УДК 519.95

МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ В МОДЕЛИРОВАНИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СО СТРУКТУРНЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ

А. Н. Кириллов,
канд. физ.-мат. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров

Предлагается метод построения математических моделей сложных систем с изменяющейся в процессе функционирования структурой. Вводится динамическая система, состоящая из переменного количества подсистем. На ее основе моделируется процесс инвестирования динамической экономической системы, описывающей крупный промышленный комплекс.

Ключевые слова *— динамическая система управления, декомпозиция, структура, переменная размерность, экономическая система, моделирование динамики.*

Введение

Математическое моделирование сложных динамических систем, например крупных производственных комплексов, биоценозов, многостадийных технологических процессов, связано с труднопреодолимым противоречием. С одной стороны, для использования модели в целях прогнозирования поведения реальной системы следует получать более полное ее описание, что приводит к невозможности аналитического или качественного исследования. С другой стороны, упрощение модели лишает ее практической ценности. Необходим компромисс между точностью описания и сложностью исследования. Наиболее удачные математические модели сочетают в себе эти качества. В данной работе предлагается подход, в некоторой степени разрешающий указанное выше противоречие. Вводится процедура разбиения жизненного цикла системы на временные промежутки так, чтобы исходная сложная система на каждом промежутке представлялась относительно простой моделью. Этот подход был реализован в работе [1], где рассмотрена двухвидовая система «хищник–жертва» с миграцией популяции хищника, которая зависит от его трофической связи с популяцией жертв. При этом процесс функционирования сообщества представляется последовательностью сменяющих друг друга стадий. Сменяемость стадий характерна также для процесса управления системой химических реакторов [2], моделей динамики метапопуляций, экономических систем с переменной структурой. При моделировании этих процессов используются динамические системы, размерность которых, в зависимости от состояния, может изменяться с течением времени, т. е. происходит динамическая декомпозиция сложной системы [3]. Возможность использования систем с переменной размерностью при моделировании динамики биологических сообществ указывалась еще в работе Ю. М. Свирежева [4]. При построении теории реализации Р. Калман предложил [5] обобщить понятие динамической системы таким образом, чтобы размерность ее пространства состояний могла меняться во времени. Систему оптимального управления со сменой фазового пространства рассматривал В. Г. Болтянский [6]. Вопросы моделирования многосвязных систем с изменяющейся структурой исследовались в работах [7–9]. В настоящей работе продолжается исследование систем с переменной размерностью, начатое автором [1, 3]. Вводится понятие линейной системы с переменной размерностью, которая применяется для построения модели инвестирования производственного объединения.

Структура системы

Предположим, что система S состоит из подсистем S_i $i = 1, \ldots, n$. Взаимосвязи между подсистемами характеризуют внутреннюю структуру системы. Исследование влияния их интенсивности на устойчивость положений равновесия проводилось [7, 8]. Здесь же рассмотрим внешнюю структуру системы, которую введем следующим образом. В процессе функционирования влияние некоторых из подсистем S_i на динамику S может или ослабевать, или усиливаться. Возможно также полное отключение каких-либо подсистем на некоторое время. Если влиянием подсистемы S_i на динамику S можно пренебречь, то будем говорить, что S_i находится в пассивном режиме, иначе — в активном. В связи с этим введем вектор $\boldsymbol{\gamma}\in R^n$ с компонентами γ_i, $i = 1, \ldots, n$, при этом $\gamma_i = 1$, если подсистема S_i находится в активном режиме, и $\gamma_i = 0$, если S_i — в пассивном режиме. Вектор $\boldsymbol{\gamma}$ назовем вектором внешней структуры системы S, или, короче, структурой S. Из определения следует, что $\boldsymbol{\gamma}$ принимает значения на множестве вершин единичного n-мерного куба. Под внутренней структурой системы S будем понимать структуру взаимосвязей между подсистемами, но здесь этот вопрос не освещается. Для описания процесса изменения структуры системы введем вектор $\mathbf{y}\in R^n$ с компонентами y_i, $i = 1, \ldots, n$, динамика которого задается некоторой системой дифференциальных уравнений. Пусть Δ — множество значений $\mathbf{y}$, $\Delta\subset R^n$. Разобьем Δ на непересекающиеся подмножества Δ_i^0, Δ_i^1, $\Delta = \Delta_i^0\cup\Delta_i^1$, $\Delta_i^0\cap\Delta_i^1 = \varnothing$. Будем полагать, что $\gamma_i = 0$, если $y_i\in\Delta_i^0$; $\gamma_i = 1$, если $y_i\in\Delta_i^1$. Таким образом, при изменении $\mathbf{y}$ структура системы эволюционирует. В связи с этим вектор $\mathbf{y}$ можно считать многомерным временем эволюции системы, в отличие от текущего времени t, изменение которого влияет на состояние системы.

