УДК 621.39

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕМОВ С ДВУМЕРНЫМИ СИГНАЛЬНЫМИ КОНСТРУКЦИЯМИ ПО ТОЧНЫМ ФОРМУЛАМ ВЕРОЯТНОСТИ ОШИБКИ В КАНАЛЕ БЕЗ ЗАМИРАНИЙ И С ОБЩИМИ ЧЕТЫРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ЗАМИРАНИЯМИ

Н. В. Савищенко,
доктор техн. наук, профессор
Военная академия связи

Рассматривается помехоустойчивость модемов с двумерными сигнальными конструкциями в канале без замираний и с общими замираниями и белым шумом при когерентном приеме. Введена новая специальная интегральная $\mathcal{S}$-функция, которая включает в себя $\mathcal{H}$-функцию, функции Лапласа, Оуэна, Никольсона, (обобщенного) Маркума. Введенная $\mathcal{S}$-функция позволяет систематизировать вычисление вероятности ошибки в канале с общими четырехпараметрическими замираниями и белым шумом при когерентном приеме.

We discuss the noise immunity of modems with two-dimensional signal constructions in fadingless channels, channels with common fadings and with white noise during coherent reception. A new special integral $\mathcal{S}$-function with includes the $\mathcal{H}$-function, Laplace's, Owen's, Nicolson's, (generalized) Marcum's fuctions is introduced. The $\mathcal{S}$-function allows for a systematic calculation of error probability in the channel with common four-parameter fadigs and white noise during coherent reception.

В настоящее время в различных системах передачи используются в основном двумерные сигнальные конструкции. Но их многообразие ставит перед исследователями естественный вопрос о том, чем отличаются эти сигнальные конструкции. При равной удельной скорости сравнение осуществляется по энергетическим затратам на передачу одного бита. При этом для многих практически важных каналов связи характерно многолучевое распространение, приводящее к замираниям сигнала, значительно снижающим помехоустойчивость приема. Известные методики расчета вероятности в канале с замираниями основываются на точных формулах в каналах без замираний, которые в научной литературе рассматриваются лишь для относительно простых сигнальных конструкций. В данной статье приведены основные положения по расчету вероятности ошибочного приема в канале с общими замираниями.

Математическая модель канала связи

Предположим, что для передачи цифровой информации используется M сигналов: $s_r(t)$, $r=0,\ M-1$. Сигнал передается на символьном интервале времени T. Математическая модель канала связи представляется выражением

$$y(t)=\mu(t)s_r(t)+n(t),\ \ 0\le t\le T, \qquad (1)$$

где $y(t)$ — принятый сигнал; $\mu(t)$ — коэффициент передачи канала; $s_r(t)$ — переданный сигнал и $n(t)$ — белый гауссов шум с односторонней спектральной плотностью шума N_0. В данной модели можно выделить два наиболее важных случая, рассматриваемых в статье:

1) если $\mu(t)=1$, $0\le t\le T$, то получаем классический канал с аддитивным белым гауссовым шумом;

2) если $\mu(t)=\mu$, $0\le t\le T$, где μ — случайная величина, то приходим к каналу с неселективными по частоте общими замираниями. В этом случае предполагается, что замирания настолько медленны, что фазу сигнала можно оценить по принимаемому сигналу без ошибок.

В соответствии с теоремой ортогонализации Грама—Шмидта произвольный сигнал $s_r(t)$, $r=0,\ M-1$ может быть представлен в виде $s_r(t)=\sum_{\nu=1}^{N}s_{r\nu}\varphi_\nu(t)$, где $\varphi_\nu(t)$ — базисные функции.

Это позволяет перейти к геометрической интерпретации сигналов и рассматривать их в конечном евклидовом пространстве, при этом может быть определена энергия любого сигнала: $E_r = \sum_{\nu=1}^{N} s_{r\nu}^2$. Так как все энергии конечны, т. е. $E_r < \infty$, $r = \overline{0,\ M-1}$, то среди них есть сигналы, имеющие максимальную энергию, которую будем обозначать E_m: $E_m = \max\limits_{r=0,\ M-1} E_r$. Очевидно, что $E_r \le E_m$, $r = \overline{0,\ M-1}$ и энергия E_m конечна, т. е. $E_m < \infty$. Средняя энергия сигнала определяется как $E_c = \sum_{r=0}^{M-1} p(r) E_r$, где $p(r)$ — априорная вероятность передачи r-го сигнала. Обычно величина средней энергии определяется для случая, когда все сигналы равновероятны, т. е. $p(r) = 1/M$: $E_c = \frac{1}{M}\sum_{r=0}^{M-1} E_r$. Отношение максимальной энергии к средней энергии есть квадрат пикфактора: $\Pi^2 = E_m / E_c$.

Расстояние между двумя сигналами может быть представлено в виде $d_{rk} = \|s_r - s_k\|$ или $d_{rk} = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{N} (s_{r\nu} - s_{k\nu})^2}$. Среди всех возможных значений d_{rk} есть минимальная величина $d = \min\limits_{r \ne k} d_{rk}$, $r, k = \overline{0,\ M-1}$, отличная от нуля, если $r \ne k$. Традиционно величина d называется минимальным евклидовым расстоянием. В дальнейшем будут использоваться также коэффициенты помехоустойчивости $g_m = \left(\frac{d}{2\sqrt{E_m}}\right)^2$ и $g_c = \left(\frac{d}{2\sqrt{E_c}}\right)^2$.

Отношение максимальной энергии и средней энергии к односторонней спектральной плотности шума определяется соответственно как $h_m^2 = \frac{E_m}{N_0}$ и $h_c^2 = \frac{E_c}{N_0}$, при этом $h_m^2 = \Pi_c^2 h_c^2$. Величины $E_{bm} = \frac{E_m}{\log_2 M}$ и $E_{bc} = \frac{E_c}{\log_2 M}$ — соответственно максимальное и среднее значения энергии, затраченной для передачи одного бита: $h_{bm}^2 = \frac{E_{bm}}{N_0}$, $h_{bc}^2 = \frac{E_{bc}}{N_0}$, $h_{bm}^2 = \Pi_c^2 h_{bc}^2$ и $h_c^2 = h_{bc}^2 \log_2 M$.

Точные формулы вероятности ошибки в M-ичном символе и на бит сигналов ФМ-M.

Вероятность ошибки в M-ичном символе ($M \ge 2$) двумерного сигнала ФМ-M при когерентном приеме в канале с детерминированными параметрами и белым шумом [1, 2]

$$P_e = Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\frac{\pi}{M}\right) + 2T\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\frac{\pi}{M},\ \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{M}\right), \quad (2)$$

где $h_m^2 = E_m / N_0$, E_m — максимальная энергия сигналов ФМ-M; $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$ — функция Лапласа и $T(\nu, a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^a \exp\left[-\frac{\nu^2}{2}\left(1+x^2\right)\right]\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, $\nu \ge 0,\ a \ge 0$ — функция Оуэна.

