УДК 621.39

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНОГО ПРИЕМА МНОГОПОЗИЦИОННЫХ СИГНАЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ РАЗНЕСЕННОМ ПРИЕМЕ И ОБЩИХ ЗАМИРАНИЯХ ПАРАМЕТРОВ КАНАЛА

Н. В. Савищенко,
доктор техн. наук, профессор
Военная академия связи

Приведены основные положения по расчету помехоустойчивости когерентного приема многопозиционных сигнальных конструкций при разнесенном приеме и общих замираниях параметров сигнала.

Известно, что разнесенный прием является одним из наиболее эффективных способов, предназначенных для обеспечения высокой надежности передачи данных без значительного увеличения как мощности передатчика, так и используемой частоты [1–6]. В системах с разнесенным приемом обеспечивается параллельная передача одной и той же информации по нескольким каналам. Различные методы разнесения были предложены и проанализированы применительно к системам коротковолновой, тропосферной связи, а также к радиорелейным системам, функционирующим в пределах прямой видимости.

Методы разнесения требуют организации ряда путей передачи сигналов, называемых ветвями разнесения, и схемы их комбинирования или выбора одного из них. В зависимости от характеристик распространения радиоволн в системах подвижной радиосвязи существует несколько методов построения ветвей разнесения, которые могут быть разбиты на следующие группы: пространственное, угловое, поляризационное, частотное, временное разнесение.

Пространственное разнесение. Этот метод широко используется на практике из-за своей относительной простоты и низкой стоимости. Применяется одна передающая и несколько приемных антенн. Расстояние между соседними приемными антеннами выбирается таким образом, чтобы замирания в каждой ветви разнесения были некоррелированны.

Угловое разнесение (разнесение по направлению). В этом методе используется несколько направленных антенн, каждая из которых независимо реагирует на сигнал, приходящий под определенным углом или с определенного направления. Здесь также добиваются некоррелированности замираний в отдельных ветвях разнесения.

Поляризационное разнесение. В этом методе используются только две ветви разнесения, при этом сигналы, переданные с помощью двух ортогонально-поляризованных радиоволн, применяемых в системах подвижной радиосвязи, в точке приема имеют некоррелированные статистики замираний из-за многолучевости.

Частотное и временное разнесение. Различия в частоте и/или времени передачи могут быть использованы для организации ветвей разнесений с некоррелированными статистиками замираний. Основное преимущество этих двух методов по сравнению с предыдущими состоит в том, что для их реализации требуется лишь одна приемная и одна передающая антенны, но при этом используется более широкая полоса частот. Заметим, что помехоустойчивое кодирование может рассматриваться как один из вариантов временного разнесения в цифровых системах передачи.

Следует отметить, что для всех методов разнесения, за исключением поляризационного, в принципе не существует ограничений на количество ветвей разнесения. Но более детальное исследование этого вопроса показывает, что для некоторых методов можно определить оптимальное значение числа ветвей разнесения, которое зависит, в том числе, и от отношения сигнал/шум, т. е. для системы передачи может быть указан диапазон оптимальных значений числа ветвей, если будут известны границы, в которых изменяется отношение сигнал/шум. Таким образом, не всегда увеличивается выигрыш при увеличении числа ветвей разнесения.

Существует несколько методов комбинирования некоррелированных сигналов при разнесенном приеме. Обычно выделяют три основные категории: 1) оптимальное (по критерию максимального отношения сигнал/шум) сложение; 2) сложение с равными весами; 3) автовыбор.

Метод *автовыбора* из-за своей относительной простоты реализации представляется более приспособленным для применения в системах подвижной радиосвязи. В этом методе выбирается для связи *наилучшая* ветвь (ветвь с максимальным уровнем сигнала или ветвь с минимальным значение вероятности ошибки P_e). Основной недостаток этого метода в том, что необходимо иметь такое же число приемных каналов с непрерывным контролем, сколько имеется ветвей разнесения.

