

УДК 621.391

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ СПЛАЙН—ВИЛЕНКИНА—КРЕСТЕНСОНА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАДИОСИГНАЛОВ

**С. Н. Агиевич,**

канд. техн. наук, старший научный сотрудник

**В. Л. Беспалов,**

адъюнкт

Военная академия связи им. С. М. Буденного

Рассматриваются возможности использования базисов функций сплайн—Виленкина—Крестенсона для построения аналитических моделей радиосигналов с целью повышения скорости их цифровой обработки. Излагаются основы современной теории сплайн-гармонического анализа. Определяются понятия свертки и корреляции для функций сплайн—Виленкина—Крестенсона. Производится оценка скорости цифровой обработки радиосигналов, полученных на основе представленных моделей.

We study the use of spline-Vilenkin-Chrestenson functions for the construction of analytical models of radiosignals in order to increase the speed of their digital processing. Fundamentals of the modern theory of spline-harmonic analysis are given. For the spline-Vilenkin-Chrestenson functions the notions of convolution and correlation are defined. Finally, we give some estimates for the speed of digital processing of the radiosignals based on the proposed model.

В настоящее время вопрос использования негармонических функций для передачи радиосигналов в системах связи большей частью был вне поля зрения специалистов. Для этой цели широко используются экспоненциальные функции [1]. Они обладают важными достоинствами: во-первых, являются гладкими (бесконечно дифференцируемыми), а во-вторых, при приеме таких радиосигналов с использованием средств цифровой обработки сигналов (ЦОС) для нахождения спектральных коэффициентов, осуществления фильтрации, нахождения корреляционных функций в базисе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ) [2] используются быстрые алгоритмы, например быстрое преобразование Фурье (БПФ). Между тем ДЭФ, лежащие в основе БПФ, являются частным случаем функций Виленкина—Крестенсона (ВКФ). Скорость быстрых преобразований на основе этих функций может быть существенно выше за счет меньшего модуля представления чисел. Однако гладкие (несколько раз дифференцируемые) аналоги для ВКФ до недавнего времени отсутствовали. Ситуация изменилась с появлением множества систем новых базисов [3] на основе сплайн—Виленкина—Крестенсона функций

(СВКФ). СВКФ являются гладкими (положительное свойство экспоненциальных функций), для них имеются быстрые алгоритмы, причем эти алгоритмы для разложения сигналов по СВКФ в общем случае выполняются значительно быстрее, чем вычисляется БПФ (положительное свойство быстрых алгоритмов в базисе ВКФ). Это позволяет разрабатывать практически новые средства связи на базе существующих с меньшими вычислительными затратами на формирование сигналов и обработку в процессе их приема методами ЦОС.

Кратко поясним суть теории сплайн-гармонического анализа (СГА). В ее основе лежат теоремы и следствия, представленные в работах [3–5]. Для сигналов  ${}_{\text{Pal}}S^p(t)$  из пространства  ${}_{\text{Pal}}G_n^p$  периодических сплайнов с упорядочением по Пэли [2] (здесь Pal – значок упорядочения по Пэли,  $p$  – порядок сплайна дефекта 1,  $n$  – номер базисной функции) справедливо:

**Теорема 1.** Обобщенный ряд Фурье-сигнала из  ${}_{\text{Pal}}G_f^p$  представляется:

$${}_{\text{Pal}}S^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_{\text{Pal}}c_n {}_{\text{Pal}}U_n^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}_{\text{Pal}}c_n \frac{{}_{\text{Pal}}m_n^p(t)}{{}_{\text{Pal}}u_n^p},$$

где

$$\text{Pal } c_n = \text{Pal } F_n(z);$$

$$\text{Pal } U_n^p(t) = \frac{\text{Pal } m_n^p(t)}{\text{Pal } u_n^p};$$

$\text{Pal } m_n^p(t) = \frac{1}{N} \sum_k \overline{\text{Pal}}(n, k) M^p \left( t \Theta t_k \right)$ ,  $\mu$  — модуль представления чисел,  $\Theta$  — сдвиг по модулю  $\mu$ ,  $t_k = \left( \frac{p}{2} + k \right) / N$ ,  $N$  — количество и длина базисных функций;

$$\text{Pal } u_n^p = \text{Pal } F_n(M^p) = 1/N \sum_k \overline{\text{Pal}}(n, k) M^p(t_k);$$

$\text{Pal } F_n(z) = \frac{1}{N} \sum_k \text{Pal}(n, k) z_k$ ,  $\text{Pal}(n, k) = w^{\sum_{i=1}^l n_{i+1} - i k_i}$ ,  $w = \exp(j2\pi/\mu)$ ,  $l$  — число разрядов представления числа по модулю  $\mu$ ,  $\overline{\text{Pal}}(n, k)$  — комплексно-сопряженное  $\text{Pal}(n, k)$ .

*Примечание.*  $\text{Pal } U_n^p(t)$ ,  $\text{Pal } m_n^p(t)$  — базисные СВКФ. Они получены с использованием сплайнов дефекта 1 и обладают их свойствами.

