

УДК 519.2

## ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГАУССОВА ПРОЦЕССА С НЕСЛУЧАЙНЫМ УРОВНЕМ

**С. Н. Воробьев,**

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Функция и плотность распределения времени пересечения гауссовым процессом неслучайного уровня находятся с использованием двумерного нормального распределения. В устройствах измерения времени прихода импульсного сигнала с большой вероятностью пересечение заданного уровня оказывается единственным. Приводятся примеры расчета и моделирования плотности распределения времени первого пересечения.

The distribution function and the density function of the crossing time for a Gaussian process at a nonrandom level is found with the help of two-dimensional normal distribution. In the systems of time measurement the moment of signal arrival with big probability of intersection turns out to be unique. Examples of estimation and simulation modeling of the first crossing time density function are considered.

### Введение

Актуальность проблемы пересечения случайным процессом заданного уровня подробно обсуждена в обзоре [1]. Один из ее аспектов, являющийся теоретической базой систем измерения дальности, — нахождение закона распределения времени первого пересечения. На практике широко используется приближенное решение этой задачи — аппроксимация нормальным распределением [2], справедливая при большом отношении сигнал/шум. Решение задачи первого пересечения для марковской модели приведено в статьях [3, 4].

Цель работы — распространение методики расчета плотности распределения времени пересечения уровня марковским процессом [3] на случай произвольных гауссовых процессов. Если скорости флуктуаций шума и изменений значений фронта импульсного сигнала близки, что наблюдается в реальных радиоэлектронных системах, с большой вероятностью пересечение оказывается единственным. Тогда возможен простой и достаточно точный практический расчет плотности распределения времени прихода импульсного сигнала.

### Пересечение уровня нестационарным гауссовым процессом

Если случайный процесс  $x(t)$  начинается в точке  $x_0$  ( $x(t=0) = x_0$ ) и известна условная плотность распределения  $f(x, t | x_0)$  его значения в момент времени  $t > 0$ , вероятность пересечения неслучайного уровня  $u(t)$  на интервале  $(0, t)$  сверху вниз и снизу вверх равна

$$p\{t_0 \leq t | x_0\} = P(t_0 | x_0) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{u(t)} f(x, t | x_0) dx, & x_0 > u_0, \\ \int_{u(t)}^{\infty} f(x, t | x_0) dx, & x_0 < u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Монотонно возрастающая вероятность (1) есть условная функция распределения. Однако в общем случае на интервале  $(0, t)$  уровень может пересекаться неоднократно, поэтому необходим конкретный анализ вероятности  $P(t_0 | x_0)$ .

В радиоэлектронике широко используется модель стационарного гауссова шума  $n(t) \in N(0, R(\tau))$ ,  $R(\tau)$  — функция корреляции (далее положено  $\sigma^2 = 1$ ). Если начальное значение шума равно  $n_0 = x_0$ , то процесс  $x(t) = n(t | x_0) \in N(m(t), \sigma(t))$ ,  $m(t) = x_0 R(t)$ ,  $\sigma^2(t) = 1 - R^2(t)$ . Условная вероятность (1) в этом случае равна

$$P(t_0 | x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{u(t_0)} \exp\left\{-\frac{(x - m(t_0))^2}{2\sigma(t_0)}\right\} dx = \Phi\left(\frac{u(t_0) - m(t_0)}{\sigma(t_0)}\right), \quad (2)$$

где  $\Phi(v)$  — интеграл вероятности. Условная плотность вероятности (2)

$$p(t_0 | x_0) = P'(t_0 | x_0) = \frac{\varphi(t_0)}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_0)} \exp\left\{-\frac{(u(t_0) - m(t_0))^2}{2\sigma^2(t_0)}\right\}; \quad (3)$$

$$\varphi(t_0) = \left(\frac{u(t_0) - m(t_0)}{\sigma(t_0)}\right)'. \quad (4)$$

Неравенство

$$\varphi(t_0) > 0 \quad (5)$$

является условием существования плотности (3) при пересечении сверху вниз. При пересечении снизу вверх плотность (3) записывается со знаком минус, неравенство (5) меняется на обратное.

**Пример 1.** Гауссов процесс с математическим ожиданием  $m(t) = 0$  и функцией корреляции

$$R(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \left( \cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta\tau \right), \quad (6)$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{4}{3}\pi,$$

начинающийся в точке  $x_0 = 1$ , пересекает сверху вниз уровни  $u_1(t) = t - 1,5$  (рис. 1, а, линия 1) и  $u_2(t) = 2t - 2,5$  (рис. 1, б, линия 1). Производные (4)

$$\varphi_1(t_0) = \frac{u_1(t_0) - R(t_0)}{\sqrt{1 - R^2(t_0)}}, \quad \varphi_2(t_0) = \frac{u_2(t_0) - R(t_0)}{\sqrt{1 - R^2(t_0)}}$$

показаны на рис. 1, а, кривая 2; 2, б, кривая 2. Для менее крутого уровня  $u_1(t_0)$  на интервале  $(t_1, t_2)$  производная отрицательна, плотность (3) не является плотностью распределения. Условие (5) выполняется для более крутого уровня  $u_2(t_0)$ .

Вероятности (2) (рис. 2, а, б) достигают значения  $P = 1$ .

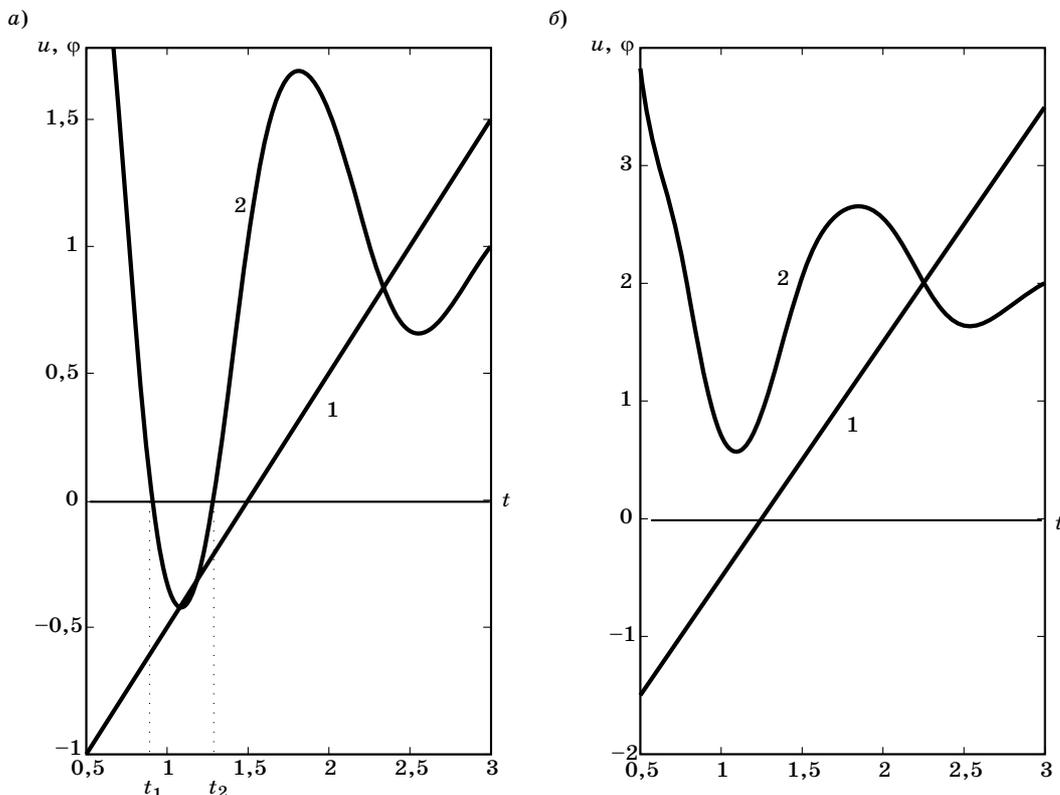
Для уровня  $u_1(t)$  вероятность (2) нарастает не монотонно, что приводит к разрыву плотности (3), показанному на рис. 2, в. В другом случае (рис. 2, б, г)