Предположим, что:

1. В каждой отдельной ветви разнесения сигнал является однолучевым.
2. Число ветвей разнесения $L \geq 1$.
3. Величина h_0^2 есть среднее отношение энергии сигнала к эквивалентной спектральной плотности помехи, которое имело бы место, если бы то же передающее устройство использовалось для одиночного приема.
4. Без ограничения общности полагаем, что ветви разнесения пронумерованы в порядке убывания интенсивности сигнала.
5. Для любого $l = \overline{1, L}$ помеха является аддитивным белым гауссовским шумом с односторонней спектральной плотностью мощности шума в каждой ветви $N_{0,l}/2$ с коэффициентом передачи l-го канала μ_l.
6. В каждой из ветвей разнесения отношение сигнал/шум есть величина

$$h_l^2 = \frac{E_l}{N_{0,l}}, \ l = \overline{1, L}.$$

7. В зависимости от вида разнесения справедливо соотношение [2]

$$h_L^2 = \frac{h_0^2}{L^\lambda}, \ \lambda \in [0, 2],$$

где h_L^2 — среднее отношение энергии сигнала к шуму в одной отдельной ветви.

8. Во всех ветвях сигналы некоррелированны. Это предположение позволяет упростить расчет помехоустойчивости и дает возможность получить соотношения для вероятности ошибок (ее нижняя граница) в замкнутой форме. В то же время некоррелированность действительно может иметь место на практике [2]. С другой стороны, трудно реализовать оптимальный прием, который бы учитывал коррелированность сигналов в отдельных ветвях разнесения. Противоположный случай — полная коррелированность всех ветвей.

При оптимальном когерентном приеме и некоррелированной по отдельным ветвям разнесения помехи результирующее отношение сигнал/помеха равно сумме всех отношений в ветвях разнесения, т. е.

$$h_\Sigma^2 = \sum_{l=1}^{L} h_l^2 = h^2 \sum_{l=1}^{L} \delta_l^2,$$

где $\delta_l^2 = \frac{h_l^2}{h_1^2}$, $h^2 = h_1^2$. В соответствии с предположением справедливы неравенства

$$\delta_1^2 \geq \delta_2^2 \geq \ldots \geq \delta_L^2, \ \delta_1^2 = 1.$$

Энергетический выигрыш от перехода одиночного приема к разнесенному определяется выражением

$$\eta_\Sigma^2 = \frac{h_\Sigma^2}{h_0^2} = \frac{1}{L^\lambda} \sum_{l=1}^{L} \delta_l^2,$$

где $\lambda \in [0, 2]$ — распределение мощности в зависимости от вида разнесения.

Если в канале связи присутствуют замирания, то

$$h_{l,\mu}^2 = \frac{\mu_l^2}{\overline{\mu}_l^2} h_l^2, \ \overline{\mu}_l^2 = m_{2,l} = \int \mu_l^2 \omega(\mu_l) \mathrm{d}\mu_l, \ l = \overline{1, L},$$

где $\omega(\mu_l)$ — плотность распределения вероятности коэффициента передачи μ_l для l-го канала.

Полная вероятность ошибки в канале с разнесением и некоррелированными по ветвям замираниями определяется выражением

$$P_{e/b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} P_{e/b} \left(h^2 \sum_{l=1}^{L} \delta_l^2 \frac{\mu_l^2}{\overline{\mu}_l^2} \right) \prod_{l=1}^{L} \omega(\mu_l) \mathrm{d}\mu_1 \ldots \mathrm{d}\mu_L,$$

где $P_{e/b}$ — вероятность ошибки (в символе/бите) в канале с детерминированными параметрами и белым шумом; μ_l — коэффициент передачи в l-й ветви; $\overline{\mu}_l^2 = m_{2,l} = \int \mu_l^2 \omega(\mu_l) \mathrm{d}\mu_l$; $\omega(\mu_l)$ — плотность распределения вероятностей коэффициента передачи в l-й ветви, $l = \overline{1, L}$. Таким образом, в формуле для вероятности ошибки $P_{e/b}(h^2)$, полученной для когерентного приема в канале с белым шумом, при одиночном приеме должны осуществляться следующие замены:

а) в канале без замираний проводится замена h^2 на $h^2 \sum_{l=1}^{L} \delta_l^2 = \sum_{l=1}^{L} h_l^2 = h_\Sigma^2$;

б) в канале с общими некоррелированными по отдельным ветвям замираниями — замена h^2 на $h^2 \sum_{l=1}^{L} \delta_l^2 \frac{\mu_l^2}{\overline{\mu}_l^2}$.