**Следствие 1.** При  $\mu = N$  справедливо:

$$\text{Pal } S^p(t) = \text{ДЭФ } S^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n U_n^p(t).$$

**Следствие 2.** При  $\mu = N$  и  $p \rightarrow \infty$  имеем ряд

$$\text{Фурье: } \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mu = N}} \text{Pal } S^p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi j n t}.$$

**Следствие 3.** При  $\mu = N$  и  $p = 1$  справедливо:

$$S^1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n U_n^1(t), \text{ где } \text{Pal } U_n^1(t) \text{ — ДЭФ.}$$

Пример системы базисных функций  $\text{Pal } U_n^p(t)$  с модулем  $\mu = 4$ , порядком сплайна дефекта 1  $p = 3$  показан на рис. 1, а, система ВКФ, из которой функции  $\text{Pal } U_n^p(t)$  получены, продемонстрирована на рис. 1, б.

**Теорема 2.** Обобщенный ряд Котельникова для сигналов  $\text{Pal } S^p(t)$  из пространства непериодических сплайнов  $\text{Pal } G_f^p$  может быть представлен с помощью выражения

$$\text{Pal } S^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \text{Pal } L^p \left( t \Theta t_k \right),$$

где

$$\text{Pal } L^p \left( t \Theta t_k \right) = \frac{1}{F_{\max} - F_{\max}/2} \int_{-F_{\max}/2}^{F_{\max}/2} \text{Pal} \left( f, \frac{k}{F_{\max}} \right) U_f^p(t) df,$$

$f$  и  $F_{\max}$  — текущая и максимальная частоты в базисах,

$$\text{Pal } U_f^p(t) = \frac{\text{Pal } m_f^p(t)}{\text{Pal } u_f^p},$$

$$\text{Pal } m_f^p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\text{Pal}} \left( f, \frac{k}{F_{\max}} \right) M^p \left( t \Theta t_k \right),$$

$$\text{Pal } u_f^p = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\text{Pal}} \left( f, \frac{k}{F_{\max}} \right) M^p(t_k).$$

**Следствие 1.** При  $\mu = N$   $S^p(t)$  представляется кардинальными сплайнами:  $S^p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k L^p(t - t_k)$ ,

$$L^p(t - t_k) = \frac{1}{F_{\max} - F_{\max}/2} \int_{-F_{\max}/2}^{F_{\max}/2} e^{-2\pi j f k / F_{\max}} U_f^p(t) df.$$

**Следствие 2.** При  $\mu = N$  и  $p \rightarrow \infty$  получаем классический ряд Котельникова:  $\text{Pal } S^p(t) \stackrel{\substack{\mu=N \\ p \rightarrow \infty}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \frac{\sin \pi(t - t_k) F_{\max}}{\pi(t - t_k) F_{\max}}$ .

*Замечание.* В обозначениях работы [6] ядро  $\text{Pal } L^{p-1} \left( t \Theta t_k \right)$  можно записать следующим образом:  $\text{Pal } L^{p-1} \left( t \Theta t_k \right) = \sum_{k \in Z} \text{Pal} \left( b_N^{p-1} \right)^{-1} M^{p-1} \left( t \Theta t_k \right)$ .

