УДК 533.9

МЕТОД АКТИВНОЙ МНОГОМОДОВОЙ ДИАГНОСТИКИ ПЛАЗМЫ

Л. Кордеро,
аспирант
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Ставится задача определения пространственного распределения концентрации электронов бортовой плазмы. Предлагается использовать решение обратной задачи Штурма—Лиувиля. Исходными данными являются измеренные на нескольких модах значения комплексных коэффициентов отражения в плоскости апертуры бортовой антенны. Рассматривается алгоритм восстановления распределения концентрации электронов.

Ключевые слова *— бортовая плазма, концентрация электронов, диагностика плазмы.*

Знание электрофизических параметров плазменной оболочки, окружающей гиперзвуковой летательный аппарат (ГЛА) на траектории спуска, совершенно необходимо для расчета прохождения электромагнитной волны через плазму. Оценка этих параметров возможна методом активной многомодовой диагностики.

Предполагается, что свойства плазмы непрерывно изменяются в направлении одной из осей прямоугольной системы координат (оси z, перпендикулярной к поверхности борта ГЛА) и остаются неизменными в плоскостях, перпендикулярных этой оси. Такое предположение вполне правомерно, поскольку газодинамические расчеты показывают, что за исключением мест, где наблюдаются скачки уплотнения набегающего потока, и появляется градиент параметров плазмы вдоль осей x и y. Плазма представляет собой плосконеоднородную среду. При этом рассматривается слой плазмы с малыми потерями: $\frac{\nu(z)}{\omega} << 1$, где $\nu(z)$ — частота соударений электронов; ω — циклическая частота зондирующей электромагнитной волны.

Ставится задача определения распределения концентрации электронов плазмы $Ne(z)$ по комплексным коэффициентам отражения мод зондирующей по направлению z электромагнитной волны, т. е. решения обратной задачи радиофизики восстановления профиля плазмы.

Запишем уравнение Гельмгольца для плосконеоднородной среды в виде

$$\nabla^2 E(\bar{r}) + k^2 \varepsilon(z) E(\bar{r}) = 0, \tag{1}$$

где $E(\bar{r})$ — напряженность электрического поля в точке, определяемой радиус-вектором $\bar{r}$; k — волновое число; $\varepsilon(z)$ — относительная диэлектрическая проницаемость среды. Перейдем к спектральной плотности функции $\tilde{E}(\bar{r})$ через преобразование Фурье по x и y:

$$E(\bar{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int \tilde{E}(h, \chi, z) \exp(-i(hx + \chi y)) \mathrm{d}h \mathrm{d}\chi;$$

$$\tilde{E}(h, \chi, z) = \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty}\int E(\bar{r}) \exp(i(hx + xy)) \mathrm{d}x \mathrm{d}y,$$

где h и χ — проекции волнового вектора на оси x и y соответственно, а символ “~” означает спектральную плотность. Перепишем уравнение (1), опуская аргументы $\bar{r}$ и z, в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 \varepsilon E = 0.$$

Теперь сведем уравнение Гельмгольца к уравнению Штурма—Лиувиля на отрезке, взяв соответствующие производные от (1):

$$-h^2 \tilde{E} - \chi^2 \tilde{E} + \tilde{E}'' + k^2 \varepsilon \tilde{E} = 0.$$

Сгруппировав, получим

$$\tilde{E}'' + \tilde{E}(k^2 - h^2 - \chi^2 - q(z)) = 0$$

или

$$\tilde{E}'' + (\Gamma^2 - q(z))\tilde{E} = 0, \quad z \in [0, d],$$

где $q(z) = k^2 - k^2\varepsilon(z) = k^2(1 - \varepsilon(z))$.

Для напряженности электрического поля

$$E''(\Gamma, z) + (\Gamma^2 - q(z)) E(\Gamma, z) = 0. \tag{2}$$

Здесь Γ — продольное волновое число или проекция волнового вектора на ось z; $k=\sqrt{h^2+\chi^2+\Gamma^2}$.

Выражение (2) представляет собой краевую задачу Штурма—Лиувиля на отрезке с параметром Γ — собственным значением данной краевой задачи. Фактически $\Gamma\equiv\Gamma_n=\sqrt{k^2-\chi^2-h^2}$, где $n = 1 \ldots N$ — число мод зондирующей волны.

Обозначим решение задачи (2) через $E_\pm(\Gamma, z)$. Они описывают волны, расходящиеся в направлениях $\pm z$, переходящие соответственно в волны $E_\pm(\Gamma, z)$~$\exp(-i\Gamma z)$ при $d \le z$ и $E_-(\Gamma, z)$~$\exp(+i\Gamma z)$ при $z \le 0$ и удовлетворяющие граничным условиям.