$$P(t_0 | x_0) = F(t_0 | x_0), \quad p(t_0 | x_0) = f(t_0 | x_0)$$

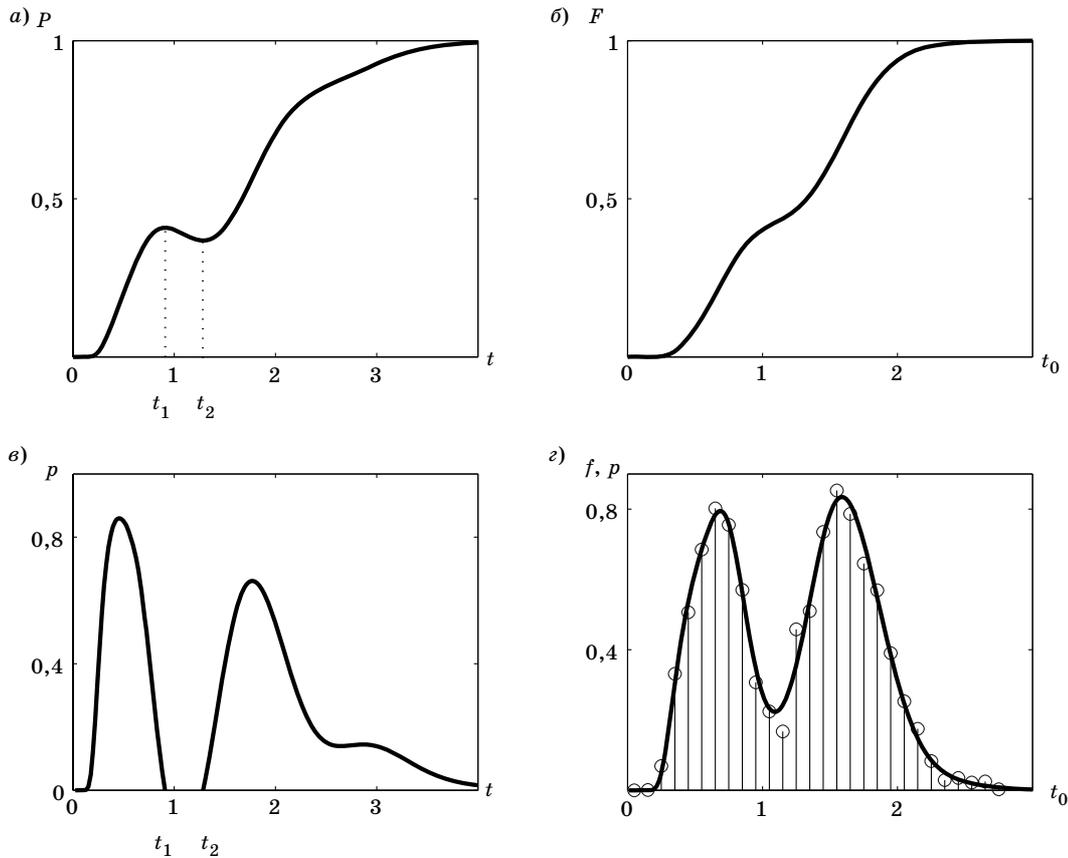
— условные функция и плотность распределения времени пересечения уровня  $u_2(t)$  гауссовым процессом с функцией корреляции (6), начинающимся в точке  $x_0 = 1$ . На рис. 2, г штрихами показаны также оценки плотности (3), полученные численным дифференцированием оценок вероятности (2)

$$\hat{P} = N_t / N,$$

где  $N_t$  — число траекторий, которые к моменту  $t_0$  достоверно пересекли уровень:  $x(t_0) < u(t_0)$ ; размер выборки  $N = 10\,000$  траекторий. Расчеты выполнены в пакете SYMBOLIC MATH, моделирова-



■ Рис. 1. Производные, плотности условной вероятности



■ Рис. 2. Вероятности, плотности вероятности

ние — в пакете SIGNAL PROCESSING системы MATLAB [5].

**Пример 2.** Уровень  $u(t) = 4 \sin(2\pi/3)t$  (рис. 3) на интервале времени  $(0, 4)$  пересекается процессом с функцией корреляции (6),  $x_0 = 2$ .

Траектории пересекают уровень сверху вниз дважды, один раз — снизу вверх. Условные вероятности (2)  $P\{x(t) < u(t)\}$  и  $P\{x(t) > u(t)\}$  показаны на рис. 4, а, б, соответствующие плотности (3) — на рис. 4, в, г. Нарастающие от нуля до единицы участки вероятности — функции распределения; соответствующие неотрицательные плотности — плотности распределения времени пересечения.