Для расчета вероятности ошибки на бит при манипуляционном кодировании кодом Грея для ФМ-M ($M = 2^k$) справедливы следующие формулы [2]:

$$P_{b1} = P_{b2} = \frac{4}{M}\sum_{i=1}^{M/4} Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\left[\frac{(2i-1)}{M}\pi\right]\right)$$

для первых двух бит и для бит $i \ge 3$

$$P_{bi} = \frac{2^{i+1}}{M}\sum_{j=1}^{M/4} (-1)^{\mathrm{ent}\left[\frac{j-1}{2^{k+1-i}}\right]} \times$$
$$\times T\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\frac{(2j-1)\pi}{M},\ \mathrm{ctg}\,\frac{(2j-1)\pi}{M}\right),$$

где $M = 2^k$, в частности:

$$P_{b3} = 2P_{b1} - \frac{16}{M}\sum_{j=1}^{M/8} Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\frac{(2j-1)\pi}{M}\right) \times$$
$$\times Q\left(\sqrt{2h_m^2}\cos\frac{(2j-1)\pi}{M}\right).$$

Используя свойства функции Оуэна, нетрудно показать, что справедливы следующие верхние и нижние границы ($i \ge 3$): $\frac{2^i}{M} Q_1 \le P_{bi} \le 2^{i-2} P_{b1}$, где $Q_m = Q\left(\sqrt{2h_m^2}\sin\left[\frac{m\pi}{M}\right]\right)$. Для средней вероятности ошибки на бит имеем

$$\frac{1}{k}P_e \le \frac{2}{k}Q_1 \le P_b = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} P_{bi} \le \frac{M}{2k}P_{b1}.$$

Приведем примеры расчета вероятности ошибки для сигналов квадратурной амплитудной модуляции, используемых в современных модемах.

1. *Сигналы КАМ-16 (факс-протокол V.29).* Согласно рекомендации протокола V. 29 (факс-про-

токол модуляции V. 29 по рекомендации МККТТ), в модемах может использоваться сигнальное созвездие КАМ-16 с четырьмя градациями амплитуды и восемью градациями фазы, для которой

$$E_m = \frac{25}{4}d^2, \quad E_c = \frac{27}{8}d^2 \text{ и } d = \frac{2\sqrt{E_m}}{5} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2E_c}{3}},$$

$$\Pi_c^2 = \frac{50}{27} = 1,(851), \; h_{bm}^2 = \Pi^2 h_{bc}^2.$$

Данная сигнальная конструкция КАМ-16 обладает пониженной чувствительностью к дрожанию (флуктуациям) фазы несущей частоты благодаря большему, по сравнению с классическими сигналами КАМ-16, углу между сигнальными точками. Вероятность ошибки на символ в этом случае вычисляется по формуле

$$P_e = \sum_{k=1}^{4} a_k T\left(b_k\sqrt{h_{bc}^2}, c_k\right) + \sum_{k=1}^{4} d_k Q\left(f_k\sqrt{h_{bc}^2}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{3} g_k Q\left(p_k\sqrt{h_{bc}^2}\right) Q\left(s_k\sqrt{h_{bc}^2}\right),$$

где

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} & \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \; \vec{s} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

2. *Сигналы КАМ-16 (стандарт MIL-STD-188-110B).* На основе результатов, приведенных в работе [2], показано, что вероятность ошибки на символ для КАМ-16, образуемой объединением двух сигналов фазовой модуляции (внутренней ФМ-4 и внешней ФМ-12) и используемой в стандарте MIL-STD-188-110B, в канале с детерминированными параметрами и аддитивным белым шумом при оптимальном когерентном приеме по правилу максимального правдоподобия, равна:

$$P_e = \sum_{k=1}^{8} a_k T\left(b_k \Pi_c \sqrt{h_{bc}^2 \log_2 M}, c_k\right) + Q\left(\lambda \Pi_c \sqrt{h_{bc}^2 \log_2 M}\right) + \\ + g Q^2\left(\lambda \Pi_c \sqrt{h_{bc}^2 \log_2 M}\right),$$

где

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \rho & \rho & k & k & \lambda & \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} = \Big(\operatorname{ctg}\xi \;\; \operatorname{ctg}\varphi \;\; \operatorname{ctg}\psi \;\; \operatorname{tg}\left(\xi - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{ctg}\chi \;\; \operatorname{ctg}(2\varphi) \;\; \operatorname{ctg}(\xi + \psi) \;\; \operatorname{ctg}\left(2\xi - \frac{2\pi}{3}\right)\Big),$$

$$g = -\frac{1}{4}.$$

При этом

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}} = 0,555129;$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}} = 0,461989; \; \lambda = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = 0,366025;$$

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3}{\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}; \; \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 1;$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - 3}{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}; \; \sin\chi = \frac{2 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{8\rho k}.$$

Максимальная и средняя энергии определяются как

$$E_m = \frac{d^2}{2 - \sqrt{3}}, \; E_c = \frac{1 - \sqrt{3}/8}{2 - \sqrt{3}} d^2,$$

где d — минимальное евклидово расстояние сигнальной конструкции. Квадрат пикфактора $\Pi_c^2 = \frac{8}{8 - \sqrt{3}} = 1,276335$. Значения $h_m^2 = \frac{E_m}{N_0}$, $h_c^2 = \frac{E_c}{N_0}$ есть, соответственно, отношение максимальной и средней энергий к односторонней спектральной плотности шума, $h_m^2 = \Pi_c^2 h_c^2$, $h_c^2 = h_{bc}^2 \log_2 M$, $M = 16$. Коэффициенты помехоустойчивости

$$g_m = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} = 0,066987; \; g_c = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8 - \sqrt{3}} = 0,085498.$$

3. *Сигналы КАМ-32 (стандарт цифрового телевидения DVB-T).* Точная формула средней вероятности ошибки в M-ичном символе при оптимальном когерентном приеме двумерных сигналов КАМ-32 по правилу максимального правдоподобия в канале с детерминированными параметрами и аддитивным белым шумом при равновероятных битах источника получена в виде [3]

$$P_e=\frac{1}{8}Q\left(\sqrt{h_{bc}^2}\right)+\frac{26}{8}Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{h_{bc}^2}\right)-\frac{23}{8}Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{h_{bc}^2}\right).$$

Максимальная и средняя энергии определяются как $E_m=\frac{17}{2}d^2$, $E_c=5d^2$, коэффициенты помехоустойчивости $g_m=\frac{1}{34}=0{,}029412$, $g_c=\frac{1}{20}=0{,}05$.