Для решения обратной задачи введем в рассмотрение так называемую функцию рассеяния $S(\Gamma)$. При решений задачи Штурма—Лиувиля функция $S(\Gamma)$ представляется следующим образом:

$$S(\Gamma)=\frac{A(\Gamma)}{B(\Gamma)}, \tag{3}$$

где $A(\Gamma)$ и $B(\Gamma)$ — целые функции, определяемые следующими вронскианами:

$$E_+(\Gamma,z),\ \ E_-(\Gamma,z);$$

$$E'_+(\Gamma,z),\ \ E'_-(\Gamma,z);$$

$$A(\Gamma)=\begin{vmatrix}E_+(\Gamma,z) & E_-(\Gamma,z)\\ E'_+(\Gamma,z) & E'_-(\Gamma,z)\end{vmatrix};$$

$$B(\Gamma)=\begin{vmatrix}E_-(\Gamma,z) & E_+(\Gamma,z)\\ E'_-(\Gamma,z) & E'_+(\Gamma,z)\end{vmatrix}. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3) и учитывая, что $E_+(\Gamma, z)$~$\exp(-i\Gamma z)$, а $E_-(\Gamma, z)$~$\exp(+i\Gamma z)$, получим

$$S(\Gamma)=\frac{i\Gamma E_+(\Gamma,z)+i\Gamma E'_+(\Gamma,z)}{i\Gamma E_+(\Gamma,z)-i\Gamma E'_+(\Gamma,z)}.$$

При $z = 0$

$$S(\Gamma)=\frac{i\Gamma E_+(\Gamma,0)+i\Gamma E'_+(\Gamma,0)}{i\Gamma E_+(\Gamma,0)-i\Gamma E'_+(\Gamma,0)}.$$

Для того чтобы использовать функцию рассеяния для решения поставленной обратной задачи активной многомодовой диагностики плазмы, необходимо определить область изменения, область возможных значений и свойства функции $S(\Gamma)$. Можно показать, что для $\Gamma\in[0,\ k]$ значения $S(\Gamma)$ являются коэффициентами отражения зондирующих мод от слоя на апертуре излучателя ($z = 0$) в функции продольных волновых чисел.

Для функции рассеяния могут быть доказаны следующие *свойства* [1], используемые для восстановления ее значений на бесконечном интервале $-\infty \le \Gamma \le \infty$.

1. $S(\Gamma) = -1$. Свойство используется при восстановлении значений $S(\Gamma)$ в нуле.

2. В случае среды с малыми потерями $\left(\frac{\nu(z)}{\omega}<1\right)$ функция $S(\Gamma)$ аналитически продолжается с положительной полуоси на отрицательную, причем $\left|S(-\Gamma)-S^*(\Gamma)\right|<\frac{\max\nu(z)}{\omega}$, т. е. $|S(-\Gamma)|\approx|S^*(\Gamma)|$. Свойство используется при восстановлении значений $S(\Gamma)$ на отрицательной оси.

3. На вещественной оси $S(\Gamma)$ полиномиально убывает по модулю при $|\Gamma|\to\infty$: $\left|S(\Gamma)\right|<\frac{\text{const}}{|\Gamma|}$, т. е. $S(\Gamma)\to 0$ при $|\Gamma|\to\infty$. Свойство используется при восстановлении значений $S(\Gamma)$ на бесконечности.

4. В верхней полуплоскости вблизи вещественной оси $S(\Gamma)$ ограничена: $|(\Gamma)| < \text{M}$.

Восстановление концентрации электронов плазмы $Ne(z)$ возможно провести в два этапа:

1) восстановление функции рассеяния по входным данным — комплексным коэффициентам отражения;

2) восстановление распределения концентрации электронов $Ne(z)$ по функции рассеяния: $S(\Gamma) \to$ $\to Ne(z)$.

Восстановление функции рассеяния проведем по следующему алгоритму.

1. Восстановление $S(\Gamma)$ в узлах $\Gamma = 0$: $\pm \Gamma n \in [-k, k]$.

1.1. Для достаточно большого электрического размера апертуры волновода $\left(\frac{\text{const}}{ka}\to 0\right)$ принимаем, что на положительной полуоси $\Gamma \in\ ]0,\ k[$ комплексные коэффициенты отражения n-х мод будут равны соответствующим значениям искомой функции $S(\Gamma_n)$.

1.2. Используя свойство 2 функции $S(\Gamma)$, аналитически продолжаем функцию $S(\Gamma)$ на отрицательную полуось, для чего откладываем в левой полуплоскости еще N дискретных сопряженных значений функции $S(\Gamma)$. Физически $\Gamma \in [0,\ k]$, но для аналитической процедуры восстановления $Ne(z)$ необходимо продолжить функцию рассеяния на всю ось $-\infty < \Gamma < \infty$, используя свойство аналитического продолжения, и иметь $2N$ значений.

1.3. Используя свойство 1 функции $S(\Gamma)$, восстанавливаем ее значение в нуле: $S(0) = -1$. Получаем $(2N + 1)$ значений.

2. Восстановление функции $S(\Gamma)$ на всем интервале $-\infty < \Gamma < \infty$.