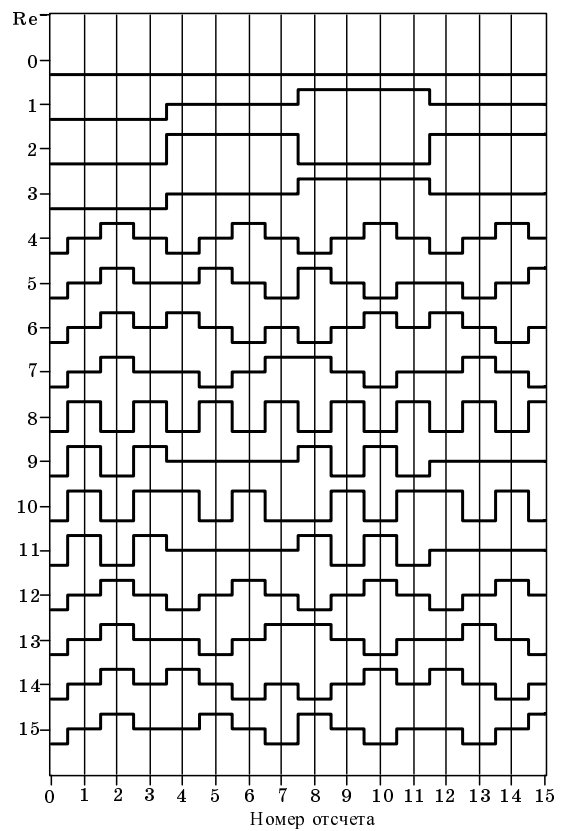
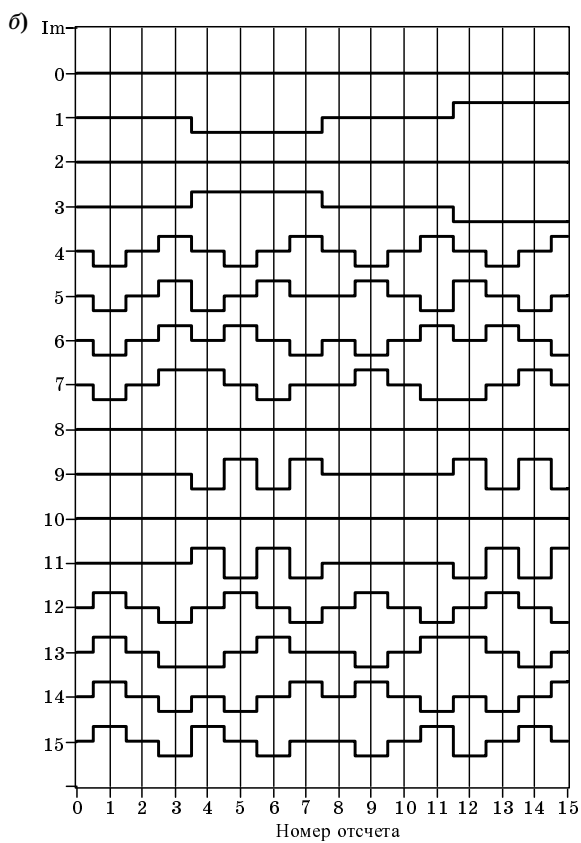
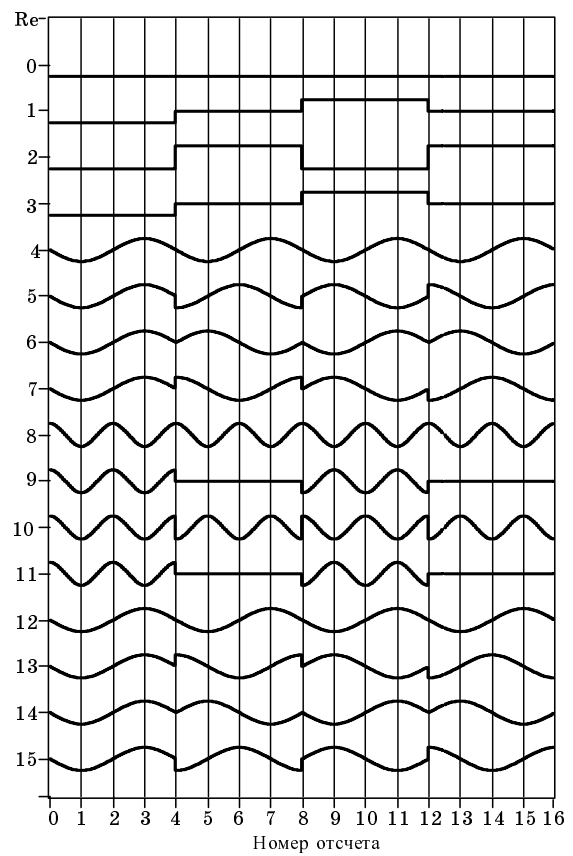
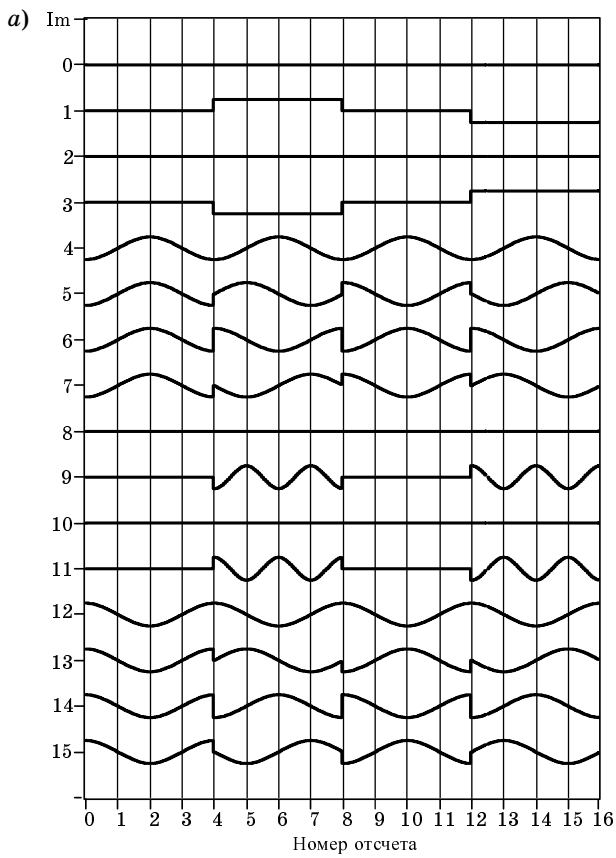
Проанализируем приведенные выше формулировки теорем и следствий к ним с точки зрения возможности построения на их основе аналитических моделей сигналов.

Теорема 1 и следствия к ней позволяют констатировать следующее.

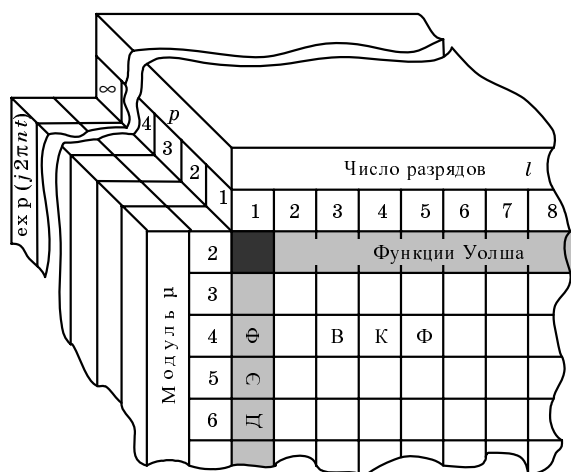
Во-первых, СВКФ в отличие от ВКФ, приобрели свойство гладкости, определяемое параметром  $p$ , которым их наделили сплайны. Следовательно, на их основе возможна реализация радиосигналов (т. е. сигналы, сформированные на основе СВКФ, могут передаваться по радиоканалу).