4. *Сигналы КАМ-32 (стандарт MIL-STD-118-110).* Точная формула средней вероятности ошибки в M-ичном символе при оптимальном когерентном приеме двумерных сигналов КАМ-32-MIL (стандарт MIL-STD-118-110) по правилу максимального правдоподобия в канале с детерминированными параметрами и аддитивным белым шумом при равновероятных битах источника получена в виде

$$P_e=\sum_{k=1}^{10}\tau_k T\left(\xi_k\Pi_c\sqrt{h_{bc}^2\log_2 M},\,\omega_k\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{6}\rho_k Q\left(\eta_k\Pi_c\sqrt{h_{bc}^2\log_2 M}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}q_k Q\left(\nu_k\Pi_c\sqrt{h_{bc}^2\log_2 M}\right)Q\left(y_k\Pi_c\sqrt{h_{bc}^2\log_2 M}\right),$$

где

$$\vec{\tau}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

$$r=\frac{\cos\alpha-3\sin\alpha}{2},$$

$$\vec{\xi}=\left(\frac{2r\cos(\psi-2\alpha)}{\sqrt{2}\sin\psi}\quad \frac{2r\operatorname{ctg}\psi}{\sqrt{2}}\quad \frac{2r}{\sqrt{2}}\quad \sqrt{2}\sin\alpha\quad \sqrt{2}\sin\alpha\rightarrow\right.$$
$$\rightarrow\sqrt{2}\sin\alpha\quad \frac{2r\cos(2\alpha)}{\sqrt{2}\sin\psi}\quad \frac{2r\cos(2\alpha)}{\sqrt{2}\sin\psi}\rightarrow$$
$$\left.\rightarrow\frac{\sin\chi}{\cos\theta}\left(\frac{2r\cos(2\alpha)}{\sqrt{2}\sin\psi}\right)\sqrt{2}\sin\beta\right),$$

$$\vec{\omega}=\left(\operatorname{tg}(\psi-2\alpha)\quad \operatorname{tg}\psi\quad \operatorname{ctg}\psi\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\gamma}{2}\right)\rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi\ \operatorname{tg}\gamma\ \ \operatorname{tg}(2\alpha)\ \operatorname{tg}\theta\ \ \operatorname{ctg}\chi\ \operatorname{ctg}(2\gamma)\right),$$

$$\vec{\rho}=\begin{pmatrix}\frac{5}{16} & \frac{19}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\end{pmatrix},$$

$$\vec{\eta}=\left(\frac{2r}{\sqrt{2}}\ \sqrt{2}\sin\alpha\ \frac{2r\operatorname{ctg}\psi}{\sqrt{2}}\ \frac{2r\cos(\psi-2\alpha)}{\sqrt{2}\sin\psi}\rightarrow\right.$$
$$\left.\rightarrow\frac{\sin\chi}{\cos\theta}\left(\frac{2r\cos(2\alpha)}{\sqrt{2}\sin\psi}\right)\sqrt{2}\sin\beta\right),$$

$$\vec{q}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & -1\end{pmatrix},\ \vec{\nu}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\sin\alpha & \frac{2r}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\sin\alpha\end{pmatrix},$$

$$\vec{y}=\begin{pmatrix}\frac{2r}{\sqrt{2}} & \frac{2r\operatorname{ctg}\psi}{\sqrt{2}} & \sqrt{2}\sin\alpha\end{pmatrix}.$$

Соответствующие углы определяются по формулам:

$$3\alpha+\beta=\frac{\pi}{4},\ \sin\gamma=\frac{1}{2}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\ \operatorname{tg}k=\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{tg}\psi=\frac{\cos(2\alpha)}{1-\cos(2\alpha)}\operatorname{tg}(k-\alpha),$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{3\sin\alpha-\sin(3\alpha)}{\cos(3\alpha)-3\sin\alpha},\ \varphi=\psi-2\alpha-\theta,$$

$$\chi=\frac{\pi}{4}+\psi-2\alpha+\theta-\gamma.$$

Для определения угла α необходимо найти решение уравнения $f(\alpha)=0$, где

$$f(\alpha)=1-6\sin\alpha\left(\sin(3\alpha)+\cos(3\alpha)\right)+14\sin^2\alpha,$$

которое после элементарных преобразований можно свести, например, к уравнению

$$21\operatorname{tg}^4\alpha+18\operatorname{tg}^3\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha-6\operatorname{tg}\alpha+1=0.$$

Численное решение этого уравнения $\sin\alpha = 0{,}173405$, $|f(\alpha)|\cong 5{,}5\cdot 10^{-17}$. В стандарте MIL-STD-118-110 этому углу соответствует значение $\sin\alpha=0{,}173415$, $|f(\alpha)|\cong 4{,}9\cdot 10^{-5}$. В дальнейшем вычисления вероятности ошибки осуществлялись для значения угла, определенного в стандарте.

Максимальная и средняя энергии равны:

$$E_m=\frac{d^2}{4\sin^2\alpha},\ E_c=\frac{1}{8}\left(10+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)d^2.$$

Коэффициенты помехоустойчивости $g_m=\sin^2\alpha$, $g_c=2\left(10+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)^{-1}$ или, соответственно, $g_m=0{,}030073$, $g_c=0{,}04624$. Таким образом, по средней энергии сигналы КАМ-32 эффективнее КАМ-32-MIL, но по максимальной энергии они проигрывают. Квадрат пикфактора $\Pi_c^2=\frac{2}{1+10\sin^2\alpha}$ или $\Pi_c^2=1{,}537601$.

5. *Сигналы КАМ-64* ($M=64$). Построены на основе квадратной решетки с внешними точками, сдвинутыми по оси координат. Использовались в модеме Paradyne при скорости передачи 14,4 кбит/с [4, с. 591, рис. 9.18, *а*]. Вероятность ошибки на символ

$$P_e=\sum_{k=1}^{6}a_kT\left(b_k\sqrt{h_{bc}^2},\,c_k\right)+\sum_{k=1}^{3}d_kQ\left(f_k\sqrt{h_{bc}^2}\right)+$$
$$+\,gQ^2\left(p\sqrt{h_{bc}^2}\right),$$

где

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}\vartheta & \vartheta & \sqrt{3}\vartheta & \vartheta & \sqrt{3}\vartheta & \sqrt{7}\vartheta\end{pmatrix},$$

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{3}} & 3\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3}\end{pmatrix},$$

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}\frac{47}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16}\end{pmatrix},\ \vec{f}=\begin{pmatrix}\vartheta & \sqrt{7}\vartheta & \sqrt{2}\vartheta\end{pmatrix},\ g=-\frac{47}{16},$$

$$p=\vartheta,\ \vartheta=\frac{4\sqrt{\log_2 M}}{\sqrt{313+7\sqrt{3}}},$$

$$\Pi_c^2=16\frac{26+7\sqrt{3}}{313+7\sqrt{3}}=1{,}876173.$$

Рассмотрим теперь гексагональные сигнальные конструкции.