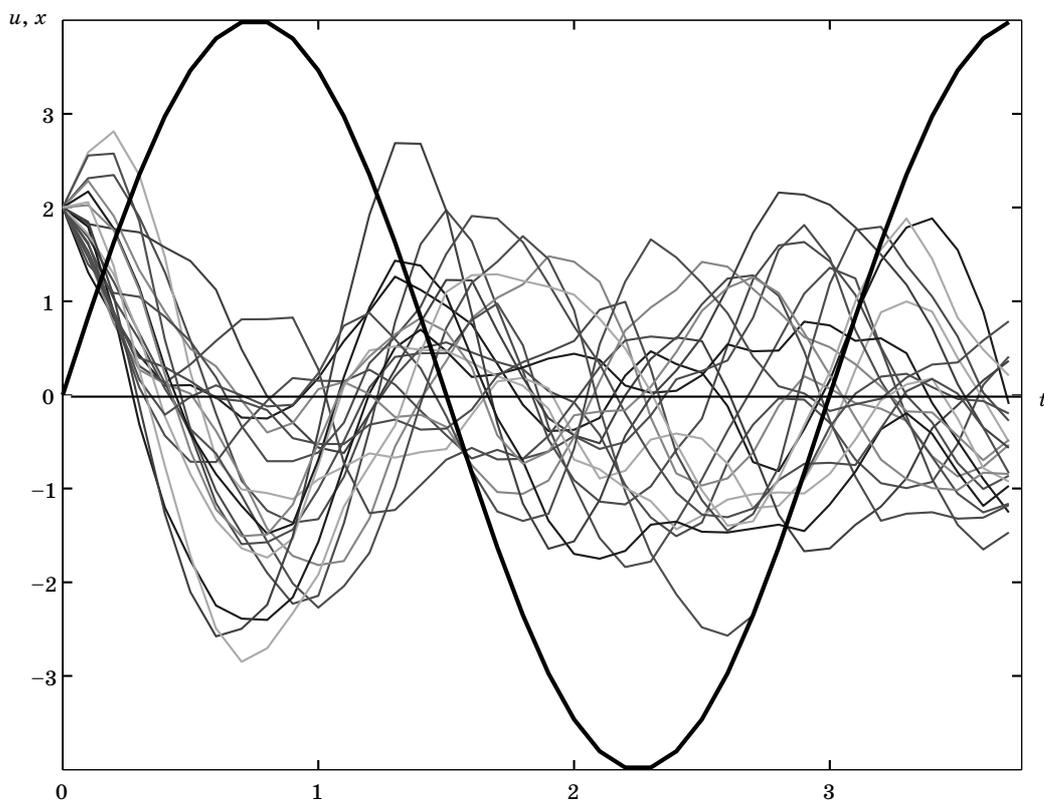
Условные траектории процесса  $\mathbf{X} | x_0$  генерировались как гауссовы последовательности со средними  $\mathbf{M}[\mathbf{X} | x_0] = x_0 \mathbf{R}$  и условной корреляционной матрицей  $\mathbf{B} | x_0$  с элементами

$$b'_{ij} = b_{ij} \sqrt{(1-r_i^2)(1-r_j^2)}, \quad b'_{11} = b'_{1j} = 0,$$

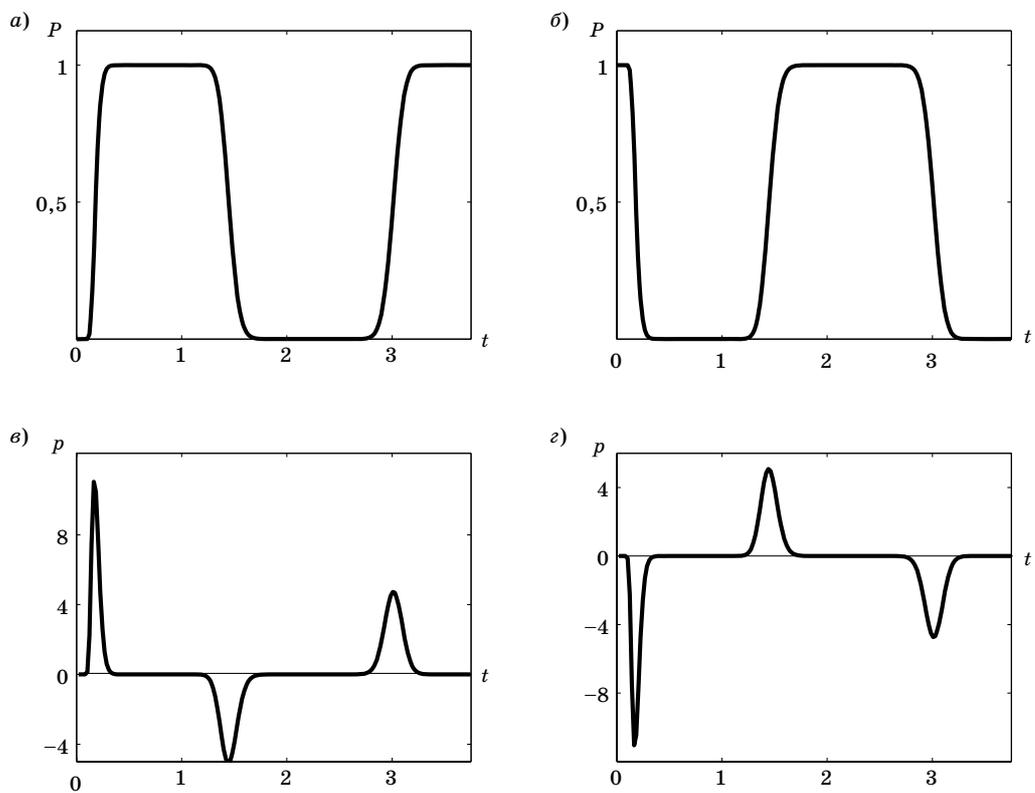
где  $\mathbf{R}$  — вектор отсчетов функции корреляции;  $b_{ij}$  — элементы корреляционной матрицы  $\mathbf{B}$  стационарного процесса. Оператор окрашивания исходных последовательностей, генерируемых функцией RANDN [5], рассчитывался на базе сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{B} | x_0$ , что минимизирует методические погрешности генератора [6].

Условная плотность (3) обобщает плотность распределения времени пересечения постоянного уровня гауссовым марковским процессом с функцией корреляции  $R_m(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ , полученную в работе [3], на произвольный уровень. Пример пересечения уровня  $u \neq \text{const}$  марковским процессом приведен на рис. 5: траектории с  $\alpha = 2$ ,  $x_0 = 1$ , уровень  $u(t) = 6 \cos \frac{2\pi}{3}t - 3$  (рис. 5, а); плотность (3) и гистограмма времени пересечения (рис. 5, б).

