УДК 519.81

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО АЛЬТЕРНАТИВНОГО ВЫБОРА НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В. Г. Чернов,
канд. техн. наук, профессор
Владимирский государственный университет

Рассматриваются ограничения, которые имеют место при решении задач многокритериального выбора альтернатив на основе правил нечеткого условного вывода, когда для свертки условий критериального соответствия используется операция min. Предлагается новый метод решения задач многокритериального выбора альтернатив, основанный на операции геометрической проекции нечетких множеств.

In the article the author examines the limitations, that take place in the process of decision of multicriterial choice of alternative on the base of fuzzy conditional conclusion rules when min-operation procedure is used for convolutation of the conditions of criterial accordance. The new method of decision of the problem of multicriterial alternative choice based on operation of geometrical projection of fuzzy sets is supposed.

Известен метод многокритериального выбора альтернатив на основе композиционного правила агрегирования описаний альтернатив с информацией о предпочтениях лица, принимающего решения (ЛПР), заданных в виде нечетких суждений [1, 2]. В основе этого метода лежит обработка высказываний вида

$$d_i\text{: если } x_1 = m_{1i} \text{ и } x_2 = m_{2i} \text{ и ... и } x_p = m_{pi}, \text{ то } S = B_i, \quad (1)$$

где $d_i \in D = \{d_i : i = \overline{1, I}\}$ — множество высказываний, удовлетворяющих предпочтениям ЛПР; $x_j \in X = \{x_j : j = \overline{1, J}\}$ — множество критериев; m_{ij} — оценка соответствия альтернативы j-му критерию, используемому в i-м высказывании; B_i — значение вывода высказывания d_i.

Процесс решения задачи состоит из нескольких этапов [3]:

1) вычисления свертки условий в левой части высказывания (1) на основе операции пересечения (min);

2) вычисления импликаций;

3) построения композиционного правила вывода для каждой альтернативы;

4) сопоставления альтернатив.

Наилучшая альтернатива определяется на основе интегральной оценки соответствия альтернатив по всему множеству высказываний вида (1).

В известных примерах решения [3] этой задачи оценки m_{ij} — это некоторые числа из интервала $[0, 1]$, т. е. предполагается, что существует рациональный эксперт, который способен выставить эти оценки.

В данном случае возникает некоторое несоответствие: имея точечные оценки, ЛПР на их основе строят нечеткие выводы. Кроме этого, сочетание числовых оценок и их свертки с помощью операции min делает всю достаточно сложную процедуру получения окончательного вывода практически нецелесообразной. В примере задачи [3] многокритериального альтернативного выбора с использованием правил нечеткого условного вывода для пяти альтернатив $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ и пяти критериев A, B, C, D, E используется следующий набор оценок:

$$A = \left\{0.3/u_1, 0.6/u_2, 0.5/u_3, 0.1/u_4, 0.3/u_5\right\};$$

$$B = \left\{0.5/u_1, 1/u_2, 0/u_3, 0.5/u_4, 1/u_5\right\};$$

$$C = \left\{0.6/u_1, 0.9/u_2, 1/u_3, 0.7/u_4 \; 1/u_5\right\};$$

$$D = \left\{1/u_1, 0.3/u_2, 1/u_3, 0/u_4, 0/u_5\right\};$$

$$E = \left\{0/u_1, 0.5/u_2, 1/u_3, 0.8/u_4, 0.1/u_5\right\}. \quad (2)$$

Применяя к этому набору максиминное преобразование, получим

$$\min_i = \left\{ {}^{0}\!/_{u_1}, {}^{0.3}\!/_{u_2}, {}^{0}\!/_{u_3}, {}^{0}\!/_{u_4}, {}^{0}\!/_{u_5} \right\};$$

$$\max_j = \left\{ {}^{0.3}\!/_{u_2} \right\},$$

что говорит о предпочтительности второй альтернативы. Этот результат совпадает с тем, который был получен после весьма громоздких вычислений [3].