Во-вторых, существует бесконечный набор систем базисных СВКФ, полученных путем свертки ВКФ и базисных сплайнов (рис. 2). Следовательно, если СВКФ пригодны для формирования радиосигналов, то сменой базисов (которых бесконечное количество) в процессе передачи информации может быть решена задача адаптации сигнала под конкретные условия функционирования системы связи.

В-третьих, частными случаями функций СВКФ являются классические непрерывные экспоненциальные функции. Из этого следует, что на основе СВКФ возможно получение обобщенных аналитических моделей сигналов, частными случаями которых являются известные классические модели на основе  $\sin(t)$ ,  $\cos(t)$ . Средства связи, в основе построения которых будут лежать обобщенные аналитические модели, получают возможность функционирования как в рамках СВКФ, так и



■ Рис. 1. Функции (модуль 4, длина функции  $N = 16$ ): а — СВКФ; б — ВКФ



■ Рис. 2. Базисные функции  $PalU_n^p(t)$

классического экспоненциального базиса. Тем самым может быть заложено важное свойство сопрягаемости существующих и предлагаемых к разработке средств и систем связи.

В-четвертых, основой формирования СВКФ являются дискретные Виленкина—Крестенсона функции (ДВКФ). ДЭФ — частный случай ДВКФ. Для ДВКФ существуют быстрые алгоритмы, подобные алгоритму БПФ. Следовательно, возможно создание универсального модуля формирования сигналов на основе СВКФ. При этом смена базиса может осуществляться чисто программными изменениями или сменой коэффициентов. А скорость цифровой обработки радиосигналов, сформированных на основе СВКФ, может быть существенно увеличена по сравнению со скоростью ЦОС, построенных на основе экспоненциальных функций. Это связано с модулем представления функций  $\mu$  [2].

В-пятых, СВКФ — в общем случае несинусоидальные функции. Следовательно, возникает возможность борьбы с гармоническими помехами.

Теперь перейдем к теореме 2 и следствиям к ней.

Из указанных утверждений следует, что раз существует бесконечный набор систем базисных СВКФ, то существует и бесконечный набор соответствующих ядер, полученных путем свертки соответствующих дискретных и непрерывных СВКФ. Частными случаями этих ядер являются фундаментальные сплайны (ядра Котельникова для сплайнов) и классическое ядро Котельникова. Бесконечный набор ядер — бесконечный набор импульсных характеристик фильтров. Следовательно, если СВКФ пригодны для формирования радиосигналов, то в процессе передачи и приема таких излучений всегда возникает необходимость фильтрации. Выбор импульсной характеристики, соответствующей выбранному базису, может способствовать адаптации системы связи под конкретные условия функционирования.

Приведенный выше анализ теоретических результатов теории СГА показал, что на ее основе

возможно создание аналитических моделей сигналов, реализация которых позволила бы повысить качественные показатели мобильных систем персонального радиосервиса. Поэтому ниже остановимся на получении этих моделей и проанализируем возможность повышения скорости цифровой обработки радиосигналов при осуществлении их регистрации.

Как известно, в качестве модулируемого колебания в классических системах связи обычно используются функции  $\sin(t)$  или  $\cos(t)$ . Другими словами, это мнимая и реальная части экспоненциальной функции. Будем придерживаться такого подхода и при использовании функций СВКФ. Тогда аналитическое выражение для частотно-манипулированного (ЧМ) сигнала может быть записано в следующем виде:

$$S_{Pal}^{\mu(\tau)} S_n^p(t) = A_{Pal}^{\mu(\tau)} U_n^p(t, \varphi), \quad n = 1 \dots R, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \mu = 2 \dots r, \quad T \leq \tau \leq T_\mu, \quad (1)$$

где  $A$  — амплитуда сигнала;  $\varphi$  — фаза — произвольная константа;  $n$  — номер базисной функции (физический смысл — частота в базисе СВКФ);  $R$  — размерность сигнала (количество функций, используемых для формирования сигнала);  $T$  — длительность символа сигнала;  $T_\mu$  — длительность передачи информации в пределах фиксированного базиса.

При этом, естественно, если модуль представления числа  $\mu$  равен длине базисной функции  $N$  ( $\mu = N$ ) и гладкость функции (порядок сплайна дефекта 1)  $p-1 \rightarrow \infty$ , то приходим к классическому аналитическому выражению радиосигнала [1] в терминах экспоненциальных функций:

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mu = N}} S_{Pal}^p S_n^p(t) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mu = N}} A \operatorname{Re}[S_{Pal} U_n^p(t, \varphi)] \rightarrow \\ \rightarrow A \cos(\omega_n t + \varphi), \quad n = 1 \dots R, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Аналогично можно представить выражение для фазоманипулированного (ФМ) сигнала:

$$S_{Pal}^{\mu(\tau)} S_i^p(t) = A_{Pal}^{\mu(\tau)} U_n^p(t, \varphi_i), \quad i = 1 \dots R, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \mu = 2 \dots r, \quad T \leq \tau \leq T_\mu, \quad (3)$$