1. Вероятность ошибки для треугольной HEX-8 (2, 2, 4) [4, с. 592, рис. 9.17] составляет

$$P_e=\frac{9}{2}T\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{h_{bc}^2},\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+T\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{h_{bc}^2},\,\sqrt{3}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}T\left(2\sqrt{h_{bc}^2},\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{2}Q\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{h_{bc}^2}\right)+\frac{1}{4}Q\left(2\sqrt{h_{bc}^2}\right).$$

Квадрат пикфактора $\Pi_c^2=\frac{14}{9}=1{,}(5)$.

2. *Сигналы ГЕКС-16.* Для сравнения приведем формулу для вероятности ошибки на символ для ГЕКС-16, $M=16$ [4, с. 594, рис. 9.20, *а*]. Полученный сигнальный ансамбль ГЕКС часто изображается в виде трех состыкованных шестиугольников. Для этой сигнальной конструкции максимальная энергия $E_m=4d^2$, средняя энергия $E_c=\frac{9}{4}d^2$, квадрат пикфактора $\Pi_c^2=\frac{16}{9}=1{,}(7)$, коэффициенты помехоустойчивости $g_m=\frac{1}{16}$, $g_c=\frac{1}{9}$. Вероятность ошибки на символ может быть определена по формуле [2]

$$P_e=\sum_{k=1}^{3}a_kT\left(b_k\sqrt{h_{bc}^2},\,c_k\right)+\sum_{k=1}^{2}d_kQ\left(f_k\sqrt{h_{bc}^2}\right),$$

где

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{27}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{8}\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{3}{16}\end{pmatrix},\ \vec{f}=\begin{pmatrix}\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

3. *Сигналы ГЕКС-64.* Приведем точные формулы вероятности ошибки двумерного гексагонального набора при $M=64$, $\Pi_c^2=\frac{268}{141}=1{,}900709$ [5, с. 16, рис. 1, *д*]:

$$P_e=\sum_{k=1}^{3}a_kT\left(b_k\sqrt{h_{bc}^2},\,c_k\right)+\sum_{k=1}^{2}d_kQ\left(f_k\sqrt{h_{bc}^2}\right),$$

где

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{75}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{16}\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{47}} & \frac{4}{\sqrt{47}} & \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{47}}\end{pmatrix},$$

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\ \vec{d}=\begin{pmatrix}\frac{7}{32} & \frac{3}{32}\end{pmatrix},$$

$$\vec{f}=\begin{pmatrix}\frac{4}{\sqrt{47}} & \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{47}}\end{pmatrix}.$$

Для сигнальной конструкции, применяемой в модеме Codex/ESE SP 14.4 [4, с. 594, рис. 9.20, *б*], вероятность ошибки на символ

$$P_e=\sum_{k=1}^{6}a_kT\left(b_k\sqrt{h_{bc}^2},\,c_k\right)+\sum_{k=1}^{3}d_kQ\left(f_k\sqrt{h_{bc}^2}\right),$$

где

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\frac{297}{32} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{3}{32} & -\frac{3}{32} & \frac{3}{32}\end{pmatrix},$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{8}{9}\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{7}} & \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{7}} & \frac{8\sqrt{3}}{9} & \frac{8}{9}\sqrt{\frac{3}{7}}\end{pmatrix},$$

$$\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{5}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} & 3\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}\frac{3}{16} & \frac{3}{64} & \frac{3}{64}\end{pmatrix},\ \vec{f}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9}\sqrt{\frac{3}{7}} & \frac{8}{3}\sqrt{\frac{1}{7}} & \frac{8\sqrt{3}}{9}\end{pmatrix},$$

$$\Pi_c^2=\frac{1216}{567}=2{,}144621.$$

Рассмотрим теперь методику расчета вероятности ошибки приема сигнальных конструкций при общих замираниях. Вероятность ошибки при общих замираниях определяется как

$$P=\int_0^\infty P_{e/b}\left(\sqrt{h_{c,\mu}^2}\right)\omega(\mu)\,\mathrm{d}\mu, \qquad (3а)$$

где $P_{e/b}$ — вероятность ошибки (в символе/бите) в канале с детерминированными параметрами и белым шумом; $\omega(\mu)$ — плотность распределения вероятностей; μ – коэффициент передачи. В общем случае вероятность ошибок двумерных сигналов при когерентном приеме в канале с детерминированными параметрами и белым шумом может быть представлена в виде [6]

$$P_{e/b}\left(h_{bc}^2\right)=\sum_k a_k T\left(\alpha_{k1}\sqrt{h_{bc}^2},\eta_k\right)+\sum_k b_k Q\left(\alpha_{k2}\sqrt{h_{bc}^2}\right)+ +\sum_k c_k Q\left(\alpha_{k3}\sqrt{h_{bc}^2}\right)Q\left(\alpha_{k4}\sqrt{h_{bc}^2}\right), \quad (3б)$$

где $T(\nu,a)$, $\nu\ge 0, a\ge 0$ и $Q(x)$ соответственно функции Оуэна и Лапласа. Примеры, подтверждающие это положение, приведены в [2–4, 6, 7].

Основная сложность заключается в вычислении интеграла вида (3) от функций Лапласа, их произведения, а также от функции Оуэна и получении аналитических формул, удобных для проведения расчетов. Результаты получены в основном для относительно «простых» законов распределения — Релея и Накагами, меньше — для закона распределения Райса.

Дадим краткую характеристику методики расчета вероятности ошибки при медленных общих замираниях.

Пусть

$$h_{c,\mu}^2=\frac{P_{c,\mu}T}{N_0}=\mu^2\frac{P_{c\text{п}}T}{N_0},\quad P_{c,\mu}=\mu^2 P_{c\text{п}},$$

где $P_{c,\mu}$ – мощность принятого сигнала, а $P_{c\text{п}}$ — мощность переданного сигнала. Тогда математическое ожидание мощности сигнала определяется как

$$\overline{P_{c,\mu}}=\int\limits_0^\infty P_{c,\mu}\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=P_{c\text{п}}\int\limits_0^\infty \mu^2\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=m_2P_{c\text{п}},$$

где $m_2=\overline{\mu^2}$ — начальный момент второго порядка. Следовательно, $P_{c\text{п}}=\overline{P_{c,\mu}}/m_2$ и $h_{c,\mu}^2=\mu^2\frac{1}{m_2}\frac{\bar{P}_{c,\mu}T}{N_0}=$ $=\mu^2\frac{1}{m_2}h_c^2$. При расчете по (3а) необходимо вместо величины h^2, входящей в формулу для вероятности ошибки в гауссовом канале, подставить величину $h_{c,\mu}^2=\mu^2h_c^2/m_2$ и вычислить полученный интеграл.

