УДК 519.174

ОДНОЗНАЧНО РАСКРАШИВАЕМЫЕ ГРАФЫ С МИНИМУМОМ РЕБЕР

Ю. П. Великохатько,
научный сотрудник
НИИ электротехнических устройств
А. А. Миронов,
канд. техн. наук, доцент
Санкт-Петербургский университет информационных технологий, механики и оптики

Построен граф с количеством ребер, минимально допустимым для однозначно K-раскрашиваемого графа. Показано, как при помощи операций двух типов указанный граф можно преобразовать в множество всех графов этого класса (для произвольно заданного числа вершин). Доказано, что все такие графы (K – 1)-связны. Найдено выражение для числа ребер в таких графах, а также даны уравнения, полезные для практических целей, в частности, для различных задач оптимизации.

In this paper a uniquely K-colorable graph with minimum possible number of edges is being constructed. It is shown that the graph can be transformed into the set of all possible graphs of that kind (for any specified number of vertices) using only two kinds of transformations. It has been proven that all such graphs are (K – 1)-connected. An expression for the number of edges in such graphs is derived as well as some equations that have practical applications, in particular, in solving various optimization problems.

Введение

Известно, что в определении однозначно раскрашиваемых графов имеется условие неизменности разбиения на части множества вершин графа. Авторы включили это вполне естественное условие стабильности разбиения в определение многодольных графов, что позволило оба класса упомянутых графов считать одним классом. Такой подход оправдан, поскольку разбиение множества вершин графа на K частей порождает K классов эквивалентности, которые называются одноцветными классами в однозначно K-раскрашиваемом графе или долями в графе K-дольном. В тексте статьи используются оба термина.

Открытый авторами новый класс графов с минимумом ребер (однозначно K-раскрашиваемых или K-дольных) представлен специально построенным графом определенной структуры, который в качестве исходного расширен при помощи двух операций до множества всех графов этого класса.

Основная часть

На сегодняшний день в теории графов определение K-дольного графа допускает для одного и того же графа различные толкования числа доль и количественного состава отдельной доли. Таково, например, определение 2-дольного графа и аналогичных ему K-дольных графов в работе [1].

Использование понятия разбиения в определении многодольного графа требует уточнения способа сохранения частей разбиения в неизменном количественном составе. В полном K-дольном графе это требование уже выполнено: в нем отсутствует неоднозначность в идентификации той или иной доли. Действительно, каждая доля содержит вершины одной и той же степени, равной количеству вершин в остальных долях. При этом доли четко разграничены одна от другой несмежностью вершин внутри доли и наличием ребер между вершинами различных долей.

Поэтому полный K-дольный граф можно использовать в качестве опорного при формулировке определения K-дольного.

K-дольным будем называть граф с множеством вершин, разбитым на подмножества, именуемые долями, в пределах каждой из которых все вершины взаимно-несмежны, а ребрами соединены только вершины различных доль; при этом восстановление ребер до их максимального количества (до полного K-дольного графа) не меняет количества и состава доль.

Очевидно, что в K-дольном графе существует некоторое минимально допустимое количество ребер, служащее границей K-дольности. В частности, это следует из того, что восстановление ребер в пустом графе не может быть выполнено однозначно.

Тождественность K-дольности и однозначной K-раскрашиваемости графов обусловлена отношением эквивалентности, определяющим структуру этих графов.

В первом случае части разбиения именуются долями, во втором — одноцветными классами, в обоих — это классы эквивалентности.

Используя вышеприведенное определение K-дольного графа, авторы открыли класс K-дольных графов с минимально допустимым количеством ребер, который принципиально ничем не отличается от класса однозначно K-раскрашиваемых графов с минимумом ребер.

Известно выражение для минимального числа ребер, используемое для максимальных планарных графов [2, теорема 12.21]:

$$\sum_{i<j}(p_i + p_j - 1).$$

Установим для этого выражения пределы изменения i, j от 1 до K, где K — количество частей разбиения всех p вершин некоторого графа с минимумом ребер, когда каждая часть насчитывает p_i или p_j вершин. Обозначим минимальное количество ребер $q_{\min}$ и выполним необходимые преобразования:

$$q_{\min} = \sum_{1\le i<j\le K}(p_i + p_j - 1) = (p_1 + p_2 - 1) + \ldots +$$
$$+ (p_2 + p_3 - 1) + \ldots + (p_{K-1} + p_K - 1) =$$
$$= (K-1)p_1 + (K-1)p_2 + \ldots + (K-1)p_K - \binom{K}{2} =$$
$$= (K-1)\sum_{i=1}^{K} p_i - \binom{K}{2}.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^{K} p_i = p$, запишем

$$q_{\min} = (K-1)p - \binom{K}{2}. \qquad (1)$$

Полученное выражение (1) естественно интерпретируется как минимально допустимое количество ребер в однозначно K-раскрашиваемом графе с p вершинами, где в каждом из K одноцветных классов насчитывается p_i вершин.

