УДК 621.391

РАСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ КАНАЛОВ С ПАМЯТЬЮ

Е. А. Крук,
доктор техн. наук, профессор
В. Б. Прохорова,
зам. директора Института компьютерной безопасности вычислительных систем и сетей
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Получены формулы для расчета P(m, n)-характеристик (вероятности появления m ошибок среди n принятых канальных символов) дискретного канала с памятью. Указанных характеристик, как правило, достаточно для вычисления вероятности ошибочного декодирования в таких каналах.

Presented are the formulas to compute P (m, n) characteristics (the probability of m errors among n received channel symbols) of a discrete channel with memory. As a rule, these characteristics are sufficient to compute the probability of false decoding in such chanennels.

Рассмотрим канал с состояниями $C_1, ..., C_L$ (каждое из состояний двоично-симметричного канала (ДСК), а весь канал – составной ДСК [1, 2]), заданный матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P} = \left\| P(C_i / C_j) \right\|_{L\times L} \qquad (1)$$

и вектором

$$\boldsymbol{\pi} = \left\| \pi_i \right\|_{1\times L}, \qquad (2)$$

где $P(C_i / C_j)$ — вероятность перехода из состояния C_j в C_i за один шаг, а π_i – вероятность ошибки в состоянии C_i. В такой модели канала каждому канальному вектору длиной n из нулей и единиц соответствует n-вектор $\mathbf{C} = \left(C_{i_1}, \ldots, C_{i_n}\right)$ состояний канала.

Назовем композицией вектора состояний $\mathbf{C}$ вектор $\boldsymbol{\alpha} = (l_1, ..., l_L)$, в котором элемент l_i — число раз, которое состояние C_i встретилось в $\mathbf{C}$. Далее, через $P_n(\alpha)$ обозначим вероятность появления вектора состояний с композицией α, а через $P_n(m/\alpha)$ — вероятность появления m ошибок на длине n при условии, что соответствующий вектор состояний имеет композицию α. Тогда выражение для $P(m, n)$-характеристик рассматриваемого канала может быть записано в виде

$$P(m, n) = \sum_{|\alpha|=n} P(m/\alpha) P_n(\alpha), \qquad (3)$$

где $|\alpha| = \sum_{j=1}^{L} l_j$.

Поскольку в любом из состояний C_j канал есть ДСК с вероятностью ошибки π_j на символ, то вероятность возникновения m_j ошибок на l_j позициях вектора $\mathbf{C}$, соответствующих состоянию C_j, равна

$$\binom{l_j}{m_j} \pi_j^{m_j} \left(1-\pi_j\right)^{l_j-m_j}.$$

Тогда вероятность одновременного возникновения $m_1, ..., m_L$ ошибок на позициях соответственно состояний $C_1, ..., C_L$ в векторе $\mathbf{C}$ равна

$$\prod_{j=1}^{k} \binom{l_j}{m_j} \pi_j^{m_j} \left(1-\pi_j\right)^{l_j-m_j}$$

и

$$P_n(m/\alpha) = P_n(m/l_1, \ldots, l_L) =$$
$$= \sum_{m=m_1+\ldots+m_L} \prod_{j=1}^{L} \binom{l_j}{m_j} \pi_j^{m_j} \left(1-\pi_j\right)^{l_j-m_j}. \qquad (4)$$

Основную сложность при вычислении формулы (3) представляет вычисление величины $P_n(\alpha)$. Будем вычислять $P_n(\alpha)$ в виде

$$P_n(\alpha) = \sum_{i_1=1}^{L} \sum_{i_1=1}^{L} P_n(l_1, \ldots, l_L / C_{i_1}^{(1)}, C_{i_n}^{(n)}) P(C_{i_n} / C_{i_1}) P(C_i), \qquad (5)$$

где $P_n(\alpha / C_{i_1}^{(1)}, C_{i_n}^{(n)})$ – вероятность композиции α при условии, что первая и последняя компоненты вектора состояний $\mathbf{C}$ равны соответственно C_{i_1} и C_{i_n}. $P^{n-1}(C_{i_n} / C_{i_1})$ — вероятность перехода из состояния C_{i_1} в состояние C_{i_n} ровно за $n - 1$ шаг, а $P(C_{i_1})$ — вероятность состояния C_{i_1}.

Каждому вектору состояний $\mathbf{C}=(C_{i_1},\ldots,C_{i_n})$ поставим в соответствие вектор пар

$$\mathbf{J}=\left((i_1,i_2),\,(i_2,i_3),\ldots,(i_{n-1},i_n)\right)$$

и обозначим через $a_{\alpha\beta}$ число пар (α,β) в векторе $\mathbf{J}$. Числа $a_{\alpha\beta}$ будут соответствовать числу переходов из состояния C_α в состояние C_β в векторе $\mathbf{C}$. Тогда вероятность вектора состояний $\mathbf{C}=(C_{i_1},\ldots,C_{i_n})$ будет равна

$$\prod_{\alpha=1}^{\alpha}\prod_{\beta=1}^{\alpha}\left[P(C_\alpha/C_\beta)\right]^{a_{\alpha\beta}}. \qquad (6)$$