Следует отметить, что объективность дальнейших выводов на основе операции min вызывает достаточно серьезные сомнения. Так, применение этой операции к соотношениям (2), по существу, уравнивает четыре весьма различные по качеству альтернативы a_1, a_3, a_4, a_5. Далее, наличие всего одной минимальной оценки может исключить из рассмотрения альтернативу, которая по всем остальным позициям превосходит другие. В том же самом примере далеко не очевидно полное преимущество альтернативы a_2 над a_3.

Применение операции min — это отражение позиции «осторожного наблюдателя», когда все последующие решения принимаются из расчета на наихудший случай. Как отмечается в различных источниках, это может привести к созданию неоправданных резервов, а в некоторых случаях — и к параличу деловой активности. Известно также, что операцию min при свертке условий рекомендуется применять в условиях полной неопределенности, что для рассматриваемых задач не имеет места. Наконец, следует отметить, что использование операции min приводит к тому, что решение по существу принимается по одному критерию (условию), а не по всей их совокупности. Использование числовых, по существу точечных, оценок и операции min в задачах принятия решений приводит к тому, что без достаточных оснований ограничивается область, на которой будет приниматься решение.

При свертке условий (критериев) должна быть создана некоторая область (некоторое пространство), где было бы представлено совокупное (интегральное) влияние всех условий. Операция пересечения в ее классическом определении позволяет это обеспечить. Операция min, да еще при точечных оценках, дает свертку в виде точки, обоснованность которой, вообще говоря, недостаточна.

Более обстоятельное доказательство сформулированных выше положений может быть получено из рассмотрения уже упоминавшегося примера, соотношения (2)[3]. В частности, для оценки альтернатив используются шесть правил нечеткого условного вывода. Рассмотрим ситуацию с одной альтернативой a_2, которая получила наибольшую итоговую оценку, и запишем для нее все правила [3]:

$$\begin{gathered}
a_1\text{: если } x = A \text{ и } B \text{ и } C\text{, то } y = S;\\
a_2\text{: если } x = A \text{ и } B \text{ и } C \text{ и } D\text{, то } y = MS;\\
a_3\text{: если } x = A \text{ и } B \text{ и } C \text{ и } D \text{ и } E\text{, то } y = P;\\
a_4\text{: если } x = A \text{ и } B \text{ и } C \text{ и } E\text{, то } y = VS;\\
a_5\text{: если } x = (\text{очень } A) \text{ и } (\text{не } B) \text{ и } C \text{ и } E\text{, то } y = S;\\
a_6\text{: если } x = \text{не } (A) \text{ и не } (C)\text{, то } y = US.
\end{gathered} \tag{3}$$

Остановимся на рассмотрении только условной части этих правил. Подставим в (3) числовые значения оценок критериального соответствия из (2) и выполним свертку условий в левой части правил, используя операцию min:

$$\begin{gathered}
d_1\text{: если } < x = 0.6 > \text{ и } < 1 > \text{ и } < 0.9 >\text{, то } y = S,\\
\text{если } < x = 0.6 >\text{, то } y = S;\\
d_2\text{: если } < x = 0.6 > \text{ и } < 1 > \text{ и } < 0.9 > \text{ и } < 0.3 >,\\
\text{то } y = MS,\\
\text{если } < x = 0.3 >\text{, то } y = MS;\\
d_3\text{: если } < x = 0.6 > \text{ и } < 1 > \text{ и } < 0.9 > \text{ и } < 0.3 >\\
\text{и } < 0.5 >\text{, то } y = P,\\
\text{если } < x = 0.3 >\text{, то } y = P;\\
d_4\text{: если } < x = 0.6 > \text{ и } < 1 > \text{ и } < 0.3 > \text{ и } < 0.5 >,\\
\text{то } y = VS,\\
\text{если } < x = 0.3 >\text{, то } y = VS;\\
d_5\text{: если } < x\,(0.6)^2 > \text{ и } < 0 > \text{ и } < 0.9 > \text{ и } < 0.5 >,\\
\text{то } y = S,\\
\text{если } < x = 0 >\text{, то } y = S;\\
d_6\text{: если } < x = 1 - 0.6 > \text{ и } < 0.1 >\text{, то } y = US,\\
\text{если } < x = 0.4 >\text{, то } y = US.
\end{gathered} \tag{4}$$