Наиболее общим законом распределения замираний является четырехпараметрический закон распределения вероятностей случайного коэффициента передачи канала μ [3]:

$$\omega(\mu_c,\mu_s)= =\frac{1}{2\pi\sigma_c\sigma_s}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_c^2}(\mu_c-m_c)^2-\frac{1}{2\sigma_s^2}(\mu_s-m_s)^2\right],$$

$$\mu=\sqrt{\mu_c^2+\mu_s^2},$$

где m_c и m_s — математические ожидания квадратурных составляющих μ_c и μ_s; $\mu_0=\sqrt{m_c^2+m_s^2}$ — регулярная составляющая коэффициента передачи; σ_c^2 и σ_s^2 — дисперсии квадратурных составляющих μ_c и μ_s. Следуя [7], наряду с параметрами m_c, m_s, σ_c^2, σ_s^2 будем использовать параметры, имеющие наглядный физический смысл.

1. Отношение дисперсий квадратурных составляющих σ_c^2 и σ_s^2 — величина $q^2=\frac{\sigma_c^2}{\sigma_s^2}$. Коэффициент q^2 характеризует асимметрию канала по дисперсиям. Без ограничения общности рассматриваются значения q^2 из интервала [0, 1], т. е. $0\le q^2\le 1$.

2. Фазовый угол $\varphi_0=\mathrm{arctg}\frac{m_s}{m_c}$ или $\mathrm{tg}\varphi_0=\frac{m_s}{m_c}$.

3. Отношение средних мощностей регулярной и флуктуирующей частей сигнала — $\gamma^2=\frac{m_c^2+m_s^2}{\sigma_c^2+\sigma_s^2}=$ $=\frac{\mu_0^2}{\sigma_c^2+\sigma_s^2}$. Это выражение удобнее представить в виде $\gamma^2=\frac{2q^2}{1+q^2}\frac{\mu_0^2}{2\sigma_c^2}=\frac{2q^2}{1+q^2}\gamma_0^2$, где $\gamma_0^2=\frac{\mu_0^2}{2\sigma_c^2}$ — величина, характеризующая глубину замираний в канале с райсовскими замираниями ($q^2=1$). Коэффициент $\frac{2q^2}{1+q^2}\in[0,1]$ характеризует уменьшение γ^2 по сравнению с величиной γ_0^2. При релеевских замираниях $\gamma_0^2=0$, в канале без замираний $\gamma_0^2\to\infty$ (присутствует только регулярная составляющая). Следует заметить, что величина γ^2 может принимать одинаковые значения при разных значениях γ_0^2 и q^2. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы выполнялось тождество $\frac{\gamma_{0,1}^2}{\gamma_{0,2}^2}=\frac{1+q_1^{-2}}{1+q_2^{-2}}$. Кроме этого справедливы следующие соотношения:

$$\gamma^2=\frac{m_c^2}{\sigma_c^2}\frac{q^2}{1+q^2}\frac{1}{\cos^2\varphi_0}\ \text{или}\ \gamma^2=\frac{m_s^2}{\sigma_s^2}\frac{1}{1+q^2}\frac{1}{\sin^2\varphi_0}.$$

4. Средний квадрат коэффициента передачи (начальный момент второго порядка) $m_2=\mu_0^2+$ $+\sigma_c^2+\sigma_s^2$ или $m_2=2\sigma_c^2\left(1+\frac{\mu_0^2}{2\sigma_c^2}+\frac{1-q^2}{2q^2}\right)=$ $=2\sigma_c^2\left(1+\gamma_0^2+\frac{1-q^2}{2q^2}\right)$, $q^2\ne 0$. Если $q^2=0$, то $\sigma_c^2=0$,

а величина σ_s^2 является неопределенной, либо $\sigma_s^2 \to \infty$, а величина σ_c^2 является неопределенной.

Многочисленные теоретические работы и экспериментальные данные показывают, что общая гауссова модель и ее частные случаи охватывают широкий класс каналов связи в различных диапазонах волн [3, 4, 6, 7]. Сложность вычисления вероятностей ошибок для четырехпараметрического закона замираний привела к тому, что на практике традиционно используются только плотности распределения Релея и Райса.

Одномерное распределение коэффициента передачи канала μ может быть определено по формуле [7]

$$\omega(\mu)=\frac{\mu}{2\pi\sigma_c\sigma_s}\times$$
$$\times\int_0^{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_c^2}(\mu\cos\varphi-m_c)^2-\frac{1}{2\sigma_s^2}(\mu\sin\varphi-m_s)^2\right]d\varphi,$$
$$\mu\ge 0\,.$$

В результате несложных преобразований четырехпараметрическое распределение может быть представлено в виде

$$\omega(\mu)=q\exp\left[-\frac{m_s^2}{2\sigma_s^2}\right]\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m H_{2m}(-i\chi)}{2^m(2m)!!}\left(1-q^2\right)^m\omega_{m+1}^{RN}(\mu)\right),$$

где $q^2=\dfrac{\sigma_c^2}{\sigma_s^2}$, $\chi^2=\dfrac{m_s^2}{2\sigma_s^2}\dfrac{q^2}{1-q^2}$ и $\omega_p^{RN}(\mu)$ — распределение Райса–Накагами [1]:

$$\omega_p^{RN}(\mu)=\frac{(\beta\mu)^p}{\theta^{p-1}}\exp\left[-\frac{\theta^2}{2\beta}-\frac{\beta}{2}\mu^2\right]I_{p-1}(\theta\mu),$$
$$\mu\ge 0\,, \tag{4}$$

где $p>0, \theta\ge 0, \beta>0$ — параметры распределения, а $I_{p-1}(\theta\mu)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента порядка $(p-1)$.

Распределение Райса–Накагами (4) при соответствующем выборе параметров p, θ, β совпадает с распределениями Релея, Райса и Накагами (m-распределение): при $p=1,\ \theta=0,\ \beta=\dfrac{1}{\sigma^2}$ — распределение Релея; при $p=1,\ \theta=\dfrac{\mu_0}{\sigma^2},\ \beta=\dfrac{1}{\sigma^2}$ — распределение Райса; при $p=m$, $\theta=0$, $\beta=2m/\overline{\mu^2}$ — распределение Накагами (при выборе $\theta=0$ следует учесть, что $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{I_{p-1}(\theta\mu)}{\theta^{p-1}}=\dfrac{1}{2^{p-1}}\dfrac{1}{\Gamma(p)}$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция).