2.1. По $(2N + 1)$ дискретным значениям функции $S(\Gamma_n)$ в узлах известным аналитическим методом (например, кусочно-ломаной аппроксимацией) формируем непрерывную функцию $S(\Gamma_n)$ на промежутке $]-k,\ k[$.

2.2. Используя свойство 3, функцию $S(\Gamma)$ вне интервала $]-k,\ k[$ интерполируем нулем. Таким образом, из N значений измеренных комплексных коэффициентов отражения, зондирующих плазму мод, восстановлена функция рассеяния $S(\Gamma)$ на бесконечном интервале $-\infty < \Gamma < \infty$.

Восстановление распределения концентрации электронов плазмы проведем по восстановленной функции рассеяния. Определим параметр $q(z)$ в краевой задаче Штурма—Лиувиля. В теории обратных задач функция $q(z)$ называется потенциалом рассеяния и для плазменной среды имеет вид

$$q(z) = k^2\left(1-\varepsilon(z)\right). \quad (5)$$

Потенциал рассеяния характеризует рассеивающие свойства зондируемой среды. Диэлектрическая проницаемость плазмы описывается выражением

$$\varepsilon(z) = 1 - \frac{\left(\omega_0(z)/\omega\right)^2}{1 - i\nu(z)/\omega}, \quad (6)$$

где плазменная частота

$$\omega_0(z) = 2\pi 8978\sqrt{Ne(z)}. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (5) и учитывая, что $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$, где c — скорость света, получим связь потенциала рассеяния с плазменной частотой:

$$-q(z) = 1 - \frac{\left(\omega_0(z)/\omega\right)^2}{1 - i\nu(z)/\omega}.$$

Для плазмы с малыми потерями

$$q(z) \approx \left(\frac{\omega_0(z)}{\omega}\right)^2.$$

Учитывая выражение (7), получим связь потенциала рассеяния с искомым распределением концентрации электронов плазмы:

$$Ne(z) = \mathrm{const}\, q(z), \quad (8)$$

где $\mathrm{const} = \dfrac{c^2}{4\pi^2(8978)^2}$.

Таким образом, из найденного уравнения (8) видно, что в конечном счете для решения обратной задачи необходимо определить потенциал рассеяния, связанный с искомым распределением простым соотношением (8).

Решение $E\_(\Gamma, z)$ краевой задачи Штурма—Лиувиля представляется следующим оператором преобразования через решение этой же задачи при $q(z) = 0$:

$$E\_(\Gamma, z) = \begin{cases} \exp(i\Gamma z + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K\_(z,t)\exp(i\Gamma z)\mathrm{d}t, & z \ge 0 \\ \exp(i\Gamma z), & z < 0 \end{cases}.$$

Подынтегральная функция $K\_(z, t)$ определяется решением уравнения Марченко — основного уравнения теории рассеяния:

$$K(z,t) + f(z+t) + \int\limits_{-\infty}^{z} K(z,u) f(u+t)\mathrm{d}t = 0. \quad (9)$$

Функция $K(z, t)$ является суммируемой на полуоси $-\infty < t \le z$, причем

$$K(z,z) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{z} q(z)\mathrm{d}z. \quad (10)$$

Функция $f(z)$, входящая в (9), представляет собой преобразование Фурье найденной ранее функции рассеяния $S(\Gamma)$ [1, 2]:

$$f(z)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\Gamma)\exp(i\Gamma z)\mathrm{d}z.$$

Связь функции $K(z, t)$ и искомого потенциала рассеяния просто находится, если для решения краевой задачи (2) подставить представление последнего в виде оператора (9) или прямо из выражения (10):

$$q(z) = \begin{cases} 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}K(z,z), & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

Откуда с учетом выражения для $q(z)$ получаем

$$\omega_0^2(z) = \begin{cases} 2c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}K(z,z), & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

Искомое распределение концентрации электронов с учетом (7) определится следующим образом:

$$Ne = \begin{cases} \dfrac{2c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}K(z,z)}{4\pi^2(8978)^2}, & z \ge 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}.$$

Таким образом, полученные соотношения и описанный порядок их применения определяют алгоритм восстановления концентрации электронов бортовой плазмы. Разработанный алгоритм является приближенным. В связи с этим встает вопрос корректности решения обратной задачи многомодовой диагностики. Корректность использования математического аппарата решения обратных задач рассеяния (существование, единственность и устойчивость решения) в общем случае полностью доказана в специальных математических работах [1–3].

Литература

1. **Марченко В. А.** Спектральная теория операторов Штурма—Лиувиля. Киев: Наук. думка, 1972. 200 с.
2. **Марченко В. А.** Устойчивость обратной задачи теории рассеяния // Матем. сб. 1968. Т. 77(119). № 2. С. 139–162, 300.
3. **Лундина Д. Ш., Марченко В. А.** Уточнение неравенств, характеризующих устойчивость обратной задачи рассеяния // Матем. сб. 1969. Т. 78(120). № 4. С. 475–484, 500.