta_t = \chi_n + \sqrt{c_2}\, x_n, \quad x_n \sim N(0, 1).$$

Решение о поступлении сигнала принимается по достижению статистиками $\pi_n^{(0)}$ и $\Omega_n = \pi_n^{(0)} + 2\pi_n^{(0)}$ «своих» границ.

Рекуррентные соотношения[1]:

$$\pi_{n+1}^{(-)} = \frac{P(\Theta > n)\left(\pi_n^{(-)} + \pi_n^{(0)}\right)}{[*]}, \quad \pi_{n+1}^{(0)} = \frac{P_{n+1}\pi_n^{(+)}\varphi_{n+1}}{[*]},$$

$$\pi_{n+1}^{(+)} = \frac{P(\Theta > n+1)\pi_n^{(+)}}{[*]},$$

$$[*] = P_{n+1}\pi_n^{(+)}\left(\varphi_{n+1} - 1\right) + P(\Theta > n).$$

Начальные условия:

$$\pi_1^{(-)} = 0, \ \pi_1^{(0)} = \frac{P_1\varphi_1}{p_1(\varphi_1 - 1) + 1}, \ \pi_1^{(+)} = \frac{P(\Theta > 1)}{P_1(\varphi_1 - 1) + 1}.$$

Формулы для φ_n и ψ_n:

$$\varphi_n = e^{\frac{1}{c_2} r\, \eta_n - \frac{1}{2c_2} r^2},$$

$$\psi_n = \frac{1}{c_2} r\, \eta_n - \frac{1}{2c_2} r^2.$$

Значения P_n (табл. 1); $P(\Theta > n)$, $P(\Theta > n+1)$:

$$P(\Theta > n) = P_{n+1} + P_{n+2} + \ldots + P_{10};$$

$$P(\Theta > n+1) = P_{n+2} + P_{n+3} + \ldots + P_{10}.$$

Байесовский вариант. Значения границы, рассчитанные методом индукции назад, – табл. 2.

Моделирование проводилось при $r = 1$, $c_2 = 1$ с, $N = 10$. Вероятность ложной тревоги оказалась равной $P_{\text{л.т}} = 0{,}192$, а вероятность своевременного обнаружения $P_{\text{св.обн}} = 0{,}613$.

Если допустить запаздывание в обнаружении сигнала на величину $m = 1$ и использовать для этой цели апостериорную вероятность $\pi_n^{(m)}$, определяемую соотношением

$$\pi_n^{(1)} = \left(1 - \pi_n\right)\left[\varphi_{n-1}\frac{P_{n-1}}{P(\Theta > n-1)} + \varphi_n \frac{P_n}{P(\Theta > n)}\right],$$

то граница $\widehat{\pi}_n^{(1)}$, определенная методом индукции назад, – табл. 3, а вероятность ложной тревоги $P_{\text{л.т}} = 0{,}2002$, при этом вероятность обнаружения сигнала с возможным запаздыванием увеличится до $P_{\text{обн}} = 0{,}762$.

Модифицированный байесовский вариант. В этом случае в качестве статистики принималась величина $\Omega_n = \pi_n^{(-)} + 2\pi_n^{(0)}$. Результаты моделирования – зависимость $P_{\text{св.обн}}$ от значений постоян-

[1] См. приложение.

■ *Таблица 1*

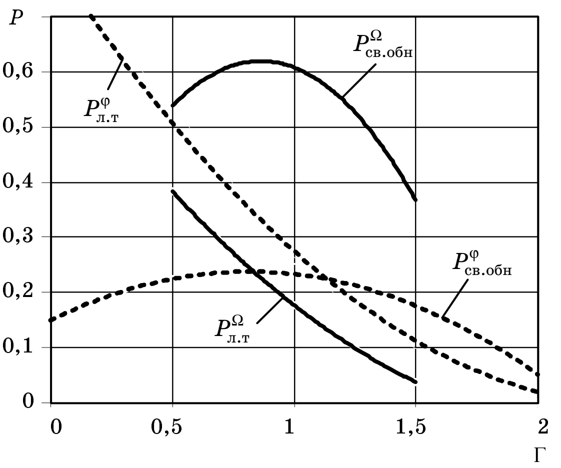
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	0,001	0,004	0,01	0,035	0,45	0,45	0,035	0,01	0,004	0,001

■ *Таблица 2*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\pi}_n$	0,615	0,615	0,615	0,615	0,450	0,035	0,010	0,004	0,001	0

■ *Таблица 3*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\pi}_n^{(1)}$	0,764	0,764	0,761	0,746	0,450	0,035	0,010	0,004	0,001	0



■ *Рис. 2. Вероятности обнаружения сигнала*

ных границ при использовании статистик Ω_n и $\psi_n = \ln\varphi_n$ представлена на рис. 2.