Если положить $\theta=\dfrac{m_c}{\sigma_c^2}$ и $\beta=\dfrac{1}{\sigma_c^2}$, то

$$\omega_{k+1}^{RN}(\mu)=\frac{\mu^{k+1}}{\sigma_c^2}\frac{1}{(m_c)^k}\exp\left[-\frac{m_c^2+\mu^2}{2\sigma_c^2}\right]I_k\left(\frac{m_c}{\sigma_c^2}\mu\right).$$

Начальный второй момент распределения Райса—Накагами определяется по формуле

$$m_2=\frac{2p}{\beta}\exp\left(-\frac{\theta^2}{2\beta}\right){}_1F_1\left(p+1;\,p;\,\frac{\theta^2}{2\beta}\right).$$

Если $p\in\mathbb{N}$, то нетрудно убедиться, что $m_2=\dfrac{2}{\beta}\left(p+\dfrac{\theta^2}{2\beta}\right)$.

Рассмотрим более подробно задачу вычисления интеграла от функции Оуэна и функции Лапласа при четырехпараметрических замираниях:

$$M_\omega T(\alpha,\eta)=\int_0^\infty T(\alpha\mu,\eta)\omega(\mu)d\mu, \tag{5}$$

где

$$\omega(\mu)=q\exp\left[-\frac{m_s^2}{2\sigma_s^2}\right]\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m H_{2m}(-i\chi)}{2^m(2m)!!}\left(1-q^2\right)^m\omega_{m+1}^{RN}(\mu)\right),$$

параметр $\alpha=\sqrt{\dfrac{2gh_{bc}^2}{m_2}}$, величина g определяется в зависимости от сигнальной конструкции, значение $m_2=\overline{\mu^2}$ — начальный момент второго порядка — определяется для четырехпараметрического закона распределений замираний как $m_2=2\sigma_c^2\left(1+\gamma_0^2+\dfrac{1-q^2}{2q^2}\right)$.

Для распределения Райса—Накагами (1) справедливо соотношение [6, 8, 9]

$$\int_0^\infty T(\alpha\mu,\eta)\omega_p^{RN}(\mu)d\mu=\mathscr{H}_p(z,b,\eta), \tag{6а}$$

где

$$\mathscr{H}_p(z,b,\eta)=\frac{\left(1-b^2\right)^p}{2\pi}\int_0^\eta\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\left(1+b^2x^2\right)^p}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{z^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b^2x^2}\right)dx,$$

$$\eta \ge 0, \;\; p \in \mathbb{R}, \;\; p \ge 0 \qquad (6б)$$

и $b^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta}$, $z^2 = \dfrac{\theta^2}{\beta} b^2$, $0 \le b^2 \le 1$. Учитывая, что $\mathscr{H}$-функция для случая $p=1$ может применяться для расчета при замираниях Релея и Райса, то без ограничения общности можно положить, что $\mathscr{H}_1(z, b, \eta) \triangleq \mathscr{H}(z, b, \eta)$.

Возможно его альтернативное представление в виде

$$\mathscr{H}_p(z, b, \eta) = \frac{\left(1-b^2\right)^p}{2\pi} \times$$
$$\times \int_0^{\operatorname{arctg}(\eta)} \frac{\cos^{2p} t}{\left(1-\left(1-b^2\right)\sin^2 t\right)^p} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\frac{1}{1-\left(1-b^2\right)\sin^2 t}\right) \mathrm{d}t \qquad (6в)$$

или в виде

$$\mathscr{H}_p(z, b, \eta) = b \frac{\left(1-b^2\right)^p}{2\pi} \times$$
$$\times \int_0^{\operatorname{arctg}(b\eta)} \frac{\cos^{2p} t}{1-\left(1-b^2\right)\cos^2 t} \exp\left(-\frac{z^2}{2b^2}\left(1-\left(1-b^2\right)\cos^2 t\right)\right) \mathrm{d}t,$$

$$b \ne 0. \qquad (6г)$$

Учитывая введенную $\mathscr{H}$-функцию, получаем, что

$$\int_0^\infty T(\alpha\mu, \eta)\omega_{m+1}^{RN}(\mu)\mathrm{d}\mu = \mathscr{H}_{m+1}(z_c, b_c, \eta),$$

где $b_c^2 = \dfrac{\alpha^2\sigma_c^2}{1+\alpha^2\sigma_c^2}$, $z_c^2 = \dfrac{\alpha^2 m_c^2}{1+\alpha^2\sigma_c^2}$, так как $\theta = \dfrac{m_c}{\sigma_c^2}$, $\beta = \dfrac{1}{\sigma_c^2}$ и $\dfrac{\theta^2}{2\beta} = \dfrac{m_c^2}{2\sigma_c^2}$. Следовательно, для соотношения (5) получаем, что

$$M_\omega T(\alpha, \eta) = q \exp\left[-\frac{m_s^2}{2\sigma_s^2}\right] \times$$
$$\times \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{(-1)^m H_{2m}(-i\chi)}{2^m (2m)!!}\left(1-q^2\right)^m \mathscr{H}_{m+1}(z_c, b_c, \eta)\right)$$

или

$$M_\omega T(\alpha, \eta) = q \frac{1-b_c^2}{2\pi} \exp\left[-\frac{m_s^2}{2\sigma_s^2}\right] \times$$
$$\times \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+b_c^2x^2} \exp\left(-\frac{z_c^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_c^2x^2}\right) \times$$
$$\times \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{(-1)^m H_{2m}(-i\chi)}{2^m (2m)!!}\left[\frac{\left(1-q^2\right)\left(1-b_c^2\right)}{1+b_c^2x^2}\right]^m\right).$$

Положим $b_s^2 = \dfrac{\alpha^2\sigma_s^2}{1+\alpha^2\sigma_s^2}$, $z_s^2 = \dfrac{\alpha^2 m_s^2}{1+\alpha^2\sigma_s^2}$, тогда $z_s^2 = \dfrac{m_s^2}{\sigma_s^2} b_s^2$, $q^2 = \dfrac{b_c^2}{b_s^2}\dfrac{1-b_s^2}{1-b_c^2}$ и, следовательно:

$$M_\omega T(\alpha, \eta) = \frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi} \times$$
$$\times \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+b_c^2x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+b_s^2x^2}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{z_c^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_c^2x^2} - \frac{z_s^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_s^2x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Определим новую специальную интегральную функцию

$$\mathscr{S}(z_c, z_s, b_c, b_s, \eta) = \frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi} \times$$
$$\times \int_0^\eta \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+b_c^2x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+b_s^2x^2}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{z_c^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_c^2x^2} - \frac{z_s^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_s^2x^2}\right)\mathrm{d}x, \qquad (7)$$