Получим формулу (1) иначе, учитывая однозначную K-раскрашиваемость любого полного K-дольного графа. Для этого используем формальное тождество

$$p_1 p_2 - (p_1 - 1)(p_2 - 1) \equiv p_1 + p_2 - 1. \qquad (2)$$

Подведя выражение (2) под знак суммы, получим

$$\sum p_i p_j - \sum (p_i - 1)(p_j - 1) \equiv \sum (p_i + p_j - 1),$$

где $1 \le i < j \le K$.

Поскольку справа от знака тождества выражение (1), то можно записать:

$$q_{\min} = \sum p_i p_j - \sum (p_i - 1)(p_j - 1) = (K-1)p - \binom{K}{2}, \qquad (3)$$

где $1 \le i < j \le K$, $p = \sum_{i=1}^{K} p_i$.

В выражении (3) слева от второго знака равенства разность количеств ребер двух полных K-дольных графов, причем каждая доля второго уменьшена на одну вершину.

Заодно найдем разность численных значений характеристик связности тех же двух графов. Связность первого равна $p - p_i^{\max}$, где $p_i^{\max}$ — наибольшая доля в графе. Связность второго графа соответственно будет $(p - K - p_i^{\max} + 1)$. Их разность равна $K - 1$.

Построим граф с количеством ребер согласно (1), следуя в точности выражению (3). Для этого в полном K-дольном графе с p вершинами и с p_i вершинами в каждой доле следующим образом устраним все излишние ребра: в каждой доле оставим по одной вершине с первоначальной степенью $(p - p_i)$ со всеми инцидентными ей ребрами. Все остальные ребра уберем. Результат соответствует вычитанию количества ребер второго графа из первого согласно (3).

Построенный граф является K-дольным и имеет минимально допустимое количество ребер, сохраняющее части разбиения в неизменном виде. Этот же граф можно назвать однозначно K-раскрашиваемым с минимумом ребер.

Проверим это, исследуя структуру графа. Каждый одноцветный класс в нем, имея p_i вершин, соединен $[(p - p_i) + (p_i - 1)(K - 1)]$ ребрами со всеми остальными вершинами графа. Каждая пара одноцветных классов имеет $(p_i + p_j - 1)$ общих ребер, т. е. представляет собой подграф, порожденный объединением двух одноцветных классов. Этот подграф — дерево. Структура такого дерева представляет собой звезду с двумя центральными вершинами.

Поскольку в правых частях выражений (1) и (3) нет p_i, нетрудно сделать вывод, что формула (1) справедлива для всех разбиений p на K частей.

Найдем графы, соответствующие этим разбиениям. При этом K вершин в графе со степенью $(p - p_i)$ назовем особыми. Все остальные $p - K$ вершин имеют степень $(K - 1)$, являющуюся минимально допустимой, обеспечивающей необходимое условие однозначной K-раскраски графа и его

$(K-1)$-связности. Количество вершин степени $(K-1)$ максимально в графе с такой структурой.

Перебросим конец произвольно выбранного ребра в исходном графе с одной особой вершины на особую вершину того же цвета, что и другой конец выбранного ребра. Вершину степени $(K-1)$, которой инцидентен другой конец этого ребра, переместим в ту часть разбиения (одноцветный класс), где находится особая вершина с отсоединенным концом ребра. В результате получится граф с той же структурой, что исходный, но с другим количественным составом частей разбиения. Повторение такой операции позволяет получить все множество графов со структурой исходного, т. е. с максимумом вершин степени $(K-1)$, соответствующее всем разбиениям p на K частей.

Следующая операция преобразует каждый граф, принадлежащий тому или иному разбиению, в множество графов, относящихся только к этому разбиению.

Разгрузим от ребер особые вершины, перебрасывая освободившиеся концы на вершины степени $(K-1)$, принадлежащие той же части разбиения, что и освобождаемая от ребер особая вершина. Эта операция позволяет получить из экстремального распределения вершин в каждом одноцветном классе (с максимумом вершин степени $K-1$) все остальные их распределения.