В общем случае вероятность ошибок двумерных сигналов при когерентном приеме в канале с детерминированными параметрами и белым шумом может быть представлена в виде [6, 7]

$$P_{e/b}\left(h_{bc}^2\right)=\sum_k a_k T\left(\alpha_{k1}\sqrt{h_{bc}^2},\eta_k\right)+$$
$$+\sum_k b_k Q\left(\alpha_{k2}\sqrt{h_{bc}^2}\right)+$$
$$+\sum_k c_k Q\left(\alpha_{k3}\sqrt{h_{bc}^2}\right)Q\left(\alpha_{k4}\sqrt{h_{bc}^2}\right), \qquad (1)$$

где $T(\nu,a)$, $\nu\geq 0$, $a\geq 0$ и $Q(x)$ соответственно функции Оуэна и Лапласа. Следовательно, с учетом свойств функции Оуэна, задача вычисления вероятности ошибок в этом случае может быть сведена к усреднению только функции Оуэна.

В основе дальнейших преобразований, вне зависимости от закона распределений, лежит следующая формула:

$$J_L=\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}T\left(\alpha\sqrt{h^2\sum_{l=1}^{L}\delta_l^2\frac{\mu_l^2}{\overline{\mu_l^2}}},\eta\right)\prod_{l=1}^{L}\omega(\mu_l)\,\mathrm{d}\mu_1\ldots\mathrm{d}\mu_L=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta}\frac{1}{1+x^2}\prod_{l=1}^{L}\left\{\int_0^{\infty}\exp\left[-\frac{\alpha^2h^2}{2}\frac{\mu_l^2}{\overline{\mu_l^2}}\delta_l^2\left(1+x^2\right)\right]\omega(\mu_l)\mathrm{d}\mu_l\right\}\mathrm{d}x, \quad (2)$$

где параметр α определяется в зависимости от сигнальной конструкции, а значение $m_{2,l}=\overline{\mu_l^2}$ — начальный момент второго порядка. Например, для четырехпараметрического закона распределений замираний $m_{2,l}=2\sigma_{c,l}^2\left(1+\gamma_{0,l}^2+\frac{1-q_l^2}{2q_l^2}\right)$.

При выводе (2) учитывалось, что справедливо соотношение

$$\exp\left\{-\frac{\alpha^2h^2}{2}\sum_{l=1}^{L}\frac{\mu_l^2}{\overline{\mu_l^2}}\delta_l^2\left(1+x^2\right)\right\}=$$
$$=\prod_{l=1}^{L}\exp\left[-\frac{\alpha^2h^2}{2}\frac{\mu_l^2}{\overline{\mu_l^2}}\delta_l^2\left(1+x^2\right)\right],$$

которое легко вытекает из свойств экспоненциальной функции.

Для определения вероятности ошибки в канале с общими замираниями будет рассматриваться четырехпараметрический закон распределения вероятностей случайного коэффициента передачи канала μ [1–4]:

$$\omega(\mu_c,\mu_s)=$$
$$=\frac{1}{2\pi\sigma_c\sigma_s}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_c^2}\left(\mu_c-m_c\right)^2-\frac{1}{2\sigma_s^2}\left(\mu_s-m_s\right)^2\right],$$

$$\mu=\sqrt{\mu_c^2+\mu_s^2},$$

где m_c и m_s — математические ожидания квадратурных составляющих μ_c и μ_s ($\mu_0=\sqrt{m_c^2+m_s^2}$ — регулярная составляющая коэффициента передачи); σ_c^2 и σ_s^2 — дисперсии квадратурных составляющих μ_c и μ_s. Учитывая, что предполагаются различные уровни замираний в отдельных ветвях, в дальнейшем к каждой переменной будем добавлять индекс l, $l=\overline{1,L}$.

Следуя работе [2], наряду с параметрами $m_{c,l}$, $m_{s,l}$, $\sigma_{c,l}^2$, $\sigma_{s,l}^2$, $l=\overline{1,L}$ будем использовать параметры, имеющие наглядный физический смысл и используемые в отдельных ветвях.

