

УДК 004.94

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИСКАЖАЮЩИХСЯ МУАРОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. Акош,

научный сотрудник

Будапештский технический университет

Проведено теоретическое исследование теневого прибора муара, в результате которого была доказана необходимость в предварительной калибровке измерительного прибора с учетом вероятностных характеристик искажения данных.

Основы метода муара

Эффект муара возникает тогда, когда решетки, содержащие полосы, точки или другие геометрические элементы, накладываются друг на друга и рассматриваются в проходящем или отраженном свете. Таким образом, при наложении периодических решеток из непрозрачных (чередующихся черных) и прозрачных (белых) зон образуется квазиинтерференционная картина [1]. Полосы, с ней связанные, называются муаровыми. Расстояние между центрами двух черных или двух белых линий называется шагом решетки. Величина, обратная шагу решетки, носит название плотности или пространственной частоты линий решетки и измеряется количеством этих линий, приходящихся на единицу длины (линий или парных полос на миллиметр длины).

Общие сведения о муаровом эффекте

Основным смыслом применения способа муара в измерительной технике [2] является то, что если одна из двух основных штриховок, создающая явление муара, связана с одним состоянием измеряемой поверхности, а другая связана с другим состоянием измеряемой поверхности, и если эти два состояния отличны при различных пространственных частотах, то возникают полосы муара, которые дают информацию о различии этих двух состояний. Если одна из решеток со своей пространственной частотой связана с интерференционной, например с поверхностной, тогда возникающие муаровые полосы описывают исследуемую поверхность, связывая точки поверхности, находящиеся от интерференционной на постоянном расстоянии. В этом случае решетки с переменной пространственной частотой называются информационными, так как измененные частоты могут нести определенную информацию. Решетки с постоянной пространственной частотой называются

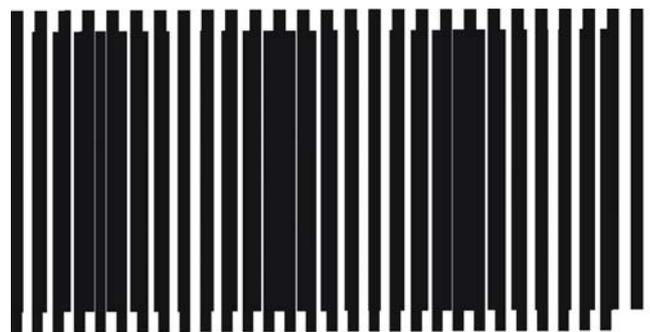
интерференционными. В результате линии муара однозначно показывают наличие кодированной информации:

$$v_m = v_1 - v_2,$$

где v_m — пространственная частота явления; v_1 — пространственная частота информационной решетки; v_2 — пространственная частота интерференционной решетки.

Природа муарового эффекта

Для изучения природы муарового эффекта достаточно рассмотреть случай наложения двух решеток [3], состоящих из прямых параллельных черных и белых полос равной ширины с неодинаковыми пространственными частотами (рис. 1). При наложении двух таких решеток возникают черные (при наложении черных) и белые (при наложении белых) области муаровой картины. В этом случае отношение черной части ко всей поверхности называется коэффициентом заполнения, меняющимся в диапазоне от 0,5 до 1. Там, где этот показатель достигает минимального значения, находится середина муаровых полос.



■ Рис. 1. Возникновение муарового эффекта

Измерительный прибор, работающий на основе муарового явления

Одним из наиболее известных и используемых измерительных приборов, основанных на муаровом эффекте, является так называемое теневое оборудование муара [4, 5]. В этом приборе точечный источник света L_s освещает интерференционную решетку, содержащую полосы с шагом T_a . Чувствительный элемент в точке O_b воспринимает освещенные части пространства за решеткой через прозрачные ее части (рис. 2). Возникающие части пространства называются муаровыми поверхностями. Порядок этой поверхности зависит от количества полос, между которыми проходит световой луч. Линию пересечения муаровой и испытываемой поверхностями называют муаровой полосой.