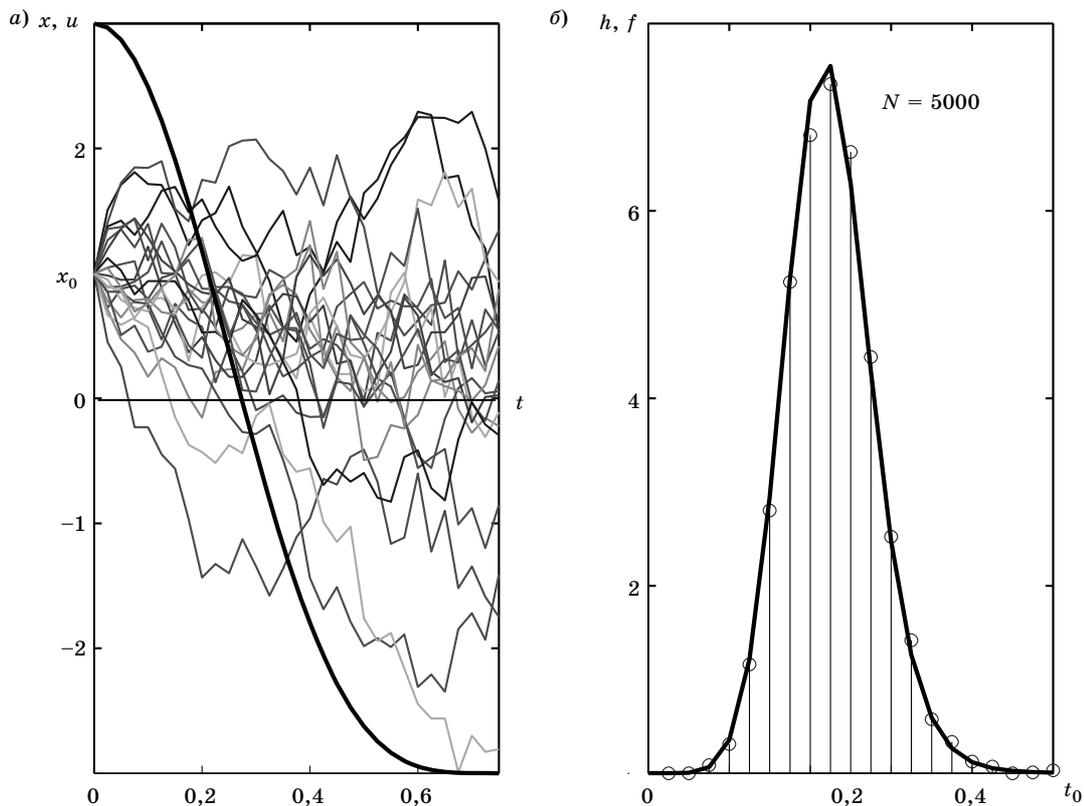
Модель двумерной нормальной плотности, использованная в данной работе и в [3], естественно описывает марковский процесс. Применимость этой модели для немарковского процесса означает, что стационарный немарковский процесс можно трактовать как марковский с функцией корреляции с переменным коэффициентом  $A = \varphi(\tau)$ . Типовые функции корреляции стационарных процессов вида  $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)\varphi(\tau)$  можно представить марковской формой  $R_M(\tau) = \exp(-A|\tau|)$  с показателем  $A = \alpha - \ln|\varphi(\tau)|^{1/\tau}$ . Например, функцию корреляции (6) можно записать  $R(\tau) = (-1)^k \exp\{-A\tau\}$ , где коэффициент  $A = \alpha - \ln|\cos\beta\tau + \alpha/\beta\sin\beta\tau|^{1/\tau}$  (рис. 6, а);  $k = \text{fix}(4(\tau - \tau_0)/3)$  — целая часть чис-



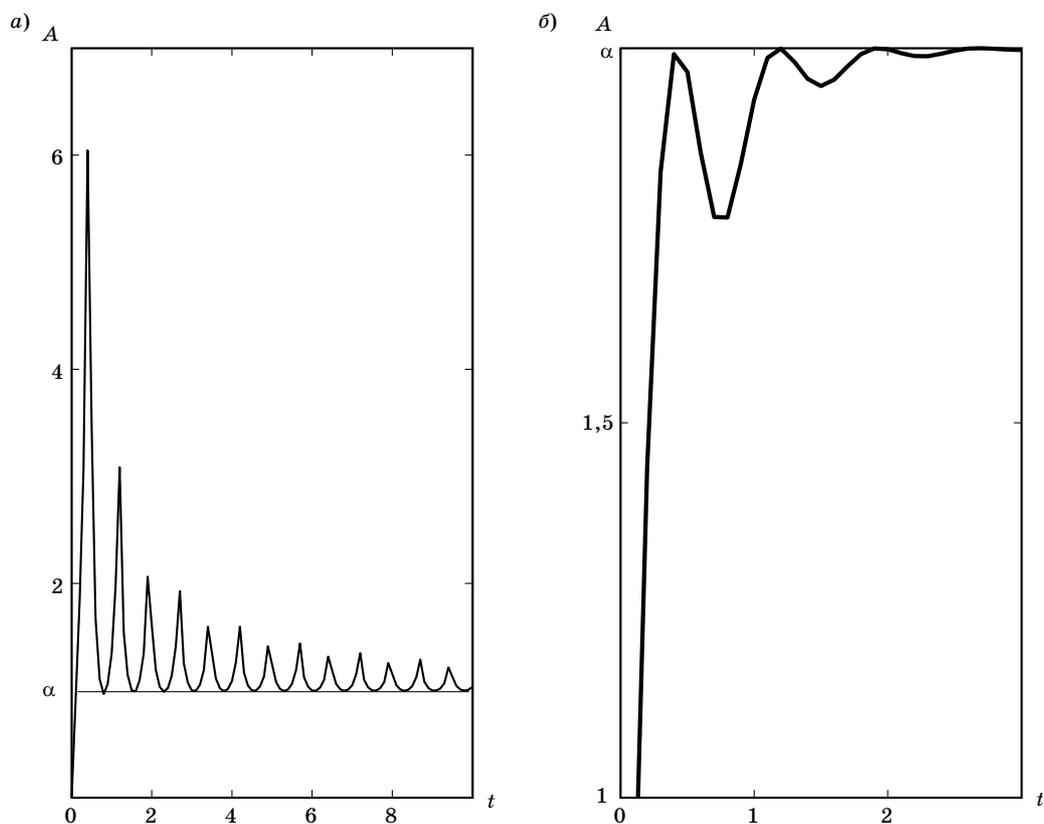
■ Рис. 3. Траектории, уровень



■ Рис. 4. Вероятности и плотности времени пересечения



■ Рис. 5. Пересечение уровня марковским процессом



■ Рис. 6. Коэффициент A

ла,  $\tau_0 = \beta^{-1} \arccos\left(-\alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)$ , так что функция корреляции на интервалах  $(0, \tau_0)$ ,  $(\tau_0 + 3/4, \tau_0 + 6/4)$ , ... положительна, на интервалах  $(\tau_0, \tau_0 + 3/4)$ ,  $(\tau_0 + 6/4, \tau_0 + 9/4)$ , ... — отрицательна (перемена знака корреляционных моментов свойства марковости не нарушает). Показатель  $A = \alpha - \ln|1 + \tau|^{1/\tau}$  марковского представления корреляционной функции  $R(\tau) = (1 + \tau)\exp(-\alpha\tau)$ ,  $\alpha = 2$ , показан на рис. 6, б.

С ростом времени  $A \rightarrow \alpha$  ( $R(\tau) \rightarrow \exp(-\alpha|\tau|)$ ): в первом случае — с затухающими колебаниями с периодом  $T = \pi/\beta$ , во втором — аperiodически.