Окончательно:

$$\begin{gathered}
d_1\text{: если } < x = 0.6 >\text{, то } y = S;\\
d_2\text{: если } < x = 0.3 >\text{, то } y = MS;\\
d_3\text{: если } < x = 0.3 >\text{, то } y = P;\\
d_4\text{: если } < x = 0.3 >\text{, то } y = VS;\\
d_5\text{: если } < x = 0 >\text{, то } y = S;\\
d_6\text{: если } < x = 0.4 >\text{, то } y = US.
\end{gathered} \tag{5}$$

Или, с учетом (3):

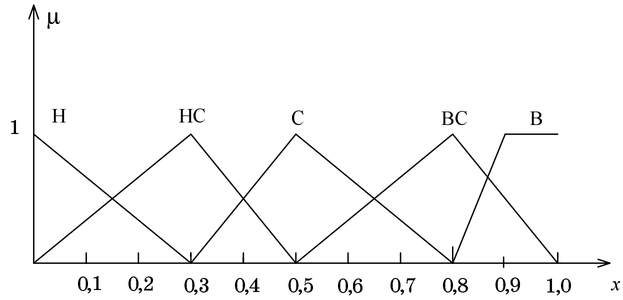
$$\begin{gathered}
d_1\text{: если } < x = A/0.6 >\text{, то } y = S;\\
d_2\text{: если } < x = C/0.3 >\text{, то } y = MS;\\
d_3\text{: если } < x = D/0.3 >\text{, то } y = P;\\
d_4\text{: если } < x = C/0.3 >\text{, то } y = VS;\\
d_5\text{: если } < x = B/0 >\text{, то } y = S;\\
d_6\text{: если } < x = \text{не } (A)/0.4 >\text{, то } y = US.
\end{gathered} \tag{6}$$

Последний набор правил, так же как и предыдущий, вызывает ряд вопросов, которые, в принципе, могут поставить под сомнение получаемый на их основе вывод. В наборе (6) отсутствует критерий E, в правилах d_2 и d_4 при одних и тех же критериальных оценках делаются различные выводы, достаточно низкая оценка альтернативы по критерию D делает ее безупречной, нулевая оценка по критерию B позволяет рассматривать альтернативу как удовлетворительную. И, наконец, вместо достаточно большого набора условий в каждом правиле осталось по одному. Причины этих противоречий заключаются не в неудачном подборе числовых оценок, а в принципиальных недостатках использования точечных оценок критериального соответствия в совокупности с применением операции min для свертки условий.

Наверное, больший интерес может представлять эта же задача, но в более общей формулировке, когда оценки соответствия альтернатив условиям критериев заданы либо нечеткими числами, например «примерно 0,8», либо в лингвистической форме. Например, оценка 0,8 трансформируется в оценку «выше среднего», 0,9 — «высокая», 0,3 — «ниже среднего». В любом случае при таком подходе критериальные оценки представляются нечеткими множествами с различными областями определения.

Изменения, которые претерпят формулировки правил (4), покажем на примере одного правила:

d_1: если < степень соответствия критерию А = средняя > и < степень соответствия критерию В = высокая > и < степень соответствия критерию С = высокая >, то $y = S$. Остальные правила преобразуются аналогичным образом. На рис. 1 представлен один из вариантов лингвистических оценок критериального соответствия. Выбор треугольных функций принадлежности объясняется только соображениями простоты графических представлений.