Далее, число векторов $\mathbf{C}$, имеющих в качестве первой компоненты C_{i_1}, а в качестве последней — C_{i_n} и обладающих одним и тем же набором величин $a_{\alpha\beta}$, $\alpha,\beta=\overline{1,L}$, равно

$$\binom{n-2}{a_{11},a_{12},\ldots,a_{LL}}=\frac{(n-2)!}{a_{11}!a_{12}!\ldots a_{LL}!}. \qquad (7)$$

С учетом (6) и (7) вероятность $P_n(\alpha/C_{i_1}^{(1)},C_{i_n}^{(n)})$ может быть получена в виде

$$P_n(\alpha/C_{i_1}^{(1)},\,C_{i_n}^{(n)})=\sum_{\{a_{\alpha\beta}\}\in D_L}\binom{n-2}{a_{11},\ldots,a_{LL}}\times$$
$$\times\left(\prod_{\alpha=1}^{L}\prod_{\beta=1}^{L}\left[P(C_\beta/C_\alpha)\right]^{a_{\alpha\beta}}\right). \qquad (8)$$

Суммирование в (8) ведется по всевозможным наборам величин $\left\{a_{\alpha\beta}\right\}_{\alpha=\overline{1,L},\beta=\overline{1,L}}$ из области наборов D_L, допустимых для композиции $\alpha=(l_1,\ldots,l_L)$. Область D_L описывается множеством целочисленных решений системы уравнений

$$\begin{cases}\sum\limits_{\alpha=1}^{L}a_{\alpha\beta}=l_\beta,\ \beta=\overline{1,L}\ ,\ \beta\neq i_1,i_n; & (9)\\ \sum\limits_{\alpha=1}^{L}a_{\beta\alpha}=l_\beta,\ \beta=\overline{1,L}\ ,\ \beta\neq i_1,i_n; & (10)\\ \sum\limits_{\alpha=1}^{L}a_{i_1\alpha}=l_{i_1}-1,\ \sum\limits_{\alpha=1}^{L}a_{\alpha i_1}=l_{i_1}; & (11)\\ \sum\limits_{\alpha=1}^{L}a_{\alpha i_n}=l_{i_n}-1,\ \sum\limits_{\alpha=1}^{L}a_{i_n\alpha}=l_{i_n}. & (12)\end{cases}$$

Уравнения (9) и (10) представляют собой условия того, что для любого состояния C_β, $\beta\neq i_1,i_n$ число входов в состояние C_β равно числу выходов из этого состояния и равно компоненте l_β вектора композиций α (переход из состояния C_β в себя рассматривается одновременно как вход и как выход из состояния C_β).

Уравнения (11) и (12) представляют собой аналогичные условия на число входов и выходов состояний C_{i_1} и C_{i_2}, встречающихся в векторе $\mathbf{C}$ соответственно первым и последним.

Вероятности $P^{n-1}(C_{i_n}/C_{i_1})$ перехода из состояния C_{i_1} в C_{i_n} ровно за $n-1$ шаг есть элементы $(n-1)$-й степени матрицы марковской цепи $\mathbf{P}$:

$$P^{n-1}(C_{i_n}/C_{i_1})=\sum_{\alpha=1}^{L}P(C_\alpha/C_{i_1})\,P^{n-2}(C_{i_n}/C_\alpha), \qquad (13)$$

а вероятность

$$P(C_j)=\frac{\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{L}P(C_j/C_i)}{\sum\limits_{j=1,i\neq j}^{L}\sum\limits_{i=1,i\neq j}^{L}P(C_j/C_i)}. \qquad (14)$$

Подставляя формулы (8), (13) в (5), а затем (4) и (5) в (3), мы получим выражение для искомых $P(m,n)$-характеристик составного ДСК, содержащее в качестве параметров лишь значения исходных данных — элементы матрицы $\mathbf{P}$ и вектора $\boldsymbol{\pi}$.

Вычисления по формулам (3)–(14) являются весьма трудоемкими. Они могут быть значительно упрощены, если заметить, что вероятность перехода из состояния с номером α в состояние с номером β для рассматриваемых нами каналов быстро уменьшается с ростом разности $|\alpha-\beta|$, и при $|\alpha-\beta|<\tau_0$ заменена на нули (τ_0 — некоторое число). Суммирование в области D может вестись по $a_{\alpha\beta}$, не превышающим некоторой величины τ_1 при $\alpha\neq\beta$. Наконец, при больших n в формулах (9)–(12) можно отказаться от учета условий, связанных с числом входов (выходов) для состояний C_{i_1}, C_{i_n}, и считать, что для всех состояний выполняются условия (9), (10).

По $P(m,n)$-характеристикам вероятность ошибочного декодирования может быть оценена стандартным образом

$$P_{\text{ош}}\leq\sum_{m\geq\frac{d+1}{2}}^{n}P(m,n). \qquad (15)$$

Отметим, что в работе [3] предложены формулы, позволяющие учесть одинаковые члены в выражении (10).

Предложенная методика проведения вероятностных расчетов позволяет вычислять вероятность ошибочного декодирования в каналах с памятью.

Литература

1. **Кеннеди Р.** Каналы связи с замираниями и рассеянием. М.: Сов. радио, 1973.
2. **Коржик В. И., Финк Л. М.** Помехоустойчивое кодирование дискретных сообщений в каналах со случайной структурой. М.: Связь, 1975.
3. **Крук Е. А.** Комбинированное декодирование линейных блоковых кодов / ГУАП. СПб., 2007.