При расчете условной вероятности (2) для каждого значения времени  $t_0$  используется соответствующее значение коэффициента  $A$ , что равносильно расчету вероятности для нового марковского процесса. Таким образом, в задаче пересечения немарковский гауссов процесс эквивалентен множеству независимых марковских процессов с показателями, соответствующими значению времени  $t_0$ .

Эквивалентностью стационарного процесса множеству марковских процессов можно объяснить появление участков немонотонности условной вероятности (2) (см. рис. 2, а). При небольшой крутизне уровня  $u(t)$  вероятность его пересечения к моменту  $t_0$  на некоторых интервалах времени может уменьшаться за счет флуктуаций показателя  $A$ : условное математическое ожидание процесса и уровень сближаются немонотонно с флуктуирующей дисперсией. Вероятность (2) может трактоваться как функция распределения при условии ее монотонного возрастания.

### Пересечение уровня стационарным гауссовым процессом

Пересечение уровня стационарным гауссовым процессом представляет интерес в задаче измерения времени прихода импульсного сигнала. Если вероятность (2) — условная функция распределения, то ее усреднение по множеству начальных значений дает функцию распределения времени пересечения  $t_0$  стационарным процессом  $n(t) \in N(0, R(\tau))$  с дисперсией  $\sigma^2 = 1$ :

$$\begin{aligned} F(t_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{u(t_0) - x_0 R(t_0)}{\sigma(t_0)}\right) dx_0 = \\ &= |x_0 R(t_0) = v| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2R^2(t_0)}\right) \Phi\left(\frac{u(t_0) - v}{\sigma(t_0)}\right) dv = \\ &= \Phi\left(\frac{u(t_0)}{\sqrt{R^2(t_0) + \sigma^2(t_0)}}\right) = \Phi(u(t_0)). \end{aligned} \quad (7)$$

Плотность распределения времени пересечения

$$f(t_0) = F'(t_0) = \frac{u'(t_0)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2(t_0)}{2}\right). \quad (8)$$

**Пример 3.** На выходе системы с весовой функцией

$$h(t) = \exp(-\alpha t) \sin \beta t, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 4\pi/3,$$

функция корреляции шума (на входе — белый шум) имеет вид (6), входной прямоугольный сигнал с амплитудой  $A$  трансформируется в сигнал [6]

$$s(t) = A(1 - R(t)).$$

Уровень задается в форме переднего фронта сигнала

$$u(t) = s(t) - s_{\max}/2, \quad s_{\max} = s(T) = A(1 + \exp(-3/4)), \quad (9)$$

где  $T = 3/4$  — длительность фронта; математическое ожидание пересекающего (сверху вниз) стационарного шума равно нулю. Такая схема расчета [2] эквивалентна пересечению снизу вверх уровня  $u = s_{\max}/2$  суммой сигнала и шума. На рис. 7, а, кривые 1 и 2, изображены уровни (9), соответствующие значениям отношения сигнал/шум  $d = A/\sigma = A = 3$  и  $d = 5$ .

На рис. 7, б, кривые 1, 2 — монотонная условная функция распределения (2) и производная (4) для начальной точки траектории шума  $x_0 = 2$ ; кривые 3, 4 — то же для  $x_0 = -2$ . Пересечение сверху вниз с вероятностью 1 происходит при  $t_0 \leq T$ , выполнение неравенства (5) при  $t_0 < T$  показывает существование условной плотности (3). Условные плотности распределения времени пересечения  $t_0$  показаны на рис. 8: 1 — для  $x_0 = -2$ ; 2 — для  $x_0 = -1$ ; 3 — для  $x_0 = 1$ ; 4 — для  $x_0 = 2$ . Безусловная плотность (8) (рис. 8, кривая 5)

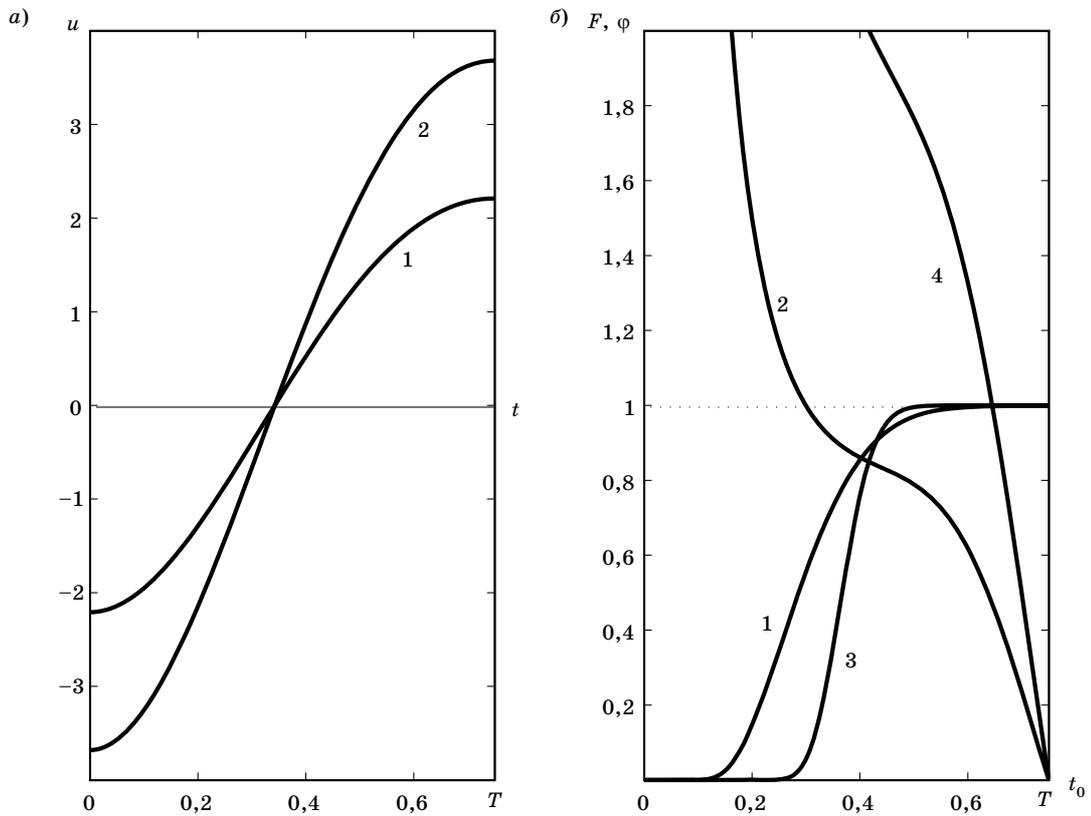
$$f(t_0) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \beta^2}{\beta} \exp\left(-\frac{u^2(t_0)}{2} - t_0\right) \sin \beta t_0,$$