■ ***Рис. 1.*** *Лингвистические оценки критериального соответ-ствия*

Условные части всех правил (3) в сокращенном варианте записаны в таблицу.

Анализ содержания таблицы с учетом рис. 1 показывает, что в лучшем случае из шести правил только два дают непустые пересечения, т. е. принятие решений будет приниматься не по всей совокупности правил условного вывода. Обоснованность таких заключений оказывается явно недостаточной. Таким образом, классический вариант операции пересечения при лингвистической форме оценок критериального соответствия затрудняет решение поставленной задачи. Можно достаточно просто доказать, что аналогичная ситуация будет иметь место и при альтернативных вариантах операции пересечения на основе:

— ограниченного произведения (граничное произведение) [5];

— алгебраического произведения;

— драстического произведения [6].

В работе [4] для подобных задач вводятся так называемые цилиндрические продолжения.

Теоретически они позволяют разрешить проблему пустых пересечений, но в практическом плане цилиндрические продолжения могут быть использованы только для простейших условных высказываний.

Предлагается новая операция над нечеткими множествами — геометрическая проекция нечетких множеств.

Пусть имеются нечеткие множества

$$\tilde{A} = \{\mu_{\tilde{A}}(y)/y\};$$

$$\tilde{B} = \{\mu_{\tilde{B}}(x)/x\};$$

$$y \in [0,\, 1],\;\; x \in [0,\, 1].$$

Последнее условие не ограничивает общность рассмотрения, так как любой реальный интервал значений приводится к указанному.

Введем операцию проекции $\Pi^{\Gamma}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$ нечеткого множества $\tilde{A}$ на нечеткое множество $\tilde{B}$, которая должна удовлетворить следующим условиям:

d	А В С D Е для альтернативы				
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
d_1	ВС · С · С · = 0	С · В · В = 0	С · Н · В = 0	Н · С · ВС = 0	НС · В · В = 0
d_2	ВС · С · С · В = 0	С · В · В · НС = 0	С · Н · В · В = 0	Н · С · ВС · Н = 0	НС · В · В · Н = 0
d_3	ВС · С · С · В · Н = 0	С · В · В · НС · С = 0	С · Н · В · В · В = 0	Н · С · ВС · Н · В = 0	НС · В · В · Н · Н = 0
d_4	ВС · С · С · Н = 0	С · В · В · С = 0	С · Н · В · В = 0	Н · С · ВС · В = 0	НС · В · В · Н = 0
d_5	(ВС)^2 · не (С) · С · Н = 0	(С)^2 · не (В) · С · С ≠ 0	(С)^2 · не (Н) · В · В ≠ 0	(Н)^2 · не (С) · ВС · В ≠ 0	(НС)^2 · не (В) · Б · Н ≠ 0
d_6	не (ВС) · не (С) ≠ 0	не (ВС) · не (В) ≠ 0	не (С) · не (В) ≠ 0	не (Н) · не (ВС) ≠ 0	не (НС) · не (В) ≠ 0

111*Примечание.* Символом «·» обозначена операция пересечения.

1) $\Pi^{\Gamma}(\tilde{A}, \tilde{B})$ — нечеткое множество;

2) $\Pi^{\Gamma}(\tilde{A}, \tilde{A}) = A$;

3) $\Pi^{\Gamma}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \varnothing$ — пустое множество, если хотя бы одно из множеств $\tilde{A}$ или $\tilde{B}$ — пустое или множества ортогональны.

Процедуру построения проекции нечеткого множества $\tilde{A}$ на нечеткое множество $\tilde{B}$ определим следующим образом (рис. 2):

$$\Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \left\{\varphi\left[\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{B}}(x')\right]/\left[y, x' = f(y)\right]\right\},$$

где $f(y) = \dfrac{CG\left[\mu_{\tilde{B}}(x)\right]}{CG\left[\mu_{\tilde{A}}(y)\right]} y$ — проекционная функция; $CG\left[\mu_{\tilde{B}}(x)\right]$ и $CG\left[\mu_{\tilde{A}}(y)\right]$ — координаты центра тяжести фигур, ограниченных функциями принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(x)$ и $\mu_{\tilde{A}}(y)$ соответственно; φ — функционал, задающий вид преобразований над функциями принадлежности; $y \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$.