где  $\varphi_i = 2\pi i/R$  — фаза сигнала. Естественно, что при  $\mu = N$  и  $p \rightarrow \infty$  приходим к классической аналитической модели для фазоманипулированного сигнала [1]:

$$\lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mu = N}} S_{Pal}^p S_i^p(t) = \lim_{\substack{p \rightarrow \infty \\ \mu = N}} A \operatorname{Re}[S_{Pal} U_n^p(t, \varphi_i)] \rightarrow \\ \rightarrow A \cos(\omega_n t + \varphi), \quad i = 1 \dots R, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4)$$

Выражения (1) и (3) — это аналитические модели сигналов, на основе которых возможно формирование радиосигналов для передачи и приема информации. Проанализируем эти выражения с точки зрения скорости ЦОС этих радиосигналов.

При осуществлении радиоприема методами ЦОС часто возникает необходимость фильтрации, определения спектральных характеристик, нахождения корреляционных функций. При радиосигналах, построенных с использованием классических моделей, для достижения этих целей может использоваться алгоритм БПФ. Поэтому целесообразно произвести оценку скорости ЦОС радиосигналов, сформированных на основе (1), (3), сравнительно с БПФ. Однако, прежде всего, необходимо определить, каким образом свертка, корреляция определяются в терминах СГА при обработке дискретных отсчетов. В этом нам помогут следующие теоремы.

**Теорема о спектре свертки двух сигналов.**

Пусть

$$\text{Pal } S^p(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} q_k M^p \left( t \Theta t_k \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z_k L^p \left( t \Theta t_k \right) \in \sigma^p; \quad (5)$$

$$\text{Pal } S^b(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k M^b \left( t \Theta t_k \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k L^b \left( t \Theta t_k \right) \in \sigma^b; \quad (6)$$

$$\text{Pal } F_n(a) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \text{Pal}(n, k), \quad a = \{a_k\}_0^{N-1}, \quad (7)$$

тогда:

1)  $\text{Pal } S^p(t_k) *_{\mu} \text{Pal } S^b(t) \in \sigma^{p+b}$  — свертка сплайнов порядка  $p$  и  $b$  есть сплайн порядка  $p + b$  (здесь  $*$  — знак свертки);

2)  $\frac{1}{N} \overline{\text{Pal } S^p(t_k) *_{\mu} \text{Pal } S^b(t_k)} = \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal } F_n(y) \text{Pal } F_n(z) \times \text{Pal}(n, k) = \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal } F_n(a) \text{Pal } F_n(q) \text{Pal } m_n^{p+b}(n, k)$  — спектр комплексно-сопряженной свертки двух сигналов (сплайнов) есть произведение спектров этих сигналов (здесь  $\overline{\phantom{x}}$  — знак комплексного сопряжения).

**Доказательство 1:**

$$\begin{aligned} \text{Pal } S^p(t_k) *_{\mu} \text{Pal } S^b(t) &= \sum_{t_k=0}^{N-1} \text{Pal } S^p(t_k) \text{Pal } S^b \left( t \Theta t_k \right) = \\ &= \sum_{t_k=0}^{N-1} q_k M^p(t_k) a_k M^b \left( t \Theta t_k \right) = \\ &= \sum_{t_k=0}^{N-1} q_k a_k M^{p+b} \left( t \Theta t_k \right) \in \sigma^{p+b}. \end{aligned}$$

**Доказательство 2:**

$$\text{Pal } S^p(t_k) *_{\mu} \text{Pal } S^b(t_k) = \sum_{t_i=0}^{N-1} \text{Pal } S^p(t_i) \text{Pal } S^b \left( t_k \Theta t_i \right).$$

Пусть  $t_k = k, t_i = i$ , тогда:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{N-1} \text{Pal } S^p(i) \text{Pal } S^b \left( k \Theta i \right) &= \\ = \sum_{i=0}^{N-1} \text{Pal } S^p(i) \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal } F_n(a)} \overline{\text{Pal } m_n^b \left( k \Theta i \right)} &= \\ = \sum_{i=0}^{N-1} \text{Pal } S^p(i) \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal } F_n(a)} \overline{\text{Pal } m_n^b(k) \text{Pal}(n, i)} &= \\ = \sum_{i=0}^{N-1} \text{Pal } S^p(i) \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal } F_n(a)} \overline{\text{Pal } u_n^b \text{Pal}(n, k) \text{Pal}(n, i)} &= \\ = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal } F_n(a)} \overline{\text{Pal } u_n^b} \sum_{i=0}^{N-1} q_k M^p(i) \text{Pal}(n, i) \overline{\text{Pal}(n, k)} &= \\ = N \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal } F_n(a)} \overline{\text{Pal } u_n^b} \overline{\text{Pal } F_n(q)} \overline{\text{Pal } u_n^p \text{Pal}(n, k)} &= \\ = N \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal } F_n(a) \text{Pal } F_n(q) \text{Pal } m_n^{p+b}(n, k)}. \end{aligned}$$

Перейдем в исходном и конечном выражениях к комплексно-сопряженным функциям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \overline{\text{Pal } S^p(t_k) *_{\mu} \text{Pal } S^b(t_k)} &= \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal } F_n(y) \text{Pal } F_n(z) \text{Pal}(n, k) = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal } F_n(a) \text{Pal } F_n(q) \text{Pal } m_n^{p+b}(n, k). \end{aligned}$$

Таким образом, спектр комплексно-сопряженной свертки двух сигналов, описываемых сплайнами, есть произведение спектров этих сплайнов.