Модель прибора и его исследование

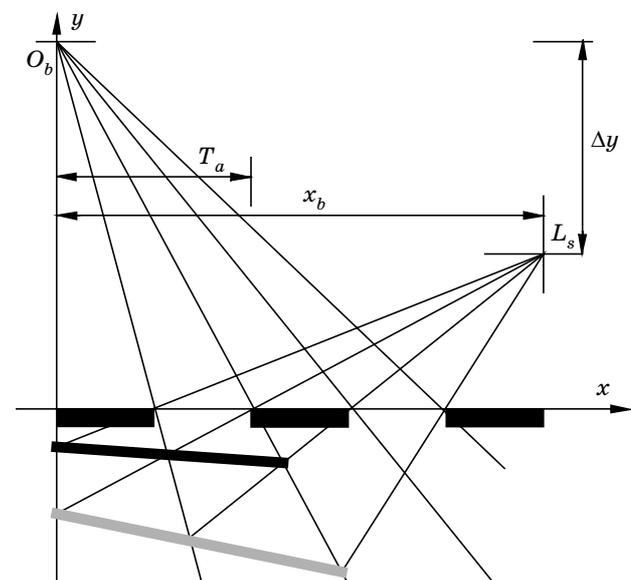
Предположим без доказательства, что если источник света и приемник находятся в плоскости, перпендикулярной к интерференционной решетке, тогда будет достаточным исследовать явление только в этой плоскости. Общие параметры [6] теневого оборудования муара показаны на рис. 2. О точке муаровой поверхности можно сказать, что:

$$y - y_{ob} = -\frac{y_{ob}}{nT_a} x \quad (1)$$

и

$$y - y_{ob} - \Delta y = \frac{y_{ob} + \Delta y}{x_b - (n+k)T_a} (x - x_b). \quad (2)$$

При преобразовании уравнений (1) и (2) получим выражения для x и y :



■ Рис. 2. Теневое оборудование муара

$$x = nT_a - nT_a \frac{y}{y_{ob}}; \quad (3)$$

$$y = \frac{kT_a (y_{ob} + \Delta y) y_{ob}}{y_{ob} (n+k)T_a - x_b y_{ob} - nT_a (y_{ob} + \Delta y)}. \quad (4)$$

Из уравнений (3), (4) муаровой поверхности k -го порядка можно очень просто вывести ее неявную форму:

$$n = \frac{xy_{ob}}{T_a (y_{ob} - y)};$$

$$y = \frac{(y_{ob} - y)kT_a (y_{ob} + \Delta y) y_{ob}}{xy_{ob}^2 + (y_{ob} + \Delta y)(kT_a (y_{ob} - y) - xy_{ob}) - x_b y_{ob} (y_{ob} - y)}.$$

При дальнейшем преобразовании получим уравнение в форме полинома

$$ay^2 + by + c = 0. \quad (5)$$

Коэффициенты a, b, c указаны в табл. 1.

Вторичную форму Q можно получить с помощью тензора второго порядка A :

$$Q = \mathbf{xAx} = a_{11}x^2 + (a_{12} + a_{21})xy + a_{22}y^2.$$

Без доказательства предположим, что если тензор A симметричен, то ему соответствует вторичная форма, которой принадлежит тензор. К симметричному тензору A всегда можно найти тензор C , такой, что C^*AC диагональные, где C^* — транспонированный тензор тензора C . Такой тензор описывает координаты формы, а элементы, находящиеся на диагонали, являются собственными значениями:

$$Q = \mathbf{xDx} = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.$$

Просто можно узнать сходство — вторичная форма Q описывает поверхности муара. Вторичная форма содержит только элементы второго порядка, поэтому поверхности будут тоже второго порядка. Если при исследовании занимаемся только с формой

$$Q = \mathbf{xAx} = 1$$

в нормальной форме

$$a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y = 1,$$

тогда тензор A называется индикатриксом вторичной формы, который характеризуется собствен-