где $z_c^2 = \dfrac{\alpha^2 m_c^2}{1+\alpha^2\sigma_c^2}$, $z_s^2 = \dfrac{\alpha^2 m_s^2}{1+\alpha^2\sigma_s^2}$, $b_c^2 = \dfrac{\alpha^2\sigma_c^2}{1+\alpha^2\sigma_c^2}$, $b_s^2 = \dfrac{\alpha^2\sigma_s^2}{1+\alpha^2\sigma_s^2}$. В частности, для распределения Райса при симметрии канала по дисперсиям квадратурных составляющих: $q^2=1$, т. е. $b_c^2 = b_s^2$, введенная функция совпадает с $\mathscr{H}$-функцией [2]:

$$\mathscr{S}(z_c, z_s, b_c, b_s, \eta) = \mathscr{H}\left(\sqrt{z_c^2+z_s^2},\; b_c, \eta\right) =$$
$$= \frac{1-b_c^2}{2\pi}\int_0^\eta \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{1+b_c^2x^2} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{z_c^2+z_s^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_c^2x^2}\right)\mathrm{d}x,$$

где $z_c^2 + z_s^2 = \dfrac{\alpha^2\left(m_c^2+m_s^2\right)}{1+\alpha^2\sigma_c^2} = \dfrac{\alpha^2\mu_0^2}{1+\alpha^2\sigma_c^2}$. Соответственно, для распределения Релея $\mathscr{S}(z_c, z_s, b_c, b_s, \eta) = \mathscr{H}(0, b_c, \eta) = \mathscr{H}\left(0, \dfrac{\alpha\sigma}{\sqrt{1+\alpha^2\sigma^2}}, \eta\right)$.

Преобразуем аргументы функции, учитывая, что

$\alpha=\sqrt{\dfrac{2gh_{bc}^2}{m_2}}$ и $m_2=2\sigma_c^2\left(1+\gamma_0^2+\dfrac{1-q^2}{2q^2}\right)$. Определим

$\tilde{h}_{bc}^2=\dfrac{h_{bc}^2}{1+\gamma_0^2+\dfrac{1-q^2}{2q^2}}$, т. е.

$$h_{bc}^2[\text{дБ}]=\tilde{h}_{bc}^2[\text{дБ}]+10\lg\left(1+\frac{1+q^2}{2q^2}\gamma^2+\frac{1-q^2}{2q^2}\right),$$

тогда

$$z_c^2=\frac{2gh_{bc}^2m_c^2}{m_2+2gh_{bc}^2\sigma_c^2}=\frac{m_c^2}{\sigma_c^2}\frac{g\tilde{h}_{bc}^2}{1+g\tilde{h}_{bc}^2},$$

$$z_s^2=\frac{2gh_{bc}^2m_s^2}{m_2+2gh_{bc}^2\sigma_s^2}=\frac{m_s^2}{\sigma_s^2}\frac{g\tilde{h}_{bc}^2}{q^2+g\tilde{h}_{bc}^2},\quad b_c^2=\frac{g\tilde{h}_{bc}^2}{1+g\tilde{h}_{bc}^2},$$

$$b_s^2=\frac{g\tilde{h}_{bc}^2}{q^2+g\tilde{h}_{bc}^2} \tag{8}$$

и

$$\frac{m_c^2}{\sigma_c^2}=\cos^2\varphi_0\frac{1+q^2}{q^2}\gamma^2,\ \frac{m_s^2}{\sigma_s^2}=\sin^2\varphi_0\left(1+q^2\right)\gamma^2.$$

Для численных расчетов на ЭВМ удобнее использовать альтернативное определение $\mathscr{S}$-функции:

$$\mathscr{S}(z_c,z_s,b_c,b_s,\eta)=\frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi}\times$$
$$\times\int_0^{\operatorname{arctg}(\eta)}\frac{\cos^2 t}{\sqrt{1-\left(1-b_c^2\right)\sin^2 t}\sqrt{1-\left(1-b_s^2\right)\sin^2 t}}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z_c^2}{1-\left(1-b_c^2\right)\sin^2 t}+\frac{z_s^2}{1-\left(1-b_s^2\right)\sin^2 t}\right)\right]\mathrm{d}t. \tag{9}$$

Таким образом, для четырехпараметрического распределения математическое ожидание функции Оуэна

$$\int_0^\infty T(\alpha\mu,\eta)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=\mathscr{S}(z_c,z_s,b_c,b_s,\eta),$$

где $\alpha^2=\dfrac{2gh_{bc}^2}{m_2}$ и $m_2=2\sigma_c^2\left(1+\gamma_0^2+\dfrac{1-q^2}{2q^2}\right)$, а аргументы функции определены в (8).

Получим теперь соотношения для усреднения функции Лапласа и их произведения через $\mathscr{S}$-функцию. Если положить $\eta=+\infty$, то из свойств функции Оуэна следует, что

$$\int_0^\infty T(\alpha\mu,+\infty)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=\frac{1}{2}\int_0^\infty Q(\alpha\mu)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu$$

или для четырехпараметрического распределения

$$\int_0^\infty Q(\alpha\mu)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=2\mathscr{S}(z_c,z_s,b_c,b_s,+\infty).$$

Для определения соотношения $\int_0^\infty Q(\alpha\mu)Q(\beta\mu)\times$ $\times\omega(\mu)\mathrm{d}\mu$, где $\alpha^2=\dfrac{2g_1h_{bc}^2}{m_2}$ и $\beta^2=\dfrac{2g_2h_{bc}^2}{m_2}$, воспользуемся одним из свойств функции Оуэна, которое преобразуем к виду

$$Q(\alpha\mu)Q(\beta\mu)=T(\alpha\mu,+\infty)+T(\beta\mu,+\infty)-$$
$$-\left[T\left(\alpha\mu,\frac{\beta}{\alpha}\right)+T\left(\beta\mu,\frac{\alpha}{\beta}\right)\right].$$

Тогда

$$\int_0^\infty Q(\alpha\mu)Q(\beta\mu)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=$$
$$=\left(\mathscr{S}(z_c,z_s,b_c,b_s,+\infty)-\mathscr{S}\left(z_c,z_s,b_c,b_s,\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)+$$
$$+\left(\mathscr{S}\left(\tilde{z}_c,\tilde{z}_s,\tilde{b}_c,\tilde{b}_s,+\infty\right)-\mathscr{S}\left(\tilde{z}_c,\tilde{z}_s,\tilde{b}_c,\tilde{b}_s,\frac{\alpha}{\beta}\right)\right).$$

При численных расчетах на ЭВМ удобнее, возвращаясь к определению $\mathscr{S}$-функции, ввести функцию

$$\mathscr{S}\left(z_c,z_s,b_c,b_s,\begin{bmatrix}\eta_2\\ \eta_1\end{bmatrix}\right)=\frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi}\times$$
$$\times\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+b_c^2x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+b_s^2x^2}}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{z_c^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_c^2x^2}-\frac{z_s^2}{2}\frac{1+x^2}{1+b_s^2x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Тогда

$$\int_0^\infty Q(\alpha\mu)Q(\beta\mu)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=\mathscr{S}\left(z_c,z_s,b_c,b_s,\begin{bmatrix}+\infty\\ \beta/\alpha\end{bmatrix}\right)+$$
$$+\mathscr{S}\left(\tilde{z}_c,\tilde{z}_s,\tilde{b}_c,\tilde{b}_s,\begin{bmatrix}+\infty\\ \alpha/\beta\end{bmatrix}\right).$$

