УДК 519.2:519.7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ТЕХНИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ (Часть 1)

А. Е. Городецкий,
доктор техн. наук, профессор
И. Л. Тарасова,
канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник
Институт проблем машиноведения РАН

Предлагается использовать логико-вероятностные модели для диагностики структурно-сложных систем. Показано, что тогда оптимизация стратегий и тактик поиска неисправностей может быть сведена к вычислению матриц систем алгебраических уравнений по модулю два с минимальным количеством единиц и упорядочиванию строк таких матриц по убыванию вероятностей решений. Рассматриваются проблемы аппроксимации логико-вероятностных изображений сложных систем, построения, верификации, классификации и редуцирования адекватных логико-вероятностных моделей, а также проблемы распознавания изображений неисправных систем с указанием причин неисправностей.

Введение

Процесс определения неисправности в некотором техническом объекте может быть сведен к решению задачи определения причин расхождения между деформированными I_b и идеальным I изображениями диагностируемого объекта [1]. Решение этой задачи соответствует поиску наилучшего бинарного отношения g_0, которое является элементом или подмножеством из множества G ($g_0 \subseteq G$) и отвечает соотношению $I_b g_0 I$ при выполнении ограничений $I_b q_i U_i$ и $I q_i U_i$ ($q_i \subseteq Q$, $i = 1, 2, ..., m$), где G и Q — некоторые фиксированные компактные множества, а U_i — заданные априори модели или изображения ограничений. При этом можно считать, что планы или стратегии и тактики диагностики g_i допустимы по i-му ограничению, если пара $(I_b, U_i) \in q_i$ и пара $(I, U_i) \in q_i$, а план или стратегия и тактика диагностики g_0 оптимальны, если пара $(I_b, I) \in g_0$, мощность множества g_0 минимальна ($|g_0| = \min$) и элементы множества упорядочены по убыванию вероятности причины отказа [2].

Нечеткость задач аппроксимации изображений сложных систем

Основными понятиями, заимствованными из теории образов [1] и характеризующими диагностируемую систему, являются объекты и отношения. Объектами в диагностике служат элементы и блоки систем, их структуры или конфигурации, идеальные и деформированные изображения систем, классы систем. Отношения в диагностике задаются в виде преобразований подобия, комбинаторных отношений, правил идентификаций и механизмов деформаций изображений, т. е. поломок и отказов.

При диагностике систем прежде всего встает задача синтеза множества моделей (изображений) нормально функционирующей I и неисправной I_b систем по имеющимся исходным данным. Обычно исходные данные о сложной системе, получаемые из различных источников (результатов испытаний, технических отчетов, статей, книг и т. д.), плохо структурированы, обладают избыточностью и неполнотой, могут быть противоречивы, недостоверны и неоднозначны. Поэтому алгебра представления данных A_d, используемая для их описания, оказывается либо излишне общей (избыточной), либо неполной и малопригодной для создания адекватных математических моделей диагностируемых объектов.

Задача аппроксимации изображений заключается в выборе такой алгебры изображений A_I, чтобы получаемое в результате отображения $\Phi: A_d \to A_I$, изображение I^* диагностируемой системы было близко в некотором смысле к ее идеальному изображению I. При этом данные, описываемые с помощью алгебры данных, будем называть наблюдаемым (деформированным) изображением I_d.

Попытки получить наилучшую аппроксимацию изображения I сложных систем, используя элементы алгебры A_I и информацию, содержащуюся в наблюдаемом изображении I_d, могут привести к задаче принятия решения в условиях неполной определенности или к нечеткой задаче принятия решения, которая наступает, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий [3]:

$$\exists\, g_i \in I_d, |\Phi(g_i)| > 1; \quad (1)$$

$$\exists\, v_i \in I^*, |\Phi^{-1}(v_i)| > 1; \quad (2)$$

$$\exists\, g_i \in I_d, \Phi(g_i) = \varnothing; \quad (3)$$

$$\exists\, v_i \in I^*, \Phi^{-1}(v_i) = \varnothing, \quad (4)$$

где $|.|$ — мощность множества; g_i — i-й объект или отношение из множества данных в наблюдаемом изображении I_d; v_i — i-й объект или отношение из изображения I^*; $\varnothing$ — пустое множество.

Источниками возможной неоднозначности могут быть физическая неопределенность системы и окружающей среды либо неполнота используемых алгебры представления данных A_d и алгебры изображений A_I.

Неполнота алгебр A_d и A_I связана с использованием языка, имеющего конечное число элементов и структур, для описания за конечное время бесконечного множества разнообразных состояний системы и ситуаций окружающей среды.