Треугольные функции принадлежности используются только из соображений простоты графических представлений.

Нечеткое множество $\tilde{B}$, на которое производится проекция, назовем приемником проекции. Нечеткое множество, которое проецируется на другое нечеткое множество, назовем источником проекции.

Нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ ортогональны, если угол наклона β проекционной функции $f(y)$ равен 0 или 90°. В этом случае $\Pi^{\Gamma}{}_{\varphi}(\tilde{A}, \tilde{B}) = \varnothing$.

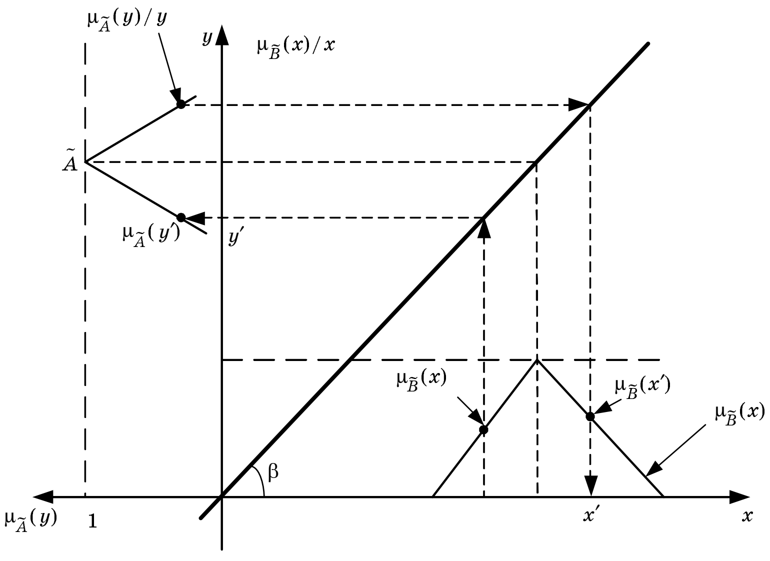
Геометрическая проекция типа min будет иметь место, если $\varphi = \min$, типа max — при $\varphi = \max$:

$$\Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \left\{\min\left[\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{B}}(x')\right]/ y, x' = f(y)\right\};$$

$$\Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) = \left\{\max\left[\mu_{\tilde{A}}(y), \mu_{\tilde{B}}(x')\right]/ y, x' = f(y)\right\}.$$

Обратная геометрическая проекция

$$\Pi^{-\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{B}, \tilde{A}\right) = $$
$$= \left\{\varphi\left[\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y')\right]/ x, y' = f(x)\right\}.$$



■ ***Рис. 2.*** *Построение проекции нечетких множеств*

Основные свойства геометрической проекции.

1. Геометрическая проекция нечетких множеств не коммутативна:

$$\Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) \neq \Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{B}, \tilde{A}\right).$$

Доказательство:

Результат геометрической проекции зависит от проекционной функции.

Для $\Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$ $f(y) = \dfrac{CG\left[\mu_{\tilde{B}}(x)\right]}{CG\left[\mu_{\tilde{A}}(y)\right]} y$;

для $\Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{B}, \tilde{A}\right)$ $f(x) = \dfrac{CG\left[\mu_{\tilde{A}}(y)\right]}{CG\left[\mu_{\tilde{B}}(x)\right]} x$

и $f(y) \neq f(x)$.