Видим, что предложенный метод обнаружения по сравнению с традиционным, использующим в качестве статистики отношение правдоподобия, увеличивает вероятность обнаружения сигнала с $P^{\psi}_{\text{св.обн}} = 0{,}23$ до $P^{\Omega}_{\text{св.обн}} = 0{,}62$ в случае модифицированного байесовского правила и до $P^{(1)}_{\text{обн}} = 0{,}76$ в случае байесовского правила. И хотя приведенное сопоставление относится к примеру с малым числом наблюдений (N), к сигналу постоянной величины r и т. д., оно все же значимо, поскольку относится к случаю, когда имеет место неопределенность в моменте появления сигнала – главное, чем отличается рассмотренная задача.

Полученные результаты свидетельствуют о практической значимости оптимальных правил остановки наблюдений для получения наибольшей вероятности обнаружения слабых сигналов и увеличения в связи с этим дальности действия систем обнаружения.

Приложение

Рекуррентные соотношения. Исходным моментом в составлении рекуррентных соотношений является формула Байеса. В соответствии с этой формулой статистика π_{n+1} может быть представлена в виде

$$\pi_{n+1} = P\left(\Theta \le n+1 \middle| \eta_1^{n+1}\right) =$$

$$= P\left(\Theta \le n \middle| \eta_1^{n+1}\right) + P\left(n+1 \middle| \eta_1^{n+1}\right) =$$

$$= P\left(\Theta \le n \middle| \eta_1^{n}, \eta_{n+1}\right) + P\left(n+1 \middle| \eta_1^{n}, \eta_{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{f\left(\eta_{n+1} \middle| \eta_1^n\right)} \Big[P\left(\Theta \le n \middle| \eta_1^n, \eta_{n+1}\right) f\left(\eta_{n+1} \middle| \eta_1^n\right) +$$

$$+ P\left(n+1 \middle| \eta_1^n, \eta_{n+1}\right) f\left(\eta_{n+1} \middle| \eta_1^n\right) \Big] =$$

$$= \frac{1}{f\left(\eta_{n+1} \middle| \eta_1^n\right)} \Big[P\left(\Theta \le n \middle| \eta_1^n\right) f\left(\eta_{n+1} \middle| \ \Theta \le n, \eta_1^n\right) +$$

$$+ P\left(n+1 \middle| \eta_1^n\right) f\left(\eta_{n+1} \middle| n+1, \eta_1^n\right) \Big].$$

Поскольку при зафиксированной реализации η_1^n событие, состоящее в наступлении случайной величины η_{n+1}, может сочетаться с одним из событий: $\Theta \le n$, $\Theta > n+1$ или $\Theta > n+1$, – составляющих полную группу событий, плотность распределения $f\left(\eta_{n+1}\middle|\eta_1^n\right)$ можем представить в виде

$$f\left(\eta_{n+1}\middle|\eta_1^n\right)=P\left(\Theta\le n\middle|\eta_1^n\right)f\left(\eta_{n+1}\middle|\Theta\le n,\eta_1^n\right)+$$

$$+P\left(n+1\middle|\eta_1^n\right)f\left(\eta_{n+1}\middle|n+1,\eta_1^n\right)+$$

$$+P\left(\Theta>n+1\middle|\eta_1^n\right)f\left(\eta_{n+1}\middle|\Theta>n+1,\eta_1^n\right).$$

Тогда

$$\pi_{n+1}=\frac{A(n,\ n+1)+B(n,\ n+1)}{A(n,\ n+1)+B(n,\ n+1)+C(n,\ n+1)},\qquad(3)$$

где

$$A(n,\ n+1)=P\left(\Theta\le n\middle|\eta_1^n\right)f_0(\eta_{n+1}),$$

$$B(n,\ n+1)=P\left(n+1\middle|\eta_1^n\right)f_0(\eta_{n+1}),$$

$$C(n,\ n+1)=P\left(\Theta>n+1\middle|\eta_1^n\right)f_0(\eta_{n+1}),$$

причем индексы 0 и 1 означают соответственно отсутствие и наличие сигнала в момент $n + 1$.