Учитывая, что при диагностике сложной системы получение ее изображения I^* или математической модели осуществляется с целью синтезировать оптимальный алгоритм поиска неисправностей в системе, последнюю в случае выполнения хотя бы одного из соотношений (1)–(4) целесообразно рассматривать как нечеткую, неопределенности в которой описываются вероятностями случайных логических переменных [3].

Адекватность математических моделей диагностируемых систем

При построении модели исследователь обычно учитывает только наиболее существенные для достижения поставленных целей моделирования факторы. Поэтому построенная модель не тождественна объекту-оригиналу. Априори предполагается, что не учтенные при построении модели факторы оказывают малое влияние на поведение объекта по сравнению с выбранными факторами, и поэтому, с точки зрения поставленных целей моделирования, построенная модель адекватна объекту-оригиналу. Однако в совокупности неучтенные факторы могут приводить к значительным различиям между объектом и его моделью, что вызывает необходимость отладки или оптимизации построенной модели после ее апробации на ряде тестовых примеров. Если результаты дальнейшего моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что модель адекватна объекту-оригиналу. При этом адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых при оптимизации критериев качества модели, и построение идеально адекватной модели принципиально невозможно из-за практической невозможности учета бесконечного числа параметров объекта-оригинала.

Важнейшей характеристикой модели является ее сложность. Очевидно, что из множества моделей, позволяющих достичь желаемой цели и получить требуемый результат с заданной точностью или достоверностью, предпочтение мы всегда отдадим наименее сложной. При этом адекватность и сложность модели не всегда являются противоречивыми требованиями. Учитывая бесконечную сложность любого объекта-оригинала, можно предположить существование бесконечного множества его моделей, которое может быть упорядочено по степени сложности и адекватности.

Другим важным свойством модели является ее потенциальность или предсказуемость с позиции возможности получить новые знания об исследуемом объекте. Именно свойство потенциальности позволяет модели выступать в качестве самостоятельного объекта исследования. Модели, не обладающие определенной предсказуемостью, вряд ли целесообразно использовать в научных исследованиях. С другой стороны, изучение и использование моделей, обладающих хорошей потенциальностью, позволяют делать новые открытия.

Правильность полученной в результате отображения Φ: $A_d \to A_I$, математической модели I^* как системы математических соотношений подвергается обязательному контролю:

— размерностей, включающему правило, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности;

— порядков, состоящему из грубой оценки сравнительных порядков складываемых величин и исключения малозначимых параметров;

— характера зависимостей, заключающемуся в проверке того, что направление и скорость изменения выходных параметров модели, вытекающие из выписанных математических соотношений, такие, как это следует непосредственно из «физического» смысла изучаемой модели;

— экстремальных ситуаций — проверке того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к предельно допустимым для них значениям, чаще всего к нулю или бесконечности. В подобных экстремальных ситуациях модель часто упрощается, математические соотношения приобретают более наглядный смысл, упрощается их проверка;

— граничных условий, включающему проверку того, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям;

— физического смысла — проверке физического или иного, в зависимости от характера задачи, смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся по мере конструирования модели;

— математической замкнутости, состоящему в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность, притом однозначно, решить поставленную математическую задачу.

Свойство математической замкнутости системы математических соотношений тесно связано с введенным Ж. Адамаром понятием корректно поставленной математической задачи, т. е. задачи, для которой решение существует, оно единственно и непрерывно зависит от исходных данных.

Доказательство корректности конкретной математической задачи — достаточно сложная проблема, она решена только для некоторого класса математически поставленных задач. Проверка математической замкнутости является менее сложной по сравнению с проверкой корректности математической постановки. В настоящее время активно исследуются свойства некорректных задач, разрабатываются методы их решения, которые связаны с нечеткой математикой и нечетким математическим моделированием. Аналогично понятию «корректно поставленная задача» можно ввести понятие «корректная математическая модель» или «четкая математическая модель» и при «некорректно поставленной задаче» — «нечеткая математическая модель».

При моделировании сложных физических, биологических, технических, экономических, технологических, социальных и других систем мы сталкиваемся с тем, что чем сложнее система, тем менее мы способны дать точные и в то же время имеющие практическое значение суждения о ее поведении. Такая ситуация определяется термином «принцип несовместимости» [4]. Следствие из этого принципа кратко можно выразить так: «Чем глубже мы анализируем реальную задачу, тем неопределеннее становится ее решение». Именно в этом смысле точный количественный анализ поведения сложных систем для практического исследования реальных задач, по-видимому, недостаточен.

Логико-вероятностное моделирование систем

В работе [4] предлагается подход к созданию нечетких математических моделей, который опирается на предпосылку о том, что элементами исследования являются не числа, а некоторые нечеткие множества, для которых переход от «принадлежности к классу» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен. В основе такого подхода лежит не традиционная двузначная или даже многозначная логика, а логика с нечеткой истинностью, нечеткими связями и нечеткими правилами вывода. Этот подход имеет три отличительные черты:

— в нем используются так называемые «лингвистические» переменные вместо числовых переменных или в дополнение к ним;

— простые отношения между переменными описываются с помощью нечетких высказываний;

— сложные отношения описываются нечеткими алгоритмами.