2. Геометрическая проекция нечетких множеств в общем случае не ассоциативна:

$$\Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{A}, \Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{B}, \tilde{C}\right)\right) \neq \Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\Pi^{\Gamma}_{\varphi}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right), \tilde{C}\right).$$

Доказательство этого утверждения можно провести аналогично доказательству первого утверждения.

Как следует из определения операции геометрической проекции нечетких множеств, ассоциативность может иметь место, если нечеткие множества имеют однотипные симметричные функции принадлежности и угол наклона проекционной функции равен $\dfrac{\pi}{4}$.

В этом случае при выполнении преобразований не происходит перемещений центров тяжести соответствующих нечетких множеств и не изменяется проекционная функция.

Во всех остальных ситуациях центры тяжести перемещаются в разных направлениях.

3. Геометрическая проекция в общем случае не дистрибутивна, т. е.

$$\Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A}, \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{B}, \tilde{C}\right)\right) \neq$$
$$\neq \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right), \Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A}, \tilde{C}\right)\right);$$

$$\Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A}, \Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{B}, \tilde{C}\right)\right) \neq$$
$$\neq \Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right), \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A}, \tilde{C}\right)\right).$$

Доказательство аналогично предыдущим.

4. Свойство поглощения в традиционном виде для геометрической проекции нечетких множеств не выполняется, но справедливо следующее соотношение:

$$\Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A},\, \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{B},\, \tilde{C}\right)\right) =$$

$$= \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A},\, \Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A},\, \tilde{B}\right)\right) = \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A},\, \tilde{B}\right).$$

5. Для геометрической проекции нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ выполняется правило Моргана:

$$\overline{\Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)} = \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\bar{\tilde{A}}, \bar{\tilde{B}}\right);$$

$$\overline{\Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)} = \Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\bar{\tilde{A}}, \bar{\tilde{B}}\right).$$

6. Геометрическая проекция нечетких множеств идемпотентна:

$$\Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A},\, \tilde{A}\right) = \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A},\, \tilde{A}\right).$$

7. Для геометрической проекции нечетких множеств

$$\Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A}, \bar{\tilde{A}}\right) \neq \varnothing;$$

$$\Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A}, \bar{\tilde{A}}\right) \neq U,$$

где U — универсальное множество.

8. С точностью до постоянного множителя:

$$\Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\tilde{A},\, \bar{\tilde{A}}\right) = \Pi^{\Gamma}_{\min}\left(\bar{\tilde{A}},\, \tilde{A}\right);$$

$$\Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\tilde{A},\, \bar{\tilde{A}}\right) = \Pi^{\Gamma}_{\max}\left(\bar{\tilde{A}},\, \tilde{A}\right).$$

Обработка нечетких высказываний. Под нечетким высказыванием будем понимать условное высказывание вида

если < условие *1* > и < условие *2* > и ... < условие *n* >, то < вывод >, (7)

в котором и условия, и выводы имеют нечеткую форму, т. е. каждому условию и выводу соответствуют нечеткие множества с соответствующими функциями принадлежности, т. е. правило (7) имеет вид

$$\text{если } \tilde{A}_1 \text{ и } \tilde{A}_2 \text{ и ... и } \tilde{A}_n \text{, то } \tilde{W}, \qquad (8)$$

где $\tilde{A}_i = \left\{\mu_{\Delta i}\left(x\right)/\,x\right\},\ \tilde{W} = \left\{\mu_W\left(z\right)/\,z\right\}$.

Как уже отмечалось, для правила (8) свертка условий на основе операции пересечения может привести к пустому множеству, при этом достаточно хотя бы одного пересечения, т. е. если хотя бы для одной произвольной пары *i*, *k*: $\tilde{A}_i \wedge \tilde{A}_k = \varnothing$, то свертка всех условий будет пустое множество.

Применив геометрическую проекцию нечетких множеств, можно устранить эту ситуацию. Однако надо иметь в виду, что геометрическая проекция не коммутативна и поэтому порядок записи условий имеет существенное значение.