Из теоремы следует, что при свертке двух сигналов (сплайнов) результирующий сигнал есть сплайн, у которого порядок равен сумме порядков сплайнов  $p + b$ . Вместе с тем, если, например, сигнал и импульсная характеристика фильтра описываются сплайнами порядка  $p$  и  $b$  соответственно, то на выходе фильтра будет последовательность, описываемая сплайном порядка  $p + b$ , но для ее получения в спектральной области достаточно перемножить спектры сигналов в базисе ВКФ.

**Теорема 3.** Спектр взаимокорреляционной функции  $B_{S^p, S^b}(i)$  сигналов  $\text{Pal } S^p(t)$  в соответствии с (5) и  $\text{Pal } S^b(t)$  в соответствии с (6) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{S^p, S^b}(i) &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal } F_n(y) \overline{\text{Pal } F_n(z)} \text{Pal}(n, i) = \\ &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal } F_n(a) \text{Pal } F_n(q) \text{Pal } m_n^{p+b}(n, i). \end{aligned}$$

**Доказательство:**

$$\begin{aligned}
 B_{S^p, S^b}(i) &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p(k) \text{Pal} \overline{S^b} \left( k \Theta i \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p(k) \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(a) \text{Pal} m_n^b \left( k \Theta i \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p(k) \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(a) \text{Pal} m_n^b(k) \text{Pal}(n, i) = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p(k) \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(a) \text{Pal} u_n^b \text{Pal}(n, k) \text{Pal}(n, i) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(a) \text{Pal} u_n^b \text{Pal}(n, i) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p(k) \text{Pal}(n, k) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(a) u_n^b \overline{\text{Pal} F_n(q) \text{Pal} u_n^p} \text{Pal}(n, i) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(y) \overline{\text{Pal} F_n(z)} \text{Pal}(n, i) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(a) \text{Pal} F_n(q) \text{Pal} m_n^{p+b}(n, i).
 \end{aligned}$$

**Следствие 1.** Спектр автокорреляционной функции сигнала  $\text{Pal} S^p(t)$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B(i) &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(z) \overline{\text{Pal} F_n(z)} \text{Pal}(n, i) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(q) \text{Pal} F_n(q) \text{Pal} m_n^{2p}(n, i).
 \end{aligned}$$

Это выражение можно трактовать как теорему Винера—Хинчина применительно к СВКФ.

**Следствие 2.** Спектр взаимокорреляционной функции сигналов  $\text{Pal} m_n^p(t)$  и  $\text{Pal} S^b(t)$  в соответствии с (6) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_{m_n^p, S^b}(i) &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(y) \text{Pal}(n, i) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(a) \text{Pal} m_n^{p+b}(n, i).
 \end{aligned}$$

**Следствие 3.** Спектр автокорреляционной функции сигнала  $\text{Pal} m_n^p(t)$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B(i) &= \text{Pal} m_n^p(k) *_{\mu} \text{Pal} m_n^p(k) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} m_n^{p+p}(n, i) = N \sum_{n=0}^{N-1} (\text{Pal} u_n^p)^2 \text{Pal}(n, i).
 \end{aligned}$$

**Теорема об инвариантности энергетического спектра относительно  $\mu$ -сдвига.**

Энергетический спектр сигнала  $\text{Pal} S^p(t)$  в базисе СВКФ не изменяется при его  $\mu$ -сдвиге, т. е.

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p \left( k \Theta i \right) \text{Pal} S^p \left( k \Theta i \right) &= N \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal} F_n(z)} \text{Pal} F_n(z) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal} F_n(q) \text{Pal} F_n(q) \text{Pal} u_n^p(k) \text{Pal} u_n^p(k)}.
 \end{aligned}$$