Отметим, что с математической точки зрения предложенный подход как метод описания неопределенности лежит между описаниями с позиций теории вероятностей и математической статистики (в этом случае параметры системы, имеющие вероятностный, случайный характер, определяются некоторыми распределениями) и с позиций интервальной математики, при которой характеристики задаются диапазонами возможных значений (верхними и нижними границами).

Подобный тип задач чаще всего имеет место в случае, когда концептуальная постановка задачи сформулирована в виде некоторого неопределенного высказывания типа «Если А, то В» {A => B), в котором А и В можно описать нечеткими множествами.

Предлагаемый подход к созданию нечетких моделей для диагностики отказов не имеет преимуществ перед логико-вероятностными методами, но значительно усложняет вычислительную процедуру поиска наилучшего бинарного отношения $g_{0.}$

В задаче логико-вероятностного математического моделирования каждому объекту моделирования можно поставить в соответствие m-ю оптимальную модель типа [3]

$$\mathbf{Y(k+1) = A\&Y(k) \oplus B\&U(k) \oplus} \\ \mathbf{\oplus\, C\&V(k) \oplus DF(k)}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{Y(k+1)}$, $\mathbf{Y(k)}$ — векторы логических переменных, принимающих значения 0 либо 1 и характеризующих состояние системы в $(k+1)$-й и k-й моменты времени соответственно;

$\mathbf{U(k)}$ — вектор логических переменных, принимающих значения 0 либо 1 и характеризующих управляющие воздействия в k-й момент времени;

$\mathbf{V(k)}$ — вектор логических переменных, принимающих значения 0 либо 1 и характеризующих задание на управление в k-й момент времени;

$\mathbf{F(k)}$ — вектор логических переменных, принимающих значения 0 либо 1 и характеризующий возмущающие воздействия в k-й момент времени;

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ — матрицы из 0 и 1, характеризующие систему в k-й момент времени;

$\&$ — знак операции логического умножения матрицы на вектор;

$\oplus$ — знак операции сложения по модулю 2, лишь с некоторой вероятностью P_m, вычисляемой по формуле [3]

$$P_m = (-2)^0 \sum_{i=1}^{n} P_{ik} + (-2)^1 \sum_{i,j} P_{ik} P_{jk} +$$
$$+ (-2)^2 \sum_{i,j,q} P_{ik} P_{jk} P_{qk} + \ldots + (-2)^{N-1} \prod_{i=1}^{n} P_{ik}, \qquad (6)$$

где P_{ik}, P_{jk}, P_{qk} — вероятности случайных событий (параметров, отношений и т. п.), характеризующих моделируемый объект, которые в процессе моделирования могут быть задаваемыми:

— неизменными числами в диапазоне $\{0, 1\}$;

— функциями времени со значениями в диапазоне $\{0, 1\}$;

— интервально $\{a_i, b_i\}$ при $a_i \geq 0$, $b_i \leq 1$;

— интервально с изменяющимися во времени интервалами $\{a_i(t), b_i(t)\}$ при $a_i \geq 0$, $b_i \leq 1$;

— интервально со случайными границами с известными плотностями распределения $f(a_i)$, $f(b_i)$;

— интервально со случайными границами с известными математическими ожиданиями $M(a_i)$, $M(b_i)$ и дисперсиями $D(a_i)$, $D(b_i)$;

— интервально со случайными границами с известными, изменяющимися во времени плотностями распределения $f(a_i(t))$, $f(b_i(t))$, математическими ожиданиями $M(a_i(t))$, $M(b_i(t))$ и дисперсиями $D(a_i(t))$, $D(b_i(t))$;

а также могут быть случайными величинами:

— с известными плотностями распределения $f(P_{ik})$;

— с известными математическими ожиданиями $M(P_{ik})$ и дисперсиями $D(P_{ik})$;

— с изменяющимися во времени плотностями распределения, математическими ожиданиями и дисперсиями и

— задаваемыми в любом из перечисленных сочетаний.