1. Отношение дисперсий квадратурных составляющих в l-й ветви $\sigma_{c,l}^2$ и $\sigma_{s,l}^2$ — величину $q_l^2=\frac{\sigma_{c,l}^2}{\sigma_{s,l}^2}$. Коэффициент q_l^2 характеризует асимметрию канала по дисперсиям в l-й ветви. Без ограничения общности рассматриваются значения q_l^2 из интервала [0, 1], т. е. $0\leq q_l^2\leq 1$.

2. Фазовый угол $\varphi_{0,l}=\mathrm{arctg}\frac{m_{s,l}}{m_{c,l}}$ или $\mathrm{tg}\varphi_{0,l}=\frac{m_{s,l}}{m_{c,l}}$.

3. Отношение средних мощностей регулярной и флуктуирующей частей сигнала $\gamma_l^2=\frac{m_{c,l}^2+m_{s,l}^2}{\sigma_{c,l}^2+\sigma_{s,l}^2}=\frac{\mu_{0,l}^2}{\sigma_{c,l}^2+\sigma_{s,l}^2}$. Это выражение удобнее представить в виде $\gamma_l^2=\frac{2q_l^2}{1+q_l^2}\frac{\mu_{0,l}^2}{2\sigma_{c,l}^2}=\frac{2q_l^2}{1+q_l^2}\gamma_{0,l}^2$, где $\gamma_{0,l}^2=\frac{\mu_{0,l}^2}{2\sigma_{c,l}^2}$ — величина, характеризующая глубину замираний в канале с райсовскими замираниями $\left(q_l^2=1\right)$. Коэффициент $\frac{2q_l^2}{1+q_l^2}\in[0,1]$ характеризует уменьшение γ_l^2 по сравнению с величиной $\gamma_{0,l}^2$. При релеевских замираниях $\gamma_{0,l}^2=0$, в канале без замираний $\gamma_{0,l}^2\to\infty$ (присутствует только регулярная составляющая). Следует заметить, что величина γ_l^2 может принимать одинаковые значения при разных значениях $\gamma_{0,l}^2$ и q_l^2. Кроме этого справедливы следующие соотношения:

$$\gamma_l^2=\frac{m_{c,l}^2}{\sigma_{c,l}^2}\frac{q_l^2}{1+q_l^2}\frac{1}{\cos^2\varphi_{0,l}} \text{ или } \gamma_l^2=\frac{m_{s,l}^2}{\sigma_{s,l}^2}\frac{1}{1+q_l^2}\frac{1}{\sin^2\varphi_{0,l}}.$$

4. Средний квадрат коэффициента передачи (начальный момент второго порядка) $m_{2,l} = \mu_{0,l}^2 + \sigma_{c,l}^2 + \sigma_{s,l}^2$ или $m_{2,l} = 2\sigma_{c,l}^2\left(1 + \frac{\mu_{0,l}^2}{2\sigma_{c,l}^2} + \frac{1-q_l^2}{2q_l^2}\right) = 2\sigma_{c,l}^2 \times \left(1 + \gamma_{0,l}^2 + \frac{1-q_l^2}{2q_l^2}\right)$, $q_l^2 \neq 0$. Если $q_l^2 = 0$, то $\sigma_{c,l}^2 = 0$, а величина $\sigma_{s,l}^2$ является неопределенной, либо $\sigma_{s,l}^2 \to \infty$, а величина $\sigma_{c,l}^2$ является неопределенной.

Многочисленные теоретические работы и экспериментальные данные показывают, что общая гауссовская модель и ее частные случаи охватывают широкий класс каналов связи в различных диапазонах волн [1–4]. Сложность вычисления вероятностей ошибок для четырехпараметрического закона замираний привела к тому, что на практике традиционно используются только плотности распределения Релея и Райса.