**Доказательство:**

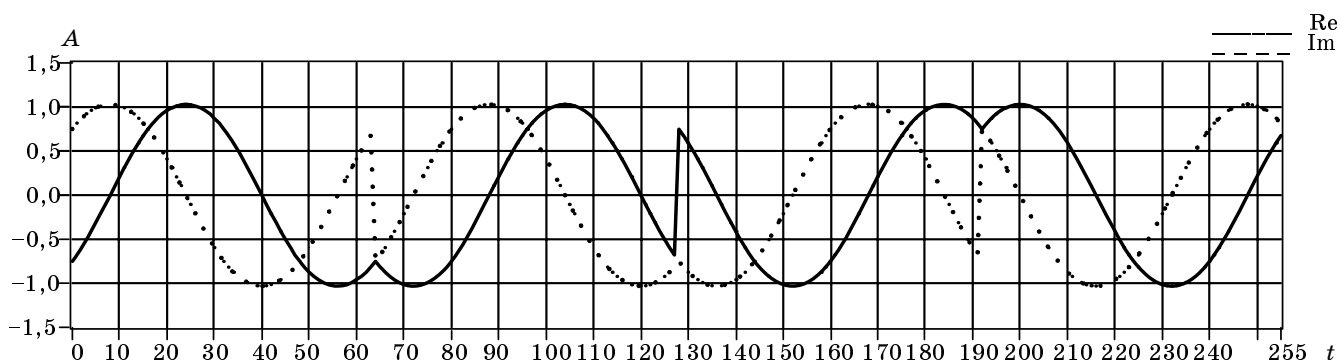
$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p \left( k \Theta i \right) \text{Pal} S^p \left( k \Theta i \right) &= \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p \left( k \Theta i \right) \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(q) \text{Pal} m_n^p \left( k \Theta i \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \text{Pal} S^p \left( k \Theta i \right) \sum_{n=0}^{N-1} \text{Pal} F_n(q) \text{Pal} m_n^p(k) \text{Pal}(n, i) = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\text{Pal} F_n(q) \text{Pal} m_n^p(k) \text{Pal}(n, i)} F_n(q) \text{Pal} m_n^p(k) \text{Pal}(n, i) = \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal} F_n(q) \text{Pal} F_n(q) \text{Pal}(n, i) \text{Pal}(n, i)} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\text{Pal} m_n^p(k) \text{Pal} m_n^p(k)} = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal} F_n(q) \text{Pal} F_n(q) \text{Pal}(n, i) \text{Pal}(n, i)} \text{Pal} u_n^p(k) \text{Pal} u_n^p(k) = \\
 &= N \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal} F_n(z) \text{Pal} F_n(z)} = N \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\text{Pal} F_n(q) \text{Pal} F_n(q) \text{Pal} u_n^p(k) \text{Pal} u_n^p(k)},
 \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

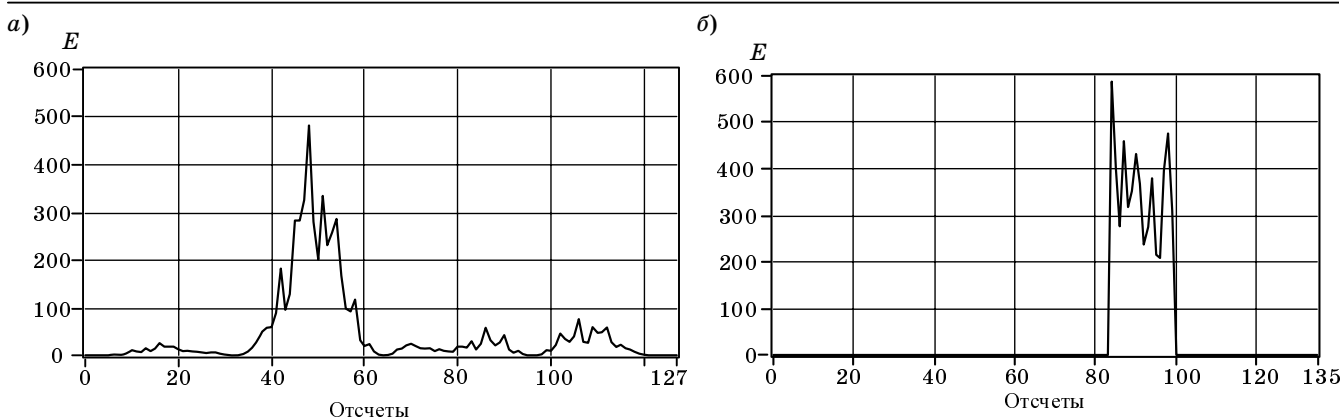
Таким образом, во-первых, результатами операций свертки, корреляции сигналов, описываемых сплайнами, являются сплайны, порядок которых есть сумма порядков исходных сигналов; во-вторых, при обработке таких сигналов методами ЦОС возможно использование алгоритма ДПФ, а следовательно, и БПФ в базисах ВКФ. Для перехода в базис СВКФ достаточно осуществить  $N$  умножений в спектральной области. Теперь имеется все для проведения оценки скорости ЦОС радиосигналов, сформированных на основе (1), (3), сравнительно с БПФ.

В качестве примера рассмотрим сигнал ФМ-4, сформированный в базисе СВКФ с параметрами:  $\mu = 4, l = 2, p = 4, n = 7$  (рис. 3). Его спектр в базисе Фурье представлен на рис. 4, а, спектр в базисе СВКФ — на рис. 4, б. Для сравнения на рис. 5 показан спектр Фурье классического сигнала ФМ-4. При этом скорости передачи информации, осуществляемой обоими сигналами, одинаковы.

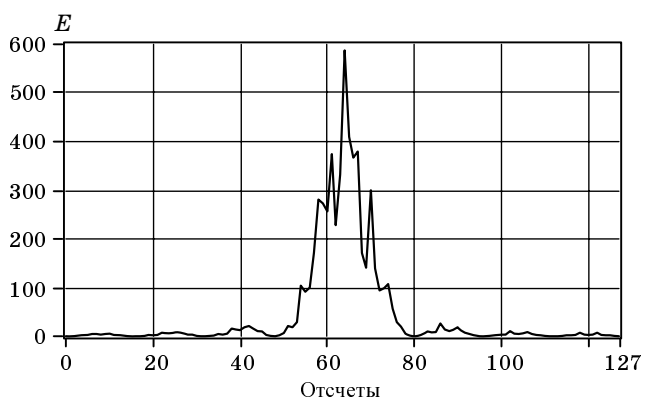
Нельзя не отметить, что при равной скорости передачи информации занимаемые полосы частот в базисе Фурье (см. рис. 4, а, 5) обоими сигналами сравнимы. А энергия сигнала ФМ-4 (см. рис. 3), рассматриваемая в собственном базисе, сосредоточена более компактно (см. рис. 4, б). Это обстоя-