Необходимые для составления равенства (3) значения $A(n, n + 1)$, $B(n, n + 1)$ и $C(n, n + 1)$ могут быть получены с помощью апостериорных вероятностей наличия сигнала в разные моменты времени. Последние могут быть представлены в виде

$$P\left(\Theta\middle|\eta_1^n\right)=\frac{dP\left(\eta_1^n|\Theta\right)P(\Theta)}{dP\left(\eta_1^n\right)}\cdot\frac{P\left(\Theta>n\middle|\eta_1^n\right)}{P\left(\Theta>n\middle|\eta_1^n\right)}=$$

$$=\frac{dP\left(\eta_1^n|\Theta\right)}{d\left(\eta_1^n|\Theta>n\right)}\cdot(1-\pi_n)\frac{P(\Theta)}{P(\Theta>n)}=$$

$$=\begin{cases}\varphi_\Theta\dfrac{1-\pi_n}{P(\Theta>n)}P(\Theta), & \Theta\le n,\\ \dfrac{1-\pi_n}{P(\Theta>n)}P(\Theta), & \Theta>n,\end{cases}\qquad(4)$$

где $\pi_n=P\left(\Theta\le n\middle|\eta_1^n\right)$, а $\varphi_n=\dfrac{dP\left(\eta_1^n|\Theta\right)}{dP\left(\eta_1^n|\Theta>n\right)}$ – отношение правдоподобия.

Поэтому входящие в рекуррентное соотношение (3) вероятности могут быть определены следующим образом:

$$P\left(n+1\middle|\eta_1^n\right)=\frac{P(n+1)}{P(\Theta>n)}(1-\pi_n);$$

$$P\left(\Theta>n+1\middle|\eta_1^n\right)=1-P\left(\Theta\le n\middle|\eta_1^n\right)-P\left(n+1\middle|\eta_1^n\right).$$

Обозначив теперь через φ_{n+1} отношение $\dfrac{f_1(\eta_{n+1})}{f_0(\eta_{n+1})}$, получим рекуррентное соотношение для π_n в виде

$$\pi_{n+1}=\frac{P(n+1)(1-\pi_n)\varphi_{n+1}+P(\Theta>n)\pi_n}{P(n+1)(1-\pi_n)(\varphi_{n+1}-1)+P(\Theta>n)}.$$

Нетрудно видеть, что статистика π_n является неубывающей функцией времени.

Аналогично можно показать, что для $\pi_n^{(-)}=P\left(\Theta<n\middle|\eta_1^n\right)$, $\pi_n^{(0)}=P\left(\Theta=n\middle|\eta_1^n\right)$ и $\pi_n^{(+)}=P\left(\Theta>n\middle|\eta_1^n\right)$ справедливы рекуррентные соотношения

$$\pi_{n+1}^{(-)}=\frac{P(n)\varphi_n+P(\Theta>n)\pi_n^{(-)}}{P(n+1)\left(1-\pi_n^{(-)}\right)+P(\Theta>n)+P(n)\varphi_n};$$

$$\pi_{n+1}^{(0)}=\frac{\pi_n^{(0)}\varphi_{n+1}P(n+1)}{\pi_n^{(0)}(\varphi_{n+1}-1)P(n+1)+\varphi_nP(n)};$$

$$\pi_{n+1}^{(+)}=\frac{\left[P(\Theta>n)-P(n+1)\right]\pi_n^{(+)}}{P(n+1)\pi_n^{(+)}(\varphi_{n+1}-1)+P(\Theta>n)}.$$

С помощью уравнения (4) может быть определено и соотношение для вычисления вероятности $\pi_n^{(m)}$ наличия сигнала в текущий момент времени n или в одном из моментов $n-1$, ..., $n-m$. Поскольку наступление сигнала в эти моменты времени есть событие несовместное, то

$$\pi_n^{(m)}=P\left(\Theta\in[n-m,\ n]\middle|\eta_1^n\right)=$$

$$=(1-\pi_n)\sum_{i=0}^{m}\varphi_{n-1}\frac{P_{n-i}}{P(\Theta>n-i)},$$

и в случае $m = 1$, приведенном в примере:

$$\pi_n^{(1)}=(1-\pi_n)\left[\varphi_{n-1}\frac{P_{n-1}}{P(\Theta>n-1)}+\varphi_n\frac{P_n}{P(\Theta>n)}\right].$$

Литература

1. **Роббинс Г., Сигмунд Д., Чао И.** Теория оптимальных правил остановки: Пер. с англ. М.: Наука, 1975. 188 с.
2. **Розов А. К., Лось А. П., Зелялютдинов А. Р.** Новые возможности в обнаружении движущихся объектов // Информационно-управляющие системы. 2004. № 4(11). С. 16–20.
3. **Ширяев А. Н.** Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976. 272 с.