■ Таблица 1. Коэффициенты вторичной формы

Коэффициент	Выражение
a	$kT_a - x_b$
b	$x_b y_{ob} - 2kT_a y_{ob} - kT_a \Delta y + x \Delta y$
c	$kT_a y_{ob}^2 + kT_a y_{ob} \Delta y$

ными значениями и собственными векторами. Форма

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y = a_6 \quad (6)$$

описывает сдвинутый эллипс, гиперболу, параболу или одну вырожденную форму;

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 = a_7 \quad (7)$$

описывает форму, которая находится в начале координат, его тензор

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_2}{2} & a_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

и характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (a_1 + a_3)\lambda + a_1a_3 - \frac{a_2^2}{4} = 0.$$

С помощью собственных значений (λ_1, λ_2) можно определить собственные векторы, которые описывают координатную систему индикатриса. Уравнение в новой координатной системе

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\zeta^2 = a_6.$$

На основании табл. 2 можно определить тип вторичной формы в зависимости от собственных

■ Таблица 2. Типы вторичной формы в зависимости от свойств собственных векторов

Собственное значение	a_6	Форма
Собственные ненулевые значения с одинаковыми знаками	Знак коэффициента и собственного значения одинаковый	Эллипс
	Знак коэффициента и собственного значения отличный	Нереальная
	Значение нулевое	Точка
Собственные ненулевые значения с одинаковыми и отличными знаками	Значение не нулевое	Гипербола
	Значение нулевое	Секущие прямые
Одно из собственных значений нулевое	Знак коэффициента одинаковый со знаком ненулевого собственного вектора	Параллельные прямые
	Знак коэффициента отличается от знака ненулевого собственного вектора	Виртуальные прямые
	Значение коэффициента нулевое	Одна прямая

значений. Коэффициентами в уравнении (7) определяется угол поворота

$$S = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

В матрице первый столбец соответствует собственному значению вектора s_1 , второй столбец — вектору s_2 . Это значит, что матрица трансформируется формами, описанными уравнениями (6), (7), и формой (8). Поворот трансформируется вектором $w(a_4, a_5)$ в координатной системе x, y до вектора $w'(a_4, a_5)$ координатной системы ξ, ζ : $w' = S^{-1}w$.

В результате в новой координатной системе общий вид вторичной формы будет

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\zeta^2 + a'_4\xi + a'_5\zeta = a_6.$$

При доопределении до полного квадрата:

$$\lambda_1\xi^2 + a'_4\xi + \lambda_2\zeta^2 + a'_5\zeta = a_6,$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left[\xi^2 + \frac{a'_4}{\lambda_1} \xi \right]^2 + \lambda_2 \left[\zeta^2 + \frac{a'_5}{\lambda_2} \zeta \right]^2 = \\ = a_6 + \frac{a'^2_4}{4\lambda_1} + \frac{a'^2_5}{4\lambda_2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_6 + \frac{a'^2_4}{4\lambda_1} + \frac{a'^2_5}{4\lambda_2} = a'_6$.

Итак:

$$\lambda_1 \left[\xi^2 + \frac{a'_4}{\lambda_1} \xi \right]^2 + \lambda_2 \left[\zeta^2 + \frac{a'_5}{\lambda_2} \zeta \right]^2 = a'_6.$$

Из уравнения (9) просто определяется центр вторичной формы

$$(\xi_0; \zeta_0) = \left[\frac{a'_4}{2\lambda_1}; \frac{a'_5}{2\lambda_2} \right].$$

Уравнение формы в этой координатной системе будет $\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\zeta^2 = a'_5$.