В частности, при $\alpha=\beta$: $\int_0^\infty Q^2(\alpha\mu)\omega(\mu)\mathrm{d}\mu=$ $=2\mathscr{S}\left(z_c,z_s,b_c,b_s,\begin{bmatrix}+\infty\\ 1\end{bmatrix}\right).$

Поскольку $\mathscr{S}(z_c, z_s, b_c, b_s, \eta) = \mathscr{H}\left(\sqrt{z_c^2 + z_s^2}, b_c, \eta\right)$, то некоторые свойства $\mathscr{S}$-функции совпадают со свойствами $\mathscr{H}$-функции, приведенными, например, в работе [2]. Кроме этого, можно показать, что новая специальная функция в частном случае выражается через эллиптические функции. Действительно, сделаем замену $xb_c = -\mathrm{ctg}\varphi$, тогда функция может быть записана в виде

$$\mathscr{S}(z_c, z_s, b_c, b_s, \eta) = \frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi}\frac{1}{b_s}\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{\mathrm{arcctg}(-\eta b_c)} \frac{b_c^2 \sin^2\varphi}{\left(1-u^2\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-v^2\sin^2\varphi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\left(1-u^2\sin^2\varphi\right)\left\{\frac{z_c^2}{2b_c^2} + \frac{z_s^2}{2b_s^2}\frac{1}{1-v^2\sin^2\varphi}\right\}\right]\mathrm{d}\varphi,$$

где $u^2 = 1 - b_c^2$, $v^2 = 1 - \frac{b_c^2}{b_s^2}$. Если $z_c = z_s = 0$, то

$$\mathscr{S}(0, 0, b_c, b_s, \eta) = \frac{\sqrt{1-b_c^2}\sqrt{1-b_s^2}}{2\pi}\frac{1}{b_s}\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{\mathrm{arcctg}(-\eta b_c)} \frac{b_c^2 \sin^2\varphi}{\left(1-u^2\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-v^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

или

$$\mathscr{S}(0, 0, b_c, b_s, \eta) = \frac{1}{2\pi}\frac{b_c^2}{b_s}\sqrt{\frac{1-b_s^2}{1-b_c^2}}\times$$

$$\times\left\{\left[\Pi\left(\varphi_1, u^2, v\right) - \Pi\left(\varphi_0, u^2, v\right)\right] - \left[F(\varphi_1, v) - F(\varphi_0, v)\right]\right\},$$

где $\Pi\left(\varphi,\ u^2, v\right) = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\left(1-u^2\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-v^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$ — эллиптический интеграл 3-го рода; $F(\varphi, v) = \int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-v^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$ — эллиптический интеграл 1-го рода и $\varphi_1 = \mathrm{arcctg}(-\eta b_c)$, $\varphi_0 = \pi/2$. Если вместо параметров b_c^2 и b_s^2 использовать величины u^2, v^2, то специальная функция может быть представлена в виде

$$\mathscr{S}(z_c, z_s, u, v, \eta) = \frac{1}{2\pi}u\sqrt{1-u^2}\sqrt{u^2-v^2}\times$$

$$\times\int_{\pi/2}^{\mathrm{arcctg}(-\eta b_c)} \frac{\sin^2\varphi}{\left(1-u^2\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-v^2\sin^2\varphi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1-u^2\sin^2\varphi}{2\left(1-u^2\right)}\left\{z_c^2 + \frac{1-v^2}{1-v^2\sin^2\varphi}z_s^2\right\}\right]\mathrm{d}\varphi.$$

Если использовать замену $x = \mathrm{ctg}\varphi$ и ввести параметры $\kappa_c^2 = \frac{1-b_c^2}{b_c^2}$, $\kappa_s^2 = \frac{1-b_s^2}{b_s^2}$, то

$$\mathscr{S}(z_c, z_s, \kappa_c, \kappa_s, \eta) = \frac{\kappa_c\kappa_s}{2\pi}u\sqrt{1-u^2}\sqrt{u^2-v^2}\times$$

$$\times\int_{\mathrm{arcctg}(\eta)}^{\pi/2} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1+\kappa_c^2\sin^2\varphi}\sqrt{1+\kappa_s^2\sin^2\varphi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\left(\frac{z_c^2}{2}\frac{1+\kappa_c^2}{1+\kappa_c^2\sin^2\varphi} + \frac{z_s^2}{2}\frac{1+\kappa_s^2}{1+\kappa_s^2\sin^2\varphi}\right)\right]\mathrm{d}\varphi,$$

где величины u^2, v^2 были определены выше.

Используя введенную специальную интегральную функцию и примеры, нетрудно получить соответствующие расчеты вероятности ошибки при общих четырехпараметрических замираниях.

Таким образом, введена новая специальная интегральная $\mathscr{S}$-функция, которая включает в себя $\mathscr{H}$-функцию, функции Лапласа, Оуэна, Никольсона, (обобщенного) Маркума. Введенная $\mathscr{S}$-функция позволяет систематизировать вычисление вероятности ошибки в канале с общими четырехпараметрическими замираниями и белым шумом при когерентном приеме и проводить корректное сравнение сигнальных конструкций.

Литература

1. Справочник по специальным функциям / Под ред. А. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. **Савищенко Н. В.** Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и помехоустойчивость приема: Монография / Под ред. Д. Л. Бураченко. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. 420 с.
3. **Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н.** Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник. М.: Радио и связь, 1981. 232 с.

4. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003. 1104 с.
5. **Багушев С. В., Зайцев И. Е., Яковлев А. А.** Перспективы развития сигнально-кодовых каналов для гауссовского канала связи // Зарубежная радиоэлектроника. 1990. № 1. С. 15–31.
6. **Прокис Дж.** Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.
7. **Кловский Д. Д.** Передача дискретных сообщений по радиоканалам. М.: Радио и связь, 1982. 304 с.
8. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.
9. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.

Красильников Н. Н., Красильникова О. И.

Мультимедиатехнологии в информационных системах. Представление и обработка изображений в компьютере: учебное пособие/Н. Н. Красильников, О. И. Красильникова. ГУАП. — СПб., 2007. — 132 с.: ил.

ISBN 978-5-8088-0257-5

В учебном пособии изложены вопросы, связанные с представлением трехмерной и двумерной графики. Приведены статистические характеристики двумерных изображений. Рассмотрены вопросы оцифровки изображений и возникающие при этом искажения. Описаны методы линейной и нелинейной обработки изображений с целью повышения их качества.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, изучающих мультимедиатехнологии в рамках технических специальностей.