В результате описанных операций двух типов получено множество всех графов, отвечающих (1) и (3). Их однозначная K-раскрашиваемость обусловлена однозначной 2-раскрашиваемостью деревьев, входящих в структуру графов. Дерево-подграф не допускает частичной перекраски одноцветного класса, служащей признаком неоднозначной раскрашиваемости.

Доказательство однозначной 2-раскрашиваемости любого дерева можно извлечь из известной теоремы Кёнига [3]. Несмотря на то что в ней нет упоминания об этой однозначности, метод четно-соединимых вершин, использованный в теореме, приводит к двум классам эквивалентности, которые в дереве являются одноцветными классами однозначно 2-раскрашиваемого графа.

В любом K-дольном графе с минимумом ребер имеется $\binom{K}{2}$ подграфов-деревьев, порожденных объединениями пар подмножеств, являющихся частями разбиения множества вершин. Характеристикой связности графа является наименьшее количество вершинно-непересекающихся цепей, связывающих любые две его вершины. Если эти две вершины принадлежат дереву, то между ними имеется требуемая цепь. Нетрудно убедиться, что цепь также имеется, если такая пара вершин принадлежит двум деревьям с общей долей, причем неважно, каким двум долям из трех принадлежит эта пара.

Поскольку степень вершины, равная $(K-1)$, является минимально допустимой степенью для рассматриваемого класса графов и ограничивает сверху количественное значение связности, убедимся, что для любой пары вершин найдется $K-1$ вершинно-непересекающихся цепей. Для этого докажем теорему.

Теорема. Всякий K-дольный граф с минимумом ребер $(K-1)$-связен.

Доказательство. Рассмотрим вершины упомянутой пары с точки зрения их принадлежности одной или различным долям графа. Пусть обе вершины принадлежат одной и той же доле. Тогда имеется $K-1$ деревьев с этой долей и, следовательно, $K-1$ цепей между рассматриваемыми вершинами. Пусть теперь обе вершины пары принадлежат различным долям. Тогда, во-первых, они принадлежат дереву, образованному из этих долей, что обеспечивает одну цепь между ними. Во-вторых, в графе имеется $K-2$ пар деревьев, где каждая пара содержит деревья с интересующими нас вершинами и с общей долей. Каждая такая пара деревьев обеспечивает необходимую цепь. Таким образом, между вершинами разных доль имеется $K-1$ цепь.

Следовательно, между любой парой вершин графа имеется $K-1$ вершинно-непересекающихся цепей. Доказательство закончено.

Проиллюстрируем изложенное примером, приняв $K=4$ и пронумеровав доли 1, 2, 3, 4.

Пусть пара интересующих нас вершин принадлежит доле 1. Связность обеспечена деревьями 12, 13, 14.

Пусть вершины находятся в долях 1 и 2. Связность обеспечена деревом 12 и парами деревьев 13 и 23, 14 и 24.

С целью практического построения и анализа однозначно K-раскрашиваемых графов предлагаются без вывода нижеследующие соотношения. Это уравнения возрастающих степеней вершин для графов с числом ребер $q_{\min}=(K-1)p-\binom{K}{2}$ и для выделенного в таком графе одноцветного класса (доли).

Уравнение для графа:

$$\sum_{i=K-1}^{i=\max}(i-K+2)p_i=K(p-K+1), \qquad (4)$$

где $K-1\le i\le p-1$; K — количество частей разбиения; p — количество всех вершин в графе; p_i — количество вершин степени i в графе.

Уравнение для выделенного в графе одноцветного класса (доли):

$$\sum_{i=K-1}^{i=\max}(i-K+2)p_i=(p-K+1), \qquad (5)$$

где $K-1\le i\le p-1$; K — количество частей разбиения (одноцветных классов, доль); p — количество всех вершин в графе; p_i — количество вершин степени i в выделенном одноцветном классе (доле).

Примечание. p_i в выражениях (4) и (5) не одно и то же.

Сумма степеней всех вершин выделенного одноцветного класса (доли)

$$\sum d = (K-2)p_j + p - K + 1, \qquad (6)$$

где p_j – количество всех вершин в выделенном одноцветном классе.

Заключение

Однозначно K-раскрашиваемые графы с минимальным количеством ребер и значением связности $(K-1)$ могут быть использованы в различных задачах оптимизации, например, коммуникационных сетей.

Литература

1. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. С. 11.
2. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
3. **Зыков А. А.** Основы теории графов. М.: Наука, 1987. С. 98.