Линейная система с переменной размерностью

Введем в рассмотрение следующую многостадийную линейную систему. Пусть $\mathbf{x}$ — вектор состояний системы S, x_i — его компоненты. Размерность $\mathbf{x}$ может изменяться во времени при изменении структуры системы. Пусть подсистемы с номерами s_k, $k = 1, \ldots, m$, активны, а с номерами s_j, $j = m + 1, \ldots, n$, — пассивны. Введем уравнения, задающие динамику компонентов x_{s_k}, входящих в состав $\mathbf{x}$, в зависимости от условий, которым удовлетворяют компоненты y_{s_i} вектора времени эволюции $\mathbf{y}$. Пусть при

$$y_{s_k} > d_{s_k},\ \ k = 1, \ldots, m,\ \ m \in \{1, \ldots, n\}; \qquad (1)$$

$$y_{s_j} < d_{s_j},\ \ j = m+1, \ldots, n \qquad (2)$$

система S задается уравнениями

$$\dot{x}_{s_k} = a_{s_k, s_k} x_{s_k} + \ldots + a_{s_k, s_m} x_{s_m}; \qquad (3)$$

$$\dot{y}_{s_k} = b_{s_k, s_k} x_{s_k} + \ldots + b_{s_k, s_m} x_{s_m}; \qquad (4)$$

$$\dot{y}_{s_j} = \tilde{b}_{s_j, s_1} x_{s_1} + \ldots + \tilde{b}_{s_j, s_m} x_{s_m}, \qquad (5)$$

где d_{s_k}, $a_{s_k,\,s_k}$, $b_{s_k,\,s_k}$, $\tilde{b}_{s_j, s_k}$ — заданные постоянные. При этом будем говорить, что многостадийная система S находится в стадии $S(s_1, \ldots, s_m)$. Здесь индексы в скобках — номера переменных x_{s_k}, входящих в данную стадию. Уравнения (3) задают динамику вектора состояний системы в стадии $S(s_1, \ldots, s_m)$, уравнения (4), (5) — динамику времени эволюции активных и пассивных подсистем соответственно.

Уменьшение размерности системы. Пусть при попадании траектории системы (3)–(5) в некоторый момент времени t^- из области (1), (2) на плоскость $y_{s_l} = d_{s_l}$ при некотором $l\in\{1, \ldots, m\}$ происходит переход от стадии $S(s_1, \ldots, s_m)$ к стадии $S(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m)$, где символом $\hat{s}_l$ обозначен отсутствующий компонент в наборе индексов. Таким образом, стадия $S(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m)$ будет описываться системой (3)–(5), в которую не входит уравнение, задающее динамику переменной x_{s_l}, а уравнение, задающее динамику y_{s_l}, принимает вид

$$\dot{y}_{s_l} = \tilde{b}_{s_1, s_1} x_{s_1} + \ldots + \tilde{b}_{s_1, s_m} x_{s_m},$$

причем в его правой части, а также в правых частях других уравнений (3)–(5) отсутствуют слагаемые, содержащие переменную x_{s_l}. Для формального описания процесса уменьшения размерности введем следующие обозначения.