Для того чтобы это обстоятельство не сказывалось на конечном результате, предлагается следующая процедура.

Пусть имеется некоторое нечеткое высказывание вида (8).

Геометрические проекции нечетких множеств вычисляются как в прямом (слева направо), так и в обратном (справа налево) направлении. В каждом из направлений формируется несколько вариантов геометрических проекций путем циклического сдвига условий, например:

— для прямой геометрической проекции

$$\Pi_1 \quad \left(\underline{A}_1,\, A_2 \ldots A_n\right);$$

$$\Pi_2 \quad \left(\underline{A}_n,\, A_1,\, A_2 \ldots A_{n-1}\right);$$

$$\Pi_n \quad \left(\underline{A}_2,\, A_3 \ldots A_{n-1},\, A_n,\, A_1\right);$$

— для обратной геометрической проекции

$$\Pi_1^{-1} \quad \left(\underleftarrow{A}_1,\ A_2 \ldots\ A_n\right);$$

$$\Pi_2^{-1} \quad \left(A_2,\, A_3 \ldots \underleftarrow{A}_n,\, A_1\right);$$

$$\Pi_n^{-1} \quad \left(A_n,\, A_1,\, A_2 \ldots \underleftarrow{A}_{n-1}\right).$$

Число сдвигов для каждого направления геометрических проекций равно числу условий в нечетком высказывании.

После выполнения всех преобразований получим $2n$ (n — число условий) нечетких множеств, представляющих агрегирование нечетких условий. Количество нечетких множеств может быть уменьшено за счет исключения одинаковых комбинаций и использования свойства поглощения.

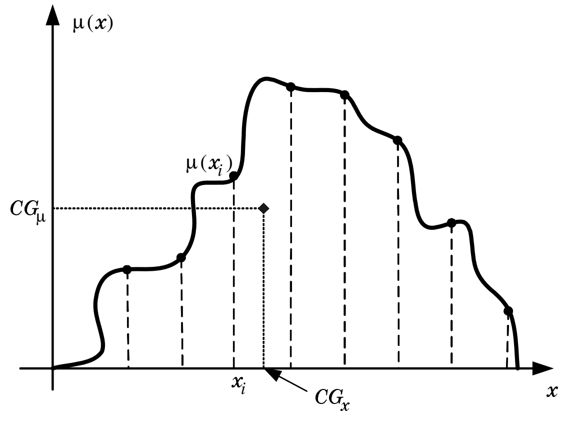
Заключительным этапом является вычисление импликации: $\tilde{A} \to \tilde{W}$, где $\tilde{A}$ — агрегированное нечеткое условие; $\tilde{W}$ — нечеткий вывод.

Вычисление импликации можно выполнить по нескольким вариантам.

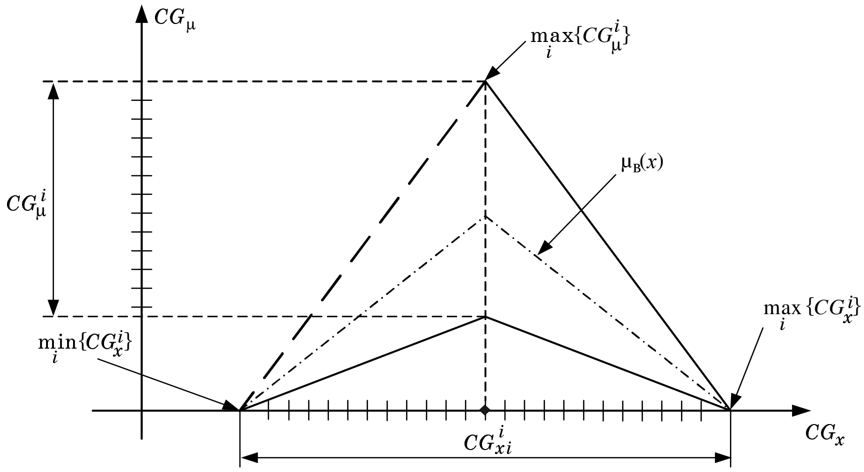
1. Импликация вычисляется для каждой геометрической проекции и затем формируется агрегированный вывод.