Одномерное распределение коэффициента передачи канала μ_l, $l = \overline{1,L}$ может быть определено по формуле [2]

$$\omega(\mu_l) = \frac{\mu_l}{2\pi\sigma_{c,l}\sigma_{s,l}} \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{c,l}^2}(\mu_l\cos\varphi - m_{c,l})^2 - \frac{1}{2\sigma_{s,l}^2}(\mu_l \sin\varphi - m_{s,l})^2\right] d\varphi,\ \mu_l \geq 0.$$

В результате преобразований четырехпараметрическое распределение может быть представлено в виде [7]

$$\omega(\mu_l) = q_l \exp\left[-\frac{m_{s,l}^2}{2\sigma_{s,l}^2}\right] \times \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m H_{2m}(-i\chi_l)}{2^m (2m)!!}\left(1-q_l^2\right)^m \omega_{m+1}^{RN}(\mu_l)\right), \mu_l \geq 0, \quad (3)$$

где $q_l^2 = \frac{\sigma_{c,l}^2}{\sigma_{s,l}^2}$; $\chi_l^2 = \frac{m_{s,l}^2}{2\sigma_{s,l}^2}\frac{q_l^2}{1-q_l^2}$ и $\omega_p^{RN}(\mu_l)$ — распределение Райса—Накагами [6, 7]:

$$\omega_p^{RN}(\mu_l) = \frac{(\beta\mu_l)^p}{\theta^{p-1}} \exp\left[-\frac{\theta^2}{2\beta} - \frac{\beta}{2}\mu_l^2\right] I_{p-1}(\theta\mu_l),\ \mu_l \geq 0, \quad (4)$$

где $p > 0, \theta \geq 0, \beta > 0$ — параметры распределения, а $I_{p-1}(\theta\mu_l)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента порядка $(p-1)$.

К частным случаям четырехпараметрического распределения относятся [2]:

а) трехпараметрическое распределение (распределение Бекмана) при $m_{s,l} = 0$:

$$\omega(\mu_l) = \frac{\mu_l}{\sigma_{c,l}\sigma_{s,l}} \exp\left(-\frac{\mu_l^2 + \mu_{0,l}^2}{2\sigma_{c,l}^2}\right) \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{k!2^k} \frac{\left(\sigma_{s,l}^2 - \sigma_{c,l}^2\right)^k}{\sigma_{s,l}^{2k}\mu_{0,l}^k} \mu_l^k I_k\left(\frac{\mu_{0,l}}{\sigma_{c,l}^2}\mu_l\right),$$

где $\mu_{0,l} = |m_{c,l}| \neq 0$ — регулярная составляющая сигнала; $H_{2m}(0) = (-1)^m 2^m (2m-1)!!$;

б) распределение Хойта при $\sigma_{s,l}^2 \neq \sigma_{c,l}^2$ и отсутствии регулярной составляющей $(\mu_{0,l} = 0)$:

$$\omega(\mu_l) = \frac{\mu_l}{\sigma_{c,l}\sigma_{s,l}} \exp\left[-\frac{\mu_l^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_{c,l}^2} + \frac{1}{\sigma_{s,l}^2}\right)\right] \times I_0\left(\frac{\mu_l^2}{4}\left(\frac{1}{\sigma_{c,l}^2} - \frac{1}{\sigma_{s,l}^2}\right)\right);$$

в) распределение Райса при $\sigma_{s,l}^2 = \sigma_{c,l}^2 = \sigma_l^2$:

$$\omega(\mu_l) = \frac{\mu_l}{\sigma_{c,l}^2} \exp\left(-\frac{\mu_l^2 + \mu_{0,l}^2}{2\sigma_{c,l}^2}\right) I_0\left(\frac{\mu_{0,l}}{\sigma_{c,l}^2}\mu_l\right);$$

г) распределение Релея при $\sigma_{s,l}^2 = \sigma_{c,l}^2 = \sigma_l^2$, $\mu_{0,l} = 0$ $(m_{c,l} = m_{s,l} = 0)$;

д) одностороннее нормальное распределение при $\sigma_{s,l}^2 = 0$, $m_{c,l} = m_{s,l} = 0$.

Если положить $\theta_l = \frac{m_{c,l}}{\sigma_{c,l}^2}$ и $\beta_l = \frac{1}{\sigma_{c,l}^2}$, то $\omega_{k+1}^{RN}(\mu_l) = \frac{\mu_l^{k+1}}{\sigma_{c,l}^2}\frac{1}{(m_{c,l})^k} \exp\left[-\frac{m_{c,l}^2 + \mu_l^2}{2\sigma_{c,l}^2}\right] I_k\left(\frac{m_{c,l}}{\sigma_{c,l}^2}\mu_l\right)$. Начальный второй момент распределения Райса—Накагами определяется по формуле

$$m_{2,l} = \frac{2p}{\beta_l} \exp\left(-\frac{\theta_l^2}{2\beta_l}\right) {}_1F_1\left(p+1; p; \frac{\theta_l^2}{2\beta_l}\right).$$

Если p — натуральное число, т. е. $p \in \mathbb{N}$, то нетрудно убедиться, что $m_{2,l} = \frac{2}{\beta_l}\left(p + \frac{\theta_l^2}{2\beta_l}\right)$.