Матрицы:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\},\ i, j = 1, \ldots, n;$$

$\mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m|p_1, \ldots, p_r)$ — матрица, состоящая из элементов матрицы $\mathbf{A}$, стоящих на пересечении ее строк и столбцов с номерами $s_1, \ldots, s_m$ и $p_1, \ldots, p_r$ соответственно;

$\mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m|s_1, \ldots, s_m) \equiv \mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m)$ — квадратная матрица порядка m, составленная из элементов матрицы $\mathbf{A}$, стоящих на пересечении строк и столбцов с номерами $s_1, \ldots, s_m$;

$\mathbf{A}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m)$ — квадратная матрица порядка $m - 1$, полученная из $\mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m)$ удалением из нее строки и столбца с номером s_l;

$\mathbf{A}(s_1, \ldots, 0_{s_l}, \ldots, s_m)$ — квадратная матрица порядка m, полученная из $\mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m)$ заменой ее строки и столбца с номером s_l нулевой строкой и столбцом;

$\mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m|\cdot)$ — матрица, составленная из элементов матрицы $\mathbf{A}$, стоящих на пересечении ее строк с номерами $s_1, \ldots, s_m$ и столбцов со всеми номерами, не равными $s_1, \ldots, s_m$, т. е. с номерами множества $\{1, \ldots, n\}\backslash\{s_1, \ldots, s_m\}$; $\mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m|\cdot)$ имеет размерность $m\times(n - m)$;

$\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \{\tilde{b}_{ij}\}$, $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ — заданные матрицы с постоянными элементами, $i, j = 1, \ldots, n$.

Векторы:

$\mathbf{x}(s_1, ..., s_m) = (x_{s_1}, ..., x_{s_m})^* \in R^m$; $\mathbf{x}(s_1, ..., s_m)(t) = (x_{s_1}(t), ..., x_{s_m}(t))^*$; * — символ операции транспонирования;

$\mathbf{x}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m)$ — вектор, полученный из $\mathbf{x}(s_1, ..., s_m)$ удалением из него компонента с номером s_l, $\mathbf{x}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m) \in R^{m-1}$;

$\mathbf{x}(s_1, ..., 0_{s_l}, ..., s_m)$ — вектор, полученный из $\mathbf{x}(s_1, ..., s_m)$ заменой его компонента с номером s_l нулем.

Тогда стадия $S(s_1, ..., s_m)$ задается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_m) = \mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m); \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(s_1, \ldots, s_m) = \mathbf{B}(s_1, \ldots, s_m) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m); \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(s_{m+1}, \ldots, s_n) = \tilde{\mathbf{B}}(s_{m+1}, \ldots, s_n \,|\, \cdot) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m). \quad (8)$$

Стадия $S(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m)$ задается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m) = \\ = \mathbf{A}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m); \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m) = \\ = \mathbf{B}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m); \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(s_l, s_{m+1}, \ldots, s_n) = \\ = \tilde{\mathbf{B}}(s_l, s_{m+1}, \ldots, s_n \,|\, \cdot) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m). \quad (11)$$

Введем функции перехода $\varphi^-(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m)$ от $S(s_1, ..., s_m)$ к стадии $S(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m)$. Пусть $\mathbf{z}((s_1, ..., s_m)(s_l)) = (x_{s_1}, ..., x_{s_m}, y_{s_l})^*$. Тогда

$$\varphi^-(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m):\ \mathbf{z}((s_1, \ldots, s_m)(s_l)) \to \\ \to (\tilde{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m),\ d_{s_l} - \varepsilon_{s_l})^*; \quad (12)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_m) = \mathbf{C}(s_1, \ldots, 0_l, \ldots, s_m \,|\, s_1, \ldots, s_m) \times \\ \times \mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m), \quad (13)$$

где ε_{s_l} — заданные положительные постоянные. При этом

$$\mathbf{x}(s_1, \ldots, \hat{s}_l, \ldots, s_m)(t^- + 0) = \\ = \tilde{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_m)(t^-). \quad (14)$$