2. Выполняется агрегирование оценок по всем геометрическим проекциям, а затем вычисляется импликация.

При вычислении самой импликации можно также идти двумя путями:



■ ***Рис. 3.*** *Определение координат центра тяжести*



■ ***Рис. 4.*** *Построение результирующей функции принадлежности*

а) использовать геометрическую проекцию нечетких множеств $\Pi^\Gamma\left(\tilde{A},\tilde{W}\right)$;

б) использовать одну из известных формул вычисления импликации [5].

Для построения интегрированных оценок или выводов можно предложить следующее решение.

Известно, что обобщенной характеристикой множества материальных точек является координата центра тяжести.

В каждом из предложенных вариантов вычисления импликации получается некоторый набор нечетких множеств, каждое из которых имеет свою функцию принадлежности. Если рассматривать нечеткое множество как множество точек с единичной массой в системе координат, значение функции принадлежности — аргумент функции принадлежности, то в этой системе координат можно вычислить следующие координаты центра тяжести (рис. 3): $CG_x = \dfrac{\sum\mu(x_i)x_i}{\sum\mu(x_i)}$; $CG_{\mu(x)} = \dfrac{\sum\mu(x_i)x_i}{\sum x_i}$.

В общем случае будем иметь два множества значений: $CG_x = \left\{CG^i_x : i=\overline{1,n+1}\right\}$, $CG_{\mu(x)} = \left\{CG^i_x : i=\overline{1,n+1}\right\}$.

Агрегированная оценка может быть представлена в виде эквивалентного нечеткого множества, полученного с помощью операции триангуляции, левая граница которого определяется как $L=\min\limits_i CG^i_x$, правая — $R=\max\limits_i CG^i_x$. Центр нечеткого множества $CG=\dfrac{\sum CG^i_x\cdot CG^i_\mu}{\sum CG^i_\mu}$, значение функции принадлежности в этой точке можно определить как пессимистическую: $\mu(CG)=\min\limits_i\left\{CG^i_\mu\right\}$ или как оптимистическую: $\mu(CG)=\max\limits_i\left\{CG^i_\mu\right\}$, возможно также использование взвешенной оценки $\mu_B(CG)=\dfrac{\sum\mu(CG^i_x)\cdot CG^i_\mu}{\sum CG^i_\mu}$ (рис. 4).

Для проверки предлагаемых преобразований были использованы известные примеры [3], в которых числовые оценки при сохранении их общего смысла были заменены на лингвистические, так, как это описывалось в начале данной работы. Полученные результаты по своему смыслу совпадают с результатами тестовых примеров. В то же время предложенные методы свободны от противоречий и ограничений, которые были отмечены в начале работы.

Литература

1. **Yager R. R.** Multiple — objective decision — making using fuzzy sets // Intern. J. Man – machine Studies. 1977. Vol. 9. N 4. P. 375–382.
2. **Yager R. R.** Multicriterial decisions with soft information: an application of fuzzy set and possibility theory // Fuzzy Mathematics. 1982. Pt. 1. Vol. 2. N 2. P. 21–28; Pt. 2. Vol. 2. N 3. P. 7–16.
3. **Борисов А. Н., Крумберг О. А., Федоров И. П.** Принятие решений на основе нечетких моделей: Примеры использования. Рига: Зинатне, 1990. 184 с.
4. **Малышев Н. Г., Берштейн Л. С., Боженюк А. В.** Нечеткие модели для экспериментных систем в САПР. М.: Энергоатомиздат, 1991. 136 с.
5. **Нечеткие** множества в моделях управления и искусственного интеллекта/ Под. ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986. 312 с.
6. **Леоненков А. В.** Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 736 с.