Основная цель данного пункта заключается в вычислении интеграла (2) от функции Оуэна и функции Лапласа при четырехпараметрических замираниях в каждой ветви:

$$\omega(\mu_l) = q_l \exp\left[-\frac{m_{s,l}^2}{2\sigma_{s,l}^2}\right] \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m H_{2m}(-i\chi_l)}{2^m (2m)!!} \left(1 - q_l^2\right)^m \omega_{m+1}^{RN}(\mu_l) \right), \ \mu_l \geq 0.$$

Основные этапы соответствующих алгебраических преобразований при вычислении (2) можно найти в работах [6, 7]. Так, например, для распределения Райса—Накагами уравнение (2) может быть представлено в виде

$$J_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\eta} \frac{1}{1+x^2} \prod_{l=1}^{L} \left\{ \frac{\beta_l^p}{\theta_l^{p-1}} \exp\left(-\frac{\theta_l^2}{2\beta_l}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{\alpha^2 h^2}{2} \frac{\delta_l^2}{\overline{\mu_l^2}} (1+x^2) + \frac{\beta_l}{2} \right) \mu_l^2 \right] \mu_l^p I_{p-1}(\theta_l \mu_l) \mathrm{d}\mu_l \right\} \mathrm{d}x.$$

Используя работу [6], интеграл можно свести к виду

$$J_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\eta} \frac{1}{1+x^2} \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{L} \left(1 - b_l^2\right)^p \frac{1}{\left(1 + b_l^2 x^2\right)^p} \exp\left(-\frac{z_l^2}{2} \frac{1+x^2}{1+b_l^2 x^2} \right) \mathrm{d}x,$$

где $b_l^2 = \dfrac{\alpha^2 h^2 \delta_l^2}{\alpha^2 h^2 \delta_l^2 + \overline{\mu_l^2}\beta_l}$; $z_l^2 = \dfrac{\theta_l^2}{\beta_l} b_l^2$.

Этот интеграл может быть представлен в виде

$$J_L = \frac{1}{2\pi} \prod_{l=1}^{L} \left(1 - b_l^2\right)^p \int_0^{\eta} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\prod_{l=1}^{L} \left(1 + b_l^2 x^2\right)^p} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right) \sum_{l=1}^{L} \frac{z_l^2}{1+b_l^2 x^2} \right) \mathrm{d}t.$$

Полученный интеграл по структуре похож на функцию $\mathscr{H}_p(z, b, \eta)$ [6, 7], поэтому обозначим его следующим образом:

$$\mathscr{H}_p^{(L)}\left(\{z_l\}, \{b_l\}, \eta\right) = \frac{1}{2\pi} \prod_{l=1}^{L} \left(1 - b_l^2\right)^p \times$$

$$\times \int_0^{\eta} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\prod_{l=1}^{L} \left(1 + b_l^2 x^2\right)^p} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right) \sum_{l=1}^{L} \frac{z_l^2}{1+b_l^2 x^2} \right) \mathrm{d}x,$$

где запись $\{x_l\}$ означает совокупность L переменных, т. е. $\{x_l\} = (x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_L)$. Очевидно, что при $L = 1$

$$\mathscr{H}_p^{(L=1)}\left(\{z_l\},\ \{b_l\},\ \eta\right) = \mathscr{H}_p(z, b, \eta).$$

Если параметры канала одинаковы по всем ветвям и $b_l^2 = b^2$, $z_l^2 = z^2$, то

$$\mathscr{H}_p^{(L)}(z, b, \eta) = \frac{1}{2\pi} \left(1 - b^2\right)^{pL} \times$$

$$\times \int_0^{\eta} \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\left(1 + b^2 x^2\right)^{pL}} \exp\left(-\frac{Lz^2}{2} \frac{1+x^2}{1+b^2 x^2} \right) \mathrm{d}x,$$

т. е. $\mathscr{H}_p^{(L)}(z, b, \eta) = \mathscr{H}_{pL}\left(z\sqrt{L}, b, \eta\right)$.