Увеличение размерности системы. Вернемся снова к области (1), (2) и к соответствующей ей системе (3)–(5). Пусть при попадании траектории этой системы в момент времени t^+ из области (1), (2) на плоскость $y_{s_p} = d_{s_p}$ при некотором $p \in \{m + 1, ..., n\}$ происходит переход от стадии $S(s_1, ..., s_m)$ к стадии $S(s_1, ..., s_m, s_p)$, которая будет описываться системой уравнений

$$\dot{x}_{s_k} = a_{s_k, s_1} x_{s_1} + \ldots + a_{s_k, s_m} x_{s_m} + a_{s_k, s_p} x_{s_p}; \quad (15)$$

$$\dot{y}_{s_k} = b_{s_k, s_1} x_{s_1} + \ldots + b_{s_k, s_m} x_{s_m} + b_{s_k, s_p} x_{s_p}; \quad (16)$$

$$\dot{y}_{s_j} = \tilde{b}_{s_j, s_1} x_{s_1} + \ldots + \tilde{b}_{s_j, s_m} x_{s_m} + \tilde{b}_{s_j, s_p} x_{s_p}, \quad (17)$$

где $k = 1, ..., m, p$; $j = m + 1, ..., n$, $j \neq p$, или

$$\dot{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_m, s_p) = \\ = \mathbf{A}(s_1, \ldots, s_m, s_p) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m, s_p); \quad (18)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(s_1, \ldots, s_m, s_p) = \\ = \mathbf{B}(s_1, \ldots, s_m, s_p) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m, s_p); \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(s_{m+1}, \ldots, \hat{s}_p, \ldots, s_n) = \\ = \tilde{\mathbf{B}}(s_{m+1}, \ldots, \hat{s}_p, \ldots, s_n \,|\, \cdot) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m, s_p). \quad (20)$$

Введем функции перехода $\varphi^+(s_1, ..., s_m, s_p)$ от $S(s_1, ..., s_m)$ к стадии $S(s_1, ..., s_m, s_p)$. Пусть $\mathbf{z}((s_1, ..., s_m)(s_l)) = (x_{s_1}, ..., x_{s_m}, y_{s_l})^*$. Тогда $\varphi^+(s_1, ..., s_m, s_p)$:

$$\mathbf{z}((s_1, \ldots, s_m)(s_l)) \to \\ \to (\overline{x}_{s_1}, \ldots, \overline{x}_{s_m}, \overline{x}_{s_p}, d_{s_p} + \varepsilon_{s_p})^* \equiv \\ \equiv (\overline{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_m, s_p), d_{s_p} + \varepsilon_{s_p})^*, \quad (21)$$

где

$$\overline{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_m, s_p) = \\ = \mathbf{D}(s_1, \ldots, s_m, s_p \,|\, s_1, \ldots, s_m) \cdot \mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m). \quad (22)$$

При этом

$$\mathbf{x}(s_1, \ldots, s_m, s_p)(t^+ + 0) = \overline{\mathbf{x}}(s_1, \ldots, s_m, s_p)(t^+). \quad (23)$$

Определение. Система (1)–(23) называется линейной системой с переменной размерностью (ЛСПР).

Частный случай ЛСПР был рассмотрен в работе [2], где стадия, соответствующая m подсистемам, имеет вид $S(1, ..., m)$. Такая система называется последовательной.

Замечание. Рассмотренную ЛСПР можно задать также следующим образом. Пусть

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)^* \in R^n,\ \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^*,$$
$$\mathbf{a}(\mathbf{b}) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)^*,\ \dot{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = (\dot{a}_1 b_1, \ldots, \dot{a}_n b_n)^*.$$

Далее, если $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1^*, ..., \mathbf{A}_n^*)^*$ — матрица, где $\mathbf{A}_i^*$ — строка с номером i, то пусть

$$\mathbf{A}(\mathbf{b}) = (b_1 \mathbf{A}_1^*, \ldots, b_n \mathbf{A}_n^*)^*.$$

Если γ_i — компоненты вектора структуры, то обозначим $\overline{\gamma}_i = 1 - \gamma_i$, $\overline{\boldsymbol{\gamma}} = (\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_n)^*$. Тогда динамика ЛСПР задается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(\gamma) = \mathbf{A}(\gamma)\mathbf{x}(\gamma);$$
$$\dot{\mathbf{y}}(\gamma) = \mathbf{B}(\gamma)\mathbf{x}(\gamma);\ \ \dot{\mathbf{y}}(\overline{\gamma}) = \tilde{\mathbf{B}}(\overline{\gamma})\mathbf{x}(\gamma). \quad (24)$$

Определение. Векторы $\mathbf{y}(\gamma) \in R^n$, $\mathbf{y}(\overline{\gamma}) \in R^n$ назовем векторами активного и пассивного времени эволюции соответственно.