При таком подходе к построению математических моделей диагностируемых систем поиск наилучших моделей или оценку их адекватности можно проводить с использованием таких известных вычислительных методов [5] как математическое моделирование в порядковых шкалах, обобщенное математическое программирование или многошаговое обобщенное математическое программирование. Указанные методы базируются на оценке бинарных отношений вида $I^* q I$. При этом модель I^* считается адекватной, если пара

$$(I^*, I) \in q. \qquad (7)$$

Отношение q может быть выражено в виде системы логических уравнений:

$$\mathbf{CQ} = \mathbf{E} \qquad (8)$$

или

$$\mathbf{CQ} = \mathbf{Y}. \qquad (9)$$

Вектор $\mathbf{Q}$ имеет размерность N и в самом общем случае может иметь $N = 2^n - 1$ компонент вида

$$< q_1, q_2, ..., q_n, q_1q_2, q_1q_3, ..., q_{n-1}q_n, q_1q_2q_3, ..., q_{n-2}q_{n-1}q_n, ..., q_1q_2, ..., q_{n-1}q_n >. \qquad (10)$$

Компоненты q_i вектора $\mathbf{Q}$ являются логическими переменными, характеризующими близость объектов и отношений построенной модели I^* к элементам и отношениям идеальной модели I.

Матрица $\mathbf{C}$ состоит из M идентификационных строк C_i, имеющих размерность вектора $\mathbf{Q}$ и содержащих элементы 0 и 1 в заданном порядке, например: $C_i = |\,0\ 0\ 1\ 1\ ...\ 0\ 1|$.

Вектор $\mathbf{E}$ — единичный ($\mathbf{E}^T = |1\ 1\ 1\ ...\ 1|$), имеющий размерность вектора $\mathbf{Q}$.

Вектор $\mathbf{Y}$ имеет размерность вектора $\mathbf{Q}$ и его компоненты y_i могут принимать значение 1 с некоторыми вероятностями P_i, вычисляемыми через вероятности компонент q_i по формулам вида (6).

Тогда возможны следующие ситуации принятия решения об адекватности модели I^*:

— для $\forall\ q_i$ вероятность $P\{q_i = 1\} = 1$ и модель I^* считается адекватной, если выполняется условие (8), и не адекватной, если условие (8) не выполняется;

— для $\forall\ q_i$ вероятность $P\{q_i = 1\} = 0$ и модель I^* считается не определенной и отношение q построено неправильно;

— $\exists\ q_i$, для которого вероятность $0 > P\{q_i = 1\} < 1$ и модель I^* считается адекватной, если $\sum_{i=1}^{M} P_i \geq A$, где A — экспертная оценка адекватности, или модель $I^*{}_i$ — наилучшая из всех рассматриваемых, если для нее $\sum_{i=1}^{M} P_i = \max$.

Последняя ситуация является наиболее типичной при оценке адекватности нечетких логико-вероятностных моделей диагностируемых сложных систем. При большом количестве логических слагаемых в функции y_i процедура вычисления вероятности P_i по формуле (6) требует больших затрат времени, и в ряде случаев даже использование для этих целей современных ЭВМ с традиционной архитектурой приводит к неприемлемым затратам машинного времени. Однако структура уравнения (6) позволяет легко использовать для целей вычисления указанных вероятностей ЭВМ с параллельной архитектурой вычислений, например нейронные сети.

Кроме того, известно [6], что при определенных условиях большей частью слагаемых в уравнении (6) можно пренебречь из-за их малого значения. По существу задача состоит в определении суммы первых 7–15 слагаемых в уравнении (6), которые составляют основной вклад в значение вероятности, рассчитанной по формуле (6). Остальными слагаемыми можно пренебречь, тем более, что вероятности исходных логических переменных q_i обычно определяют с определенными погрешностями и, соответственно, значение вероятности, полученное из уравнения (6), будет тоже иметь погрешность. Более того, при поиске наилучшей модели нас интересуют не сами значения вероятностей решений y_i, получаемых из системы уравнений (9), а модель с наибольшей суммой вероятностей.

Литература

1. **Grenander U.** Pattern analysis // Lectures in Pattern Theory. N. Y.: Springer-Verlag; Berlin: Heidelberg. Vol. 11. 1978.
2. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В., Ерофеев А. А.** Принципы создания моделей для прогноза отказов в нечетких системах // Управление в условиях неопределенности / Под ред. А. Е. Городецкого. СПб.: СПбГТУ, 2002.
3. **Городецкий А. Е., Тарасова И. Л.** Управление и нейронные сети. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005.
4. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets // Inform. Contr. 1965. Vol. 8. P. 338–353.
5. **Юдин Д. Б.** Вычислительные методы теории принятия решений. М.: Наука, 1989.
6. **Городецкий А. Е., Дубаренко В. В.** Комбинаторный метод вычисления вероятности сложных логических функций // ЖВТ и МФ. 1999. Т. 39. № 7. С. 1246–1248 .
7. **Городецкий А. Е., Тарасова И. Л.** Логически прозрачные сети // Информационно-управляющие системы. 2003. № 5. С. 18–20.
8. **Городецкий А. Е.** Об использовании ситуации привычности для ускоренного принятия решения в интеллектуальных информационно-измерительных системах // Физическая метрология: теоретические и прикладные аспекты. СПб.: Изд. KN, 1996. С. 141–151.