Применяя замену $x = \mathrm{tg}\, t$, получаем альтернативное представление функции в виде следующего интеграла:

$$\mathscr{H}_p^{(L)}\left(\{z_l\},\ \{b_l\},\ \eta\right) = \frac{1}{2\pi} \prod_{l=1}^{L} \left(1 - b_l^2\right)^p \times$$

$$\times \int_0^{\mathrm{arctg}(\eta)} \frac{1}{\prod_{l=1}^{L} \left(1 + b_l^2 \mathrm{tg}^2 t\right)^p} \exp\left(-\frac{1}{2\cos^2 t} \sum_{l=1}^{L} \frac{z_l^2}{1 + b_l^2 \mathrm{tg}^2 t} \right) \mathrm{d}t$$

или

$$\mathscr{H}_p^{(L)}\left(\{z_l\},\ \{b_l\},\ \eta\right) = \frac{1}{2\pi} \prod_{l=1}^{L} \left(1 - b_l^2\right)^p \times$$

$$\times \int_0^{\mathrm{arctg}(\eta)} \frac{\cos^{2pL} t}{\prod_{l=1}^{L} \left(1 - \left(1 - b_l^2\right)\sin^2 t\right)^p} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{L} \frac{z_l^2}{1 - \left(1 - b_l^2\right)\sin^2 t} \right) \mathrm{d}t.$$

В этом представлении пределы интегрирования всегда принимают конечные значения, что важно при расчетах на ЭВМ.

Если рассматривается четырехпараметрическое распределение, то таким же образом можно показать, что в этом случае (2) принимает вид

$$\mathscr{T}^{(L)}\left(\{z_{c,l}\}, \{z_{s,l}\}, \{b_{c,l}\}, \{b_{s,l}\}, \eta\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \prod_{l=1}^{L} \sqrt{1 - b_{c,l}^2} \sqrt{1 - b_{s,l}^2} \times$$

$$\times \int_0^{\eta} \frac{1}{1+x^2} \prod_{l=1}^{L} \frac{1}{\sqrt{1 + b_{c,l}^2 x^2} \sqrt{1 + b_{s,l}^2 x^2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{z_{c,l}^2}{2} \frac{1+x^2}{1+b_{c,l}^2 x^2} - \frac{z_{s,l}^2}{2} \frac{1+x^2}{1+b_{s,l}^2 x^2} \right) \mathrm{d}x,$$

где

$$b_{c,l}^2 = \frac{\alpha^2 h^2 \delta_l^2 \sigma_{c,l}^2}{\alpha^2 h^2 \delta_l^2 \sigma_{c,l}^2 + \overline{\mu_l^2}}, \ z_{c,l}^2 = \frac{m_{c,l}^2}{\sigma_{c,l}^2} b_{c,l}^2$$

и $b_{s,l}^2 = \dfrac{\alpha^2 h^2 \delta_l^2 \sigma_{s,l}^2}{\alpha^2 h^2 \delta_l^2 \sigma_{s,l}^2 + \overline{\mu_l^2}}$, $z_{s,l}^2 = \dfrac{m_{s,l}^2}{\sigma_{s,l}^2} b_{s,l}^2$.

Учитывая, что

$$\overline{\mu_l^2} = 2\sigma_{c,l}^2 \left(1 + \gamma_{0,l}^2 + \frac{1-q_l^2}{2q_l^2}\right),$$

определим $\tilde{h}_l^2 = \dfrac{h^2\delta_l^2}{1+\gamma_{0,l}^2+\dfrac{1-q_l^2}{2q_l^2}}$, т. е. $\tilde{h}_l^2(\text{дБ}) = h_{bc}^2(\text{дБ}) + 10\lg\delta_l^2 - 10\lg\left(1+\gamma_{0,l}^2+\dfrac{1-q_l^2}{2q_l^2}\right)$. Тогда

$$b_{c,l}^2 = \frac{\alpha^2\tilde{h}_l^2}{2+\alpha^2\tilde{h}_l^2},\ b_{s,l}^2 = \frac{\alpha^2\tilde{h}_l^2}{2q_l^2+\alpha^2\tilde{h}_l^2}.$$