■ Рис. 3. Сигнал ФМ-4 в базе СВКФ



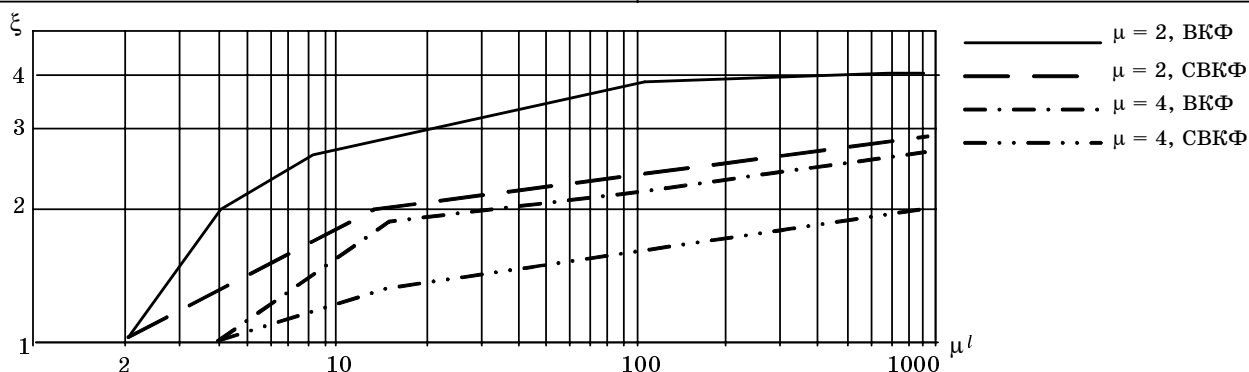
■ Рис. 4. Спектр сигнала ФМ-4: а — в базе Фурье; б — в базе СВКФ



■ Рис. 5. Спектр Фурье классического сигнала ФМ-4

тельство подтверждает положение о возможности передачи информации посредством использования предлагаемых аналитических моделей сигналов. Сравним вычислительные затраты, требуемые для получения спектров, представленных на рис. 4, б и 5.

Для достижения этой цели будем пользоваться подходом, предложенным в работе [2]. Из результатов, приведенных в этом источнике, вытекает следующее. Если принять, что на операцию умножения и сложения тратится одинаковое время, то предельный выигрыш по скорости обработки в условиях использования функций Уолша (в алгоритме БПУ — быстрого преобразования Уолша) будет достигать  $\xi = 5$  раз по сравнению с ис-



■ Рис. 6. Выигрыш в объеме вычислений БПФ при переходе от базиса ДЭФ к базисам ВКФ и СВКФ

пользованием функций ДЭФ (в алгоритме БПФ), а при использовании ВКФ по модулю 4 преимущество достигает величины  $\xi = 3,25$ .

В нашем случае для получения спектра в базе СВКФ использовался алгоритм сплайн-БПФ в базах СВКФ [3]. Согласно этому алгоритму, на  $N$  входных точек преобразования дополнительно к стандартному объему вычислений необходимо добавить  $N$  операций умножения. Что приводит к увеличению объема вычислений по сравнению с классическими алгоритмами БПУ и БПФ в базе ВКФ по модулю 4. Однако выигрыш в этих случаях по сравнению с использованием алгоритма БПФ все равно оказывается существенным. Используя данные об объеме вычислений при выполнении алгоритма БПФ [7] и результаты из статьи [2], покажем выигрыш в скорости ЦОС графически (рис. 6).

Таким образом, можно констатировать следующее. В работе представлены аналитические модели радиосигналов, на основе которых реально осуществление передачи и приема информации в радиоканалах систем мобильной связи. При этом излучаемые радиосигналы описываются гладкими функциями, поэтому возможно их непосредственное излучение в эфир обычным образом. Кроме того, при равной скорости передачи информации занимаемые полосы частот в базе Фурье для классического сигнала ФМ-4 и сформированного в базе СВКФ сравнимы. А объем вычислений в процессе ЦОС радиосигналов, сформированных и обработанных в базе СВКФ, может быть существенно сокращен по сравнению с объемом вычислений для сигналов, основанных на классических моделях.

### Литература

1. Скляр Б. Цифровая связь: Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003. 1099 с.
2. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. радио, 1975. 208 с.
3. Агиевич С. Н. Сплайн—Виленкина—Крестенсона функции в представлении сигналов // Научное приборостроение. 2002. Т. 12. № 1. С. 79–89.
4. Желудев В. А. Периодические сплайны и быстрое преобразование Фурье // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1992. Т. 31. № 2. С. 179–198.
5. Zheludev V. A. Periodic splines, harmonic analysis and wavelets in Signal and image representation in combined spaces, wavelet // Anal. Appl., 7 / eds Y. Y. Zeevi and R. Coifman. Academic Press, San Diego, CA, 1998. P. 477–509.
6. Unser M. Splines // IEEE Signal Processing Magazine. 1999. Vol. 16. N 6. P. 22–38.
7. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 848 с.