Введем управляемую ЛСПР

$$\dot{\mathbf{x}}(\gamma)=\mathbf{A}(\gamma)\mathbf{x}(\gamma)+\mathbf{C}(\gamma)\mathbf{u};\quad \dot{\mathbf{y}}(\gamma)=\mathbf{B}(\gamma)\mathbf{x}(\gamma)+\hat{\mathbf{C}}(\gamma)\mathbf{v};$$
$$\dot{\mathbf{y}}(\overline{\gamma})=\tilde{\mathbf{B}}(\overline{\gamma})\mathbf{x}(\gamma)+\tilde{\mathbf{C}}(\gamma)\mathbf{w},$$

где $\mathbf{u}\in R^r$, $\mathbf{v}\in R^s$, $\mathbf{w}\in R^p$ — управляющие воздействия; $\mathbf{C}, \hat{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{C}}$ — матрицы соответствующих размерностей. В статье [2] решается задача управления структурой последовательной ЛСПР.

Модель производственного комплекса

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из изменяющегося количества подсистем. Это изменение происходит согласно правилам, устанавливаемым некоторым центром управления (ЦУ). Примером такой системы могут быть государственная экономика, состоящая из отраслей производства, или крупная производственная корпорация, фирма, объединение, в состав которых входят предприятия, выпускающие некоторую продукцию. Для конкретизации предлагаемого подхода к построению соответствующей модели рассмотрим производственное объединение (ПО). ЦУ должен распределить инвестиции по предприятиям для их развития. Цель развития состоит в достижении предприятиями некоторых заданных уровней в течение заданного промежутка времени $[t_0, t_0+T]$. При этом ЦУ может закрыть какое-либо предприятие или возобновить его работу в зависимости от эффективности его деятельности, а также может открыть новое предприятие при некоторых условиях.

Пусть количественная характеристика состояния i-го предприятия в момент времени t определяется функцией $x_i(t)\geq 0$, $x_i(t)\in R$. Скорость прироста инвестиций в предприятие i в момент t обозначим через $u_i(t, x_i(t))$, $u_i\in R$, $u_i(t, x_i(t))\geq 0$. Далее, пусть $a_i(t)$ — скорость прироста уровня развития предприятия i на единицу капитала, вложенного в него, причем $a_i(t)\geq 0$, $a_i(t)$ — ограниченные, кусочно-непрерывные функции, $a_i(t)\in R$. Тогда дифференциальное уравнение, задающее динамику развития i-го предприятия, имеет вид

$$\dot{x}_i=a_i(t)u_i(t,x_i).$$

Заметим, что количество предприятий, функционирующих в составе ПО, не задано. В работе [10] рассматривалась модель с постоянным количеством предприятий. Будем считать, что инвестиции, направляемые ЦУ на развитие i-го предприятия, состоят из собственных средств и кредитов банка, которые получает ПО, а ЦУ распределяет по предприятиям. Таким образом:

$$u_i(t,x_i)=\mu_i(t)x_i(t)+w_i(t,x_i),$$

где $\mu_i=\mu_i(t)$ — коэффициент, характеризующий скорость прироста собственных средств предприятия на единицу объема его продукции; $w_i=w_i(t, x_i)$ — скорость прироста инвестиций за счет кредита банка. При этом $\mu_i(t)\geq 0$, $w_i(t, x_i)\geq 0$, $\mu_i(t)$, $w_i(t, x_i)$ — кусочно-непрерывны. Отсюда получаем уравнение динамики предприятия i

$$\dot{x}_i=\mu_i(t)x_i+w_i(t,x_i). \quad (25)$$

Пусть t_0 — момент начала функционирования предприятия i. Введем переменную y_i:

$$y_i(t)=y_i^0+\int_{t_0}^{t}(c_i(t,\ x_i(t))-w_i(t,\ x_i(t))\mathrm{d}t, \quad (26)$$