Для того чтобы получить усреднения функции Лапласа и их произведения через введенные функции, необходимо использовать следующие тождества, справедливые для функции Оуэна:

$$T(\alpha\mu,+\infty) = \frac{1}{2}Q(\alpha\mu);\ Q(\alpha\mu)Q(\beta\mu) = T(\alpha\mu,+\infty) + T(\beta\mu,+\infty) - \left[T\left(\alpha\mu,\frac{\beta}{\alpha}\right) + T\left(\beta\mu,\frac{\alpha}{\beta}\right)\right].$$

Отсюда, в частности, получаем, что при $\alpha=\beta$ справедливо $Q^2(\alpha\mu) = 2\left[T(\alpha\mu,+\infty) - T(\alpha\mu,1)\right]$.

Вывод соответствующих выражений осуществляется аналогично тому, как это было приведено, например, в работах [6, 7].

Значительный практический интерес представляет зависимость вероятности ошибки от числа ветвей разнесения L и коэффициента эффективности использования мощности передатчика λ: $P_{e/b}(h^2, L, \lambda)$, где $\lambda \in [0, 2]$ — распределение мощности в зависимости от вида разнесения. При определенных соотношениях между L и λ возможно определение такого значения числа ветвей, при котором вероятность ошибки будет минимальна. Формально данная задача может быть сформулирована следующим образом: $L^* = \arg\min\limits_L P_{e/b}(h^2, L, \lambda)$.

При использовании манипуляционного кода Грея в области малых ошибок вероятности ошибок на символ и в бите пропорциональны между собой, поэтому в некоторых случаях можно ограничиться определением оптимального числа ветвей при использовании формул для вероятности ошибок на символ. Для решения данной задачи может быть использован следующий подход. Рассматривается отношение $K_L = \dfrac{P_{e/b}(h^2, L+1, \lambda)}{P_{e/b}(h^2, L, \lambda)}$. Тогда, если при $L < L^*$ $K_L < 1$, а при $L > L^*$ $K_L > 1$, то при выполнении требования $K_L = 1$ может быть определено оптимальное значение числа ветвей L^*. Решение данной задачи относительно просто может быть осуществлено с помощью ЭВМ.

Приведенные результаты в совокупности с результатами помехоустойчивости, полученными для современных многопозиционных сигнальных конструкций [6, 7], позволяют решить две важные практические задачи:

1) расчет помехоустойчивости приема сигнальных конструкций при разнесенном приеме;

2) определение оптимального числа ветвей, которое в большей степени зависит от h^2. В этом случае при фиксированном h^2 рассматривается вероятность $P_{e/b}(h^2, L)$ и определяется такое L^*, что $P_{e/b}(h^2, L^*) \to \min$.

Разнесение позволяет существенно улучшить помехоустойчивость приема в цифровых системах радиосвязи. С помощью полученных соотношений можно как получить корректные сравнения между различными сигнальными конструкциями, так и оценить получаемый от разнесения выигрыш.

Литература

1. **Коржик В. И., Финк Л. М., Щелкунов К. Н.** Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник. М.: Радио и связь, 1981. 232 с.
2. **Кловский Д. Д.** Передача дискретных сообщений по радиоканалам. М.: Радио и связь, 1982. 304 с.
3. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. М.: Вильямс, 2003. 1104 с.
4. **Прокис Дж.** Цифровая связь: Пер. с англ. / Под ред. Д. Д. Кловского. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.
5. **Феер К.** Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра: Пер. с англ. / Под ред. В. И. Журавлева. М.: Радио и связь, 2000. 520 с.
6. **Савищенко Н. В.** Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и помехоустойчивость приема: Монография / Под ред. Д. Л. Бураченко. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. 420 с.
7. **Савищенко Н. В.** Помехоустойчивость модемов с двумерными сигнальными конструкциями по точным формулам вероятности ошибки в канале без замираний и с общими четырехпараметрическими замираниями // Информационно-управляющие системы. 2007. № 4. С. 44–54.