$$\beta = 4\pi/3. \quad (10)$$

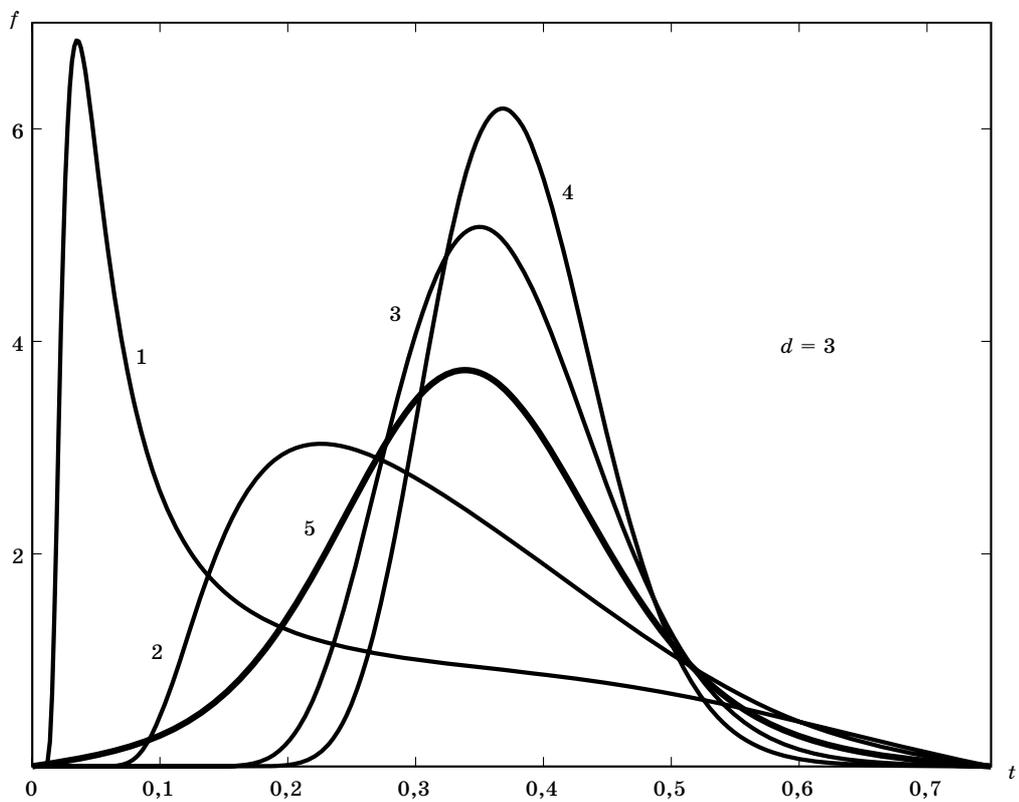
Вероятность (2) учитывает все пересечения, в том числе неоднократные пересечения уровня одной траекторией. Если процесс  $x(t)$  флуктуирует быстрее, чем изменяется уровень  $u(t)$ , возможны неоднократные пересечения; если скорости изменения функций  $x(t)$  и  $u(t)$  соизмеримы, возможно единственное пересечение. Тогда функция распределения (7) описывает первое пересечение. В задаче измерения времени прихода уровнем  $u(t)$  может описываться фронт сигнала или дискриминационная характеристика [2, 7], крутизна которых соизмерима с крутизной траектории шума  $x(t)$ . В этом случае функции (7) и (8) — приближения функции и плотности распределения времени первого пересечения.

**Пример 4.** Для фиксирования пересечений уровня  $U$  траекторией  $X$  в пакете SIGNAL PROCESSING вычислялся индикатор

$$I_t = \text{diff}(\text{sign}(X - U)).$$



■ Рис. 7. Уровни, функции распределения



■ Рис. 8. Плотности распределения

Пример четырехкратного пересечения уровня (9) при  $A = 1/2$  приведен на рис. 9, а. Отрицательные выбросы индикатора (рис. 9, б) формируются в моменты  $j$  дискретного времени, когда наблюдаются переходы от  $x_{j-1} > u_{j-1}$  к  $x_j < u_j$ .

На рис. 10 показаны плотность (10) и гистограмма времени пересечения уровня (9) стационарными траекториями. Из  $N = 10\,000$  сформированных траекторий были исключены ни разу не пересекающие уровень и траектории с начальной точкой  $x_1 < u_1$ , так что остались  $N_{\pi} = 9752$  реализации. Пересечений сверху вниз оказалось  $N_1 = 9769$ , 17 траекторий пересекли уровень неоднократно.

Подсчет числа  $n$  неоднократных пересечений уровня (9) стационарными траекториями позволил оценить вероятность такого события (таблица). Использовались  $N_{\pi}$  реализаций.

$N = 10\,000$

$d$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$N_{\pi}$	6352	7671	8679	9290	9697	9856	9960	9982
$\hat{p}\{n \geq 2\}$	0,023	0,017	0,010	0,008	0,004	0,002	0,001	<0,001

Вероятность трехкратных и более пересечений  $\hat{p}\{n \geq 3\} = 0,002$ , вероятность четырехкратных пересечений  $\hat{p}\{n \geq 4\} < 0,001$  при  $d = 0,5$ . При измерении времени прихода пересечением передним фронтом импульсного сигнала его половинного уровня  $u = s_{\max} / 2$  минимальное отношение сиг-

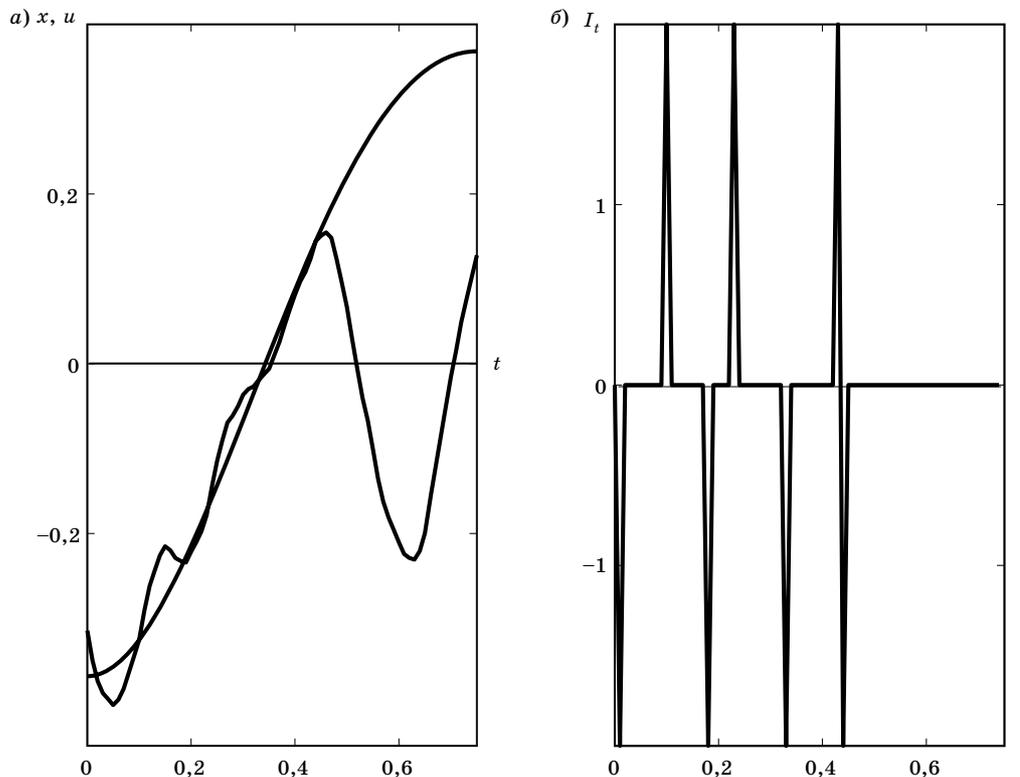
нал/шум  $d_{\min}$  должно быть таким, чтобы вероятность пересечения при отсутствии сигнала была мала. Для сигнала (9) требуется  $d_{\min} > 4$ , следовательно, неоднократные пересечения маловероятны, расчет времени первого пересечения по формулам (7) и (8) допустим.