где $c_i(t, x_i(t))$, y_i^0 — заданные пороговые функции и постоянные соответственно. Продифференцировав равенство (26), получим

$$\dot{y}_i(t)=c_i(t,x_i)-w_i(t,x_i). \quad (27)$$

Таким образом, предприятие i является подсистемой S_i в модели ЛСПР. Пусть наибольшее число предприятий, которые могут входить в состав ПО, равно n, $i\in\{1, ..., n\}$. Будем называть предприятие i, динамика которого задается системой уравнений (25), (27), активным. Вектор $\mathbf{y}$ с компонентами y_i представляет собой эволюционное время ПО. Выясним экономический смысл величины $\mathbf{y}$. Введем постоянные пороги d_i, $d_i < y_i^0$. Пусть найдется наименьший момент времени $t_i > t_0$ такой, что $y_i(t_i) = d_i$. Тогда в момент времени t_i происходит закрытие i-го предприятия. Экономический смысл этого процесса состоит в том, что эффективно работающее предприятие должно в большей степени развиваться не за счет кредитов, а за счет собственных средств. Поэтому превышение функцией $w_i(t, x_i)$ порогового значения $c_i(t, x_i)$ означает, что i-е предприятие использует слишком много кредитов, которые придется погашать с помощью собственных средств. Это является признаком неэффективной деятельности, что приводит к принятию органом управления решения о приостановке предприятия. Возникает вопрос: когда закрывать предприятие? Если его закрыть в момент выполнения условия $w_i(t, x_i) = c_i(t, x_i)$, то процесс закрытия станет слишком чувствительным и будет реагировать на мгновенные сбои в работе предприятия, приводящие к малозначительным снижениям его эффективности. Для органа управления желательно некоторое время наблюдать за деятельностью предприятия, прежде чем принимать решение. Поэтому наличие интеграла в условии закрытия $y_i(t_i) = d_i$ придает некоторую инерционность в принятии решения о закрытии предприятия, что дает последнему возможность отработать временные сбои. Напротив, если низкая эффективность его работы, что проявляется в выполнении условия $w_i(t, x_i) > c_i(t, x_i)$, наблюдается в течение достаточно длительного промежутка времени, то орган управления закрывает i-е предприятие в момент t_i, введенный выше. После закрытия i-е предприятие переходит в пассивный режим, которому соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -p_i w_i(t,\ x_i), \text{если } x_i > 0; \\ \dot{x}_i = 0, \text{если } x_i = 0; \\ \dot{y}_i = c_i(t, x_i^-), \end{cases} \quad (28)$$

где постоянные p_i, x_i^- удовлетворяют условиям: $p_i > 0$, $x_i^- = x_i(t_i + 0) < x_i(t_i)$. Первое уравнение (28) задает динамику возврата кредитов, третье — динамику накопления ресурсов. Будем называть предприятие i, динамика которого задается уравнениями (28), законсервированным или пассивным.

Теперь рассмотрим процедуру возобновления работы предприятия i. Пусть на интервале $(t_i, \bar{t}_i)$ $y_i(t_i) < d_i$ и $y_i(\bar{t}_i) = d_i$. Тогда в момент времени $\bar{t}_i$ ЦУ переводит предприятие i из пассивного в активный режим, и его динамика задается уравнениями (25), (26). При этом $x_i(\bar{t}_i) = x_i(\bar{t}_i + 0) = \bar{x}_i$, $y_i(\bar{t}_i + 0) = d_i + \delta_i$, где $\bar{x}_i$, δ_i — заданные положительные постоянные. Наличие постоянной δ_i приводит к скачкообразному изменению $y_i(t)$ при достижении ею порогового значения d_i. Предприятие получает начальный кредит на развитие, иначе может оказаться, что сразу после открытия его придется закрывать. Таким образом, если на некотором промежутке $[t_0, t_0 + T]$ в состав ПО входят активные $i_1, \ldots, i_m$ и пассивные $j_1, \ldots, j_k$ предприятия, то его динамика задается системой уравнений

$$\dot{x