При исследовании муаровых поверхностей необходимо приведение уравнения (5) к следующему виду:

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y = a_6. \quad (10)$$

Значения коэффициентов находятся в табл. 3. Таким образом, тензор вторичной формы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta y}{2} \\ \frac{\Delta y}{2} & kT_a - x_b \end{bmatrix}$$

и его характеристическое уравнение

■ **Таблица 3.** Коэффициенты уравнения вторичной формы, описывающей муаровые поверхности

Коэффициент	Значение
a_1	0
a_2	Δy
a_3	$kT_a - x_b$
a_4	0
a_5	$x_b y_{ob} - 2kT_a y_{ob} - kT_a \Delta y$
a_6	$-kT_a y_{ob} \Delta y$

$$(0 - \lambda)(kT_a - x_b - \lambda) - \frac{(\Delta y)^2}{4} = 0,$$

из которого находятся собственные значения

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[kT_a - x_b + \sqrt{(kT_a - x_b)^2 + (\Delta y)^2} \right];$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[kT_a - x_b - \sqrt{(kT_a - x_b)^2 + (\Delta y)^2} \right].$$

С помощью уравнений $(a_{11} - \lambda_i)s_{i1} + a_{12}s_{i2} = 0$; $a_{21}s_{i1} + (a_{22} - \lambda_i)s_{i2} = 0$ вычисляются собственные векторы

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\Delta y}{kT_a - x_b + \sqrt{(kT_a - x_b)^2 + (\Delta y)^2}} \end{bmatrix};$$

$$s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\Delta y}{kT_a - x_b - \sqrt{(kT_a - x_b)^2 + (\Delta y)^2}} \end{bmatrix}.$$

Литература

1. Полухин П. И., Воронцов В. К., Кудрин А. Б., Чиенев Н. А. Деформации и напряжения при обработке металлов давлением. М.: Металлургия, 1974. С. 42–45.
2. Павельева Д., Венцел К., Антал А. Сенсоры роботов 1 / Международный центр образования. Будапешт, 2004. С. 87.
3. Patorski K., Kujawinska M. Handbook of the Moiré Fringe Technique. Amsterdam: Elsevier, 1993.

На основании уравнения (10) центр (x_0, y_0) вторичной формы

$$x_0 = \frac{2kT_a y_{ob} + kT_a \Delta y - x_b y_{ob}}{\Delta y}; \quad (11)$$

$$y_0 = 0 \quad (12)$$

и угол между главными осями

$$\text{tg} \sigma_{1,2} = \frac{1}{2a_3} \left[-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_1 a_3} \right].$$

Следовательно, если $a_2^2 - 4a_1 a_3 < 0$, то теоретически формой будет эллипс, что невозможно. При $a_2^2 - 4a_1 a_3 = 0$ и $(\Delta y)^2 = 0$ муаровые поверхности параллельны с интерференционной решеткой. При $a_2^2 - 4a_1 a_3 > 0$ и $(\Delta y)^2 > 0$ пересечения муаровых поверхностей будут гиперболами, центр которых описывают уравнения (11) и (12). Одна асимптота, параллельная с интерференционной решеткой, и тангенс угла второй асимптоты $\text{tg} \sigma = -\frac{\Delta y}{2(kT_a - x_b)}$.

Выводы

Исследование теневого оборудования муара показало, что при неправильной его установке возникают вместо плоских гиперболические муаровые поверхности, которые асимметрично искажают результаты измерения. На основе составленной модели можно оценить ошибку измерения и спланировать предварительную коррекцию геометрических параметров прибора. Необходимо подчеркнуть значимость предварительной калибровки прибора, так как на основании муаровых полос невозможно определить меру искажения данных.

Исследование было поддержано Национальным научным фондом грантов ОТКА 15527.

4. Takasaki H. Moiré Topography // Applied Optics 9. 1970. P. 1467–1472.
5. Takasaki H. Moiré Topography // Applied Optics 12. 1973. P. 845–850.
6. Meadows D. M., Johnson W. O., Allen J. B. Generation of surfaces Contours by Moiré Patterns // Applied Optics 9. 1970. P. 942–947.