**Пример 5.** На входе фильтра нижних частот Баттерворта четвертого порядка [4] прямоугольный сигнал в белом шуме. На рис. 11, а показаны передний фронт сигнала  $s(t)$  на выходе фильтра (кривая 1) и несколько стационарных траекторий,  $d = 6$ ,  $\Delta = 0,1$ . Время прихода сигнала  $t_0$  фиксировалось по первому пересечению траектории с уровнем  $u = d/2$  (рис. 11, а, линия 2). Из 10 000 траекторий уровень пересекли 9995. Плотность распределения времени  $t_0$

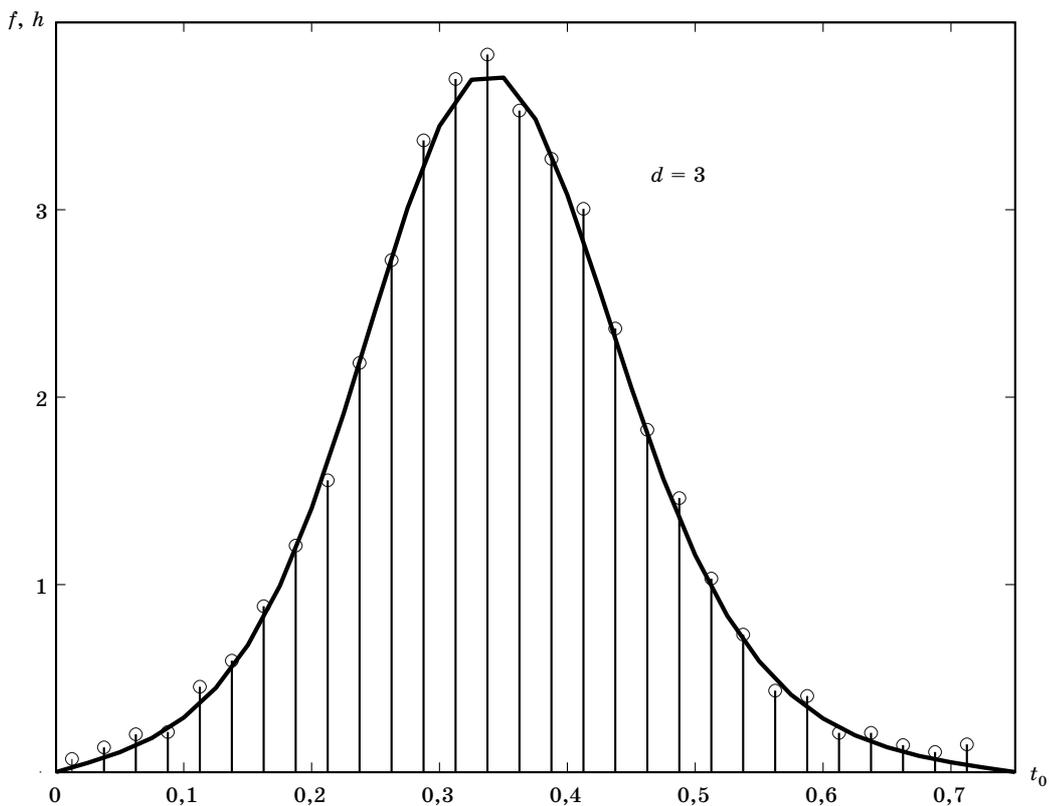
$$f(t_0) = \frac{s'(t_0)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u - s(t_0))^2}{2}\right), \quad (11)$$

смещенная на интервал  $\Delta$ , и гистограмма показаны на рис. 11, б.

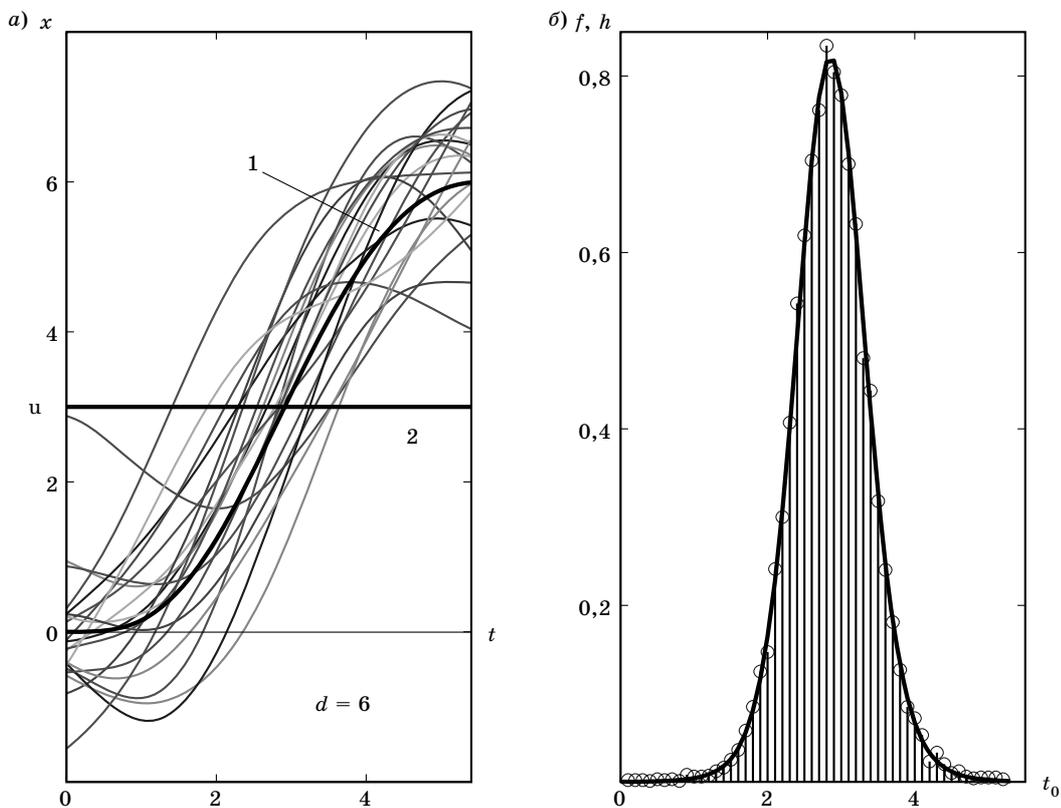
Вычисления выполнялись в SIGNAL PROCESSING. Моделирование проводилось по методике примера 4. Плотность (11) вычислялась как приращение функции распределения  $F(t_0) = 1 - \Phi(u - s(t_0))$  (оператор DIFF), поэтому ее значения сдвинуты по отношению к значениям гистограммы на величину  $\Delta$ . При этом оценка среднего времени  $\hat{t}_0 = 2,961$  оказалась близкой к сред-



■ Рис. 9. Пример четырехкратного пересечения уровня



■ Рис. 10. Плотность распределения



■ Рис. 11. Пересечение на выходе фильтра Баттлерворта

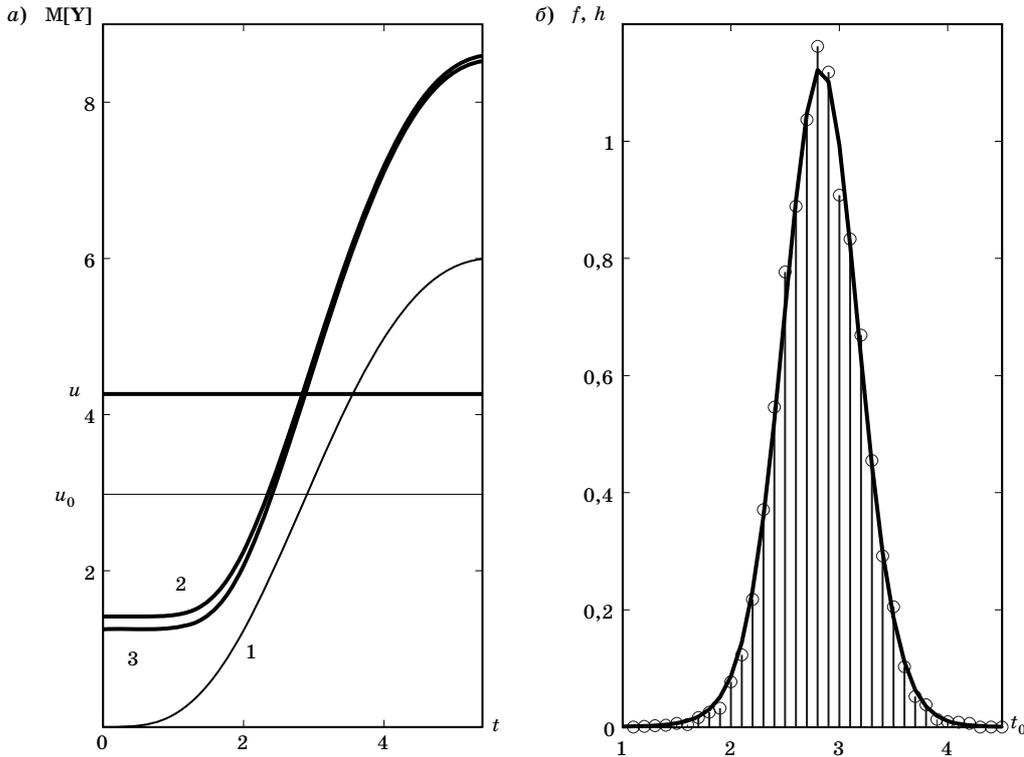


Рис. 12. Плотность распределения времени прихода сигнала

нему  $\bar{t}_0 = 2,959$ . Плотность распределения симметрична (коэффициент асимметрии  $\hat{\gamma}_1 = 0,015$ ), но за счет эксцесса (коэффициент  $\hat{\gamma}_2 = 1,069$ ) распределение отличается от нормального. Оценка дисперсии времени пересечения  $\hat{\sigma}_t^2 = 0,284$  превышает оценку  $\sigma_0^2 = \sigma^2 / k^2 = 0,192$  [2], в которой  $k$  — крутизна фронта в области средней точки пересечения.

В радиотехнических системах измеряется время прихода демодулированного сигнала, описывающегося распределением Райса. Двумерное распределение Райса описывается громоздко [2], одномерное близко к нормальному. Представляет интерес возможность применения простой модели (11) и в этом случае.

Моделирование состояло в генерировании сигнала  $Y = \sqrt{X_C^2 + X_S^2}$ , независимые квадратурные составляющие которого  $X_C, X_S \in N(S, B)$ , и в фик-

сировании момента первого превышения сигналом  $Y$  уровня  $u = M[Y]_{\max} / 2$ .

Среднее значение сигнала  $M[Y] \approx \sqrt{2\sigma^2 + 2S^2}$ , вычисленное для некоррелированного шума (рис. 12, а, кривая 2), близко к полученному экспериментально (рис. 12, а, кривая 3). Фронт исходного сигнала, пересекающего уровень  $u_0$ , показан на рис. 12, а, кривая 1. Плотность распределения времени прихода (рис. 12, б) симметрична ( $\hat{\gamma}_1 = -0,055$ ) и отлична от нормальной:  $\hat{\gamma}_2 = 0,698$ . Оценка дисперсии  $\hat{\sigma}_t^2 = 0,135$ .

Приведенные примеры расчета и моделирования плотности распределения времени пересечения гауссовым процессом заданного уровня позволяют сделать вывод о том, что в задаче измерения времени прихода импульсного сигнала модель двумерного нормального распределения может оказаться достаточной для практических расчетов.

### Литература

1. Тихонов В. И., Хименко В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиофизические приложения // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 5. С. 501–523.
2. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 296 с.
3. Воробьев С. Н. Пересечение гауссовым марковским процессом детерминированного уровня // Информационно-управляющие системы. 2004. № 2. С. 16–20.

4. Воробьев С. Н. Марковская модель пересечения стационарного гауссова процесса с детерминированным уровнем // Информационно-управляющие системы. 2004. № 3. С. 12–16.
5. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. СПб.: Питер, 2001. 480 с.
6. Воробьев С. Н. Эффективное обнаружение детерминированных сигналов / ГУАП. СПб., 2003. 139 с.
7. Митяшев Б. Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. М.: Сов. радио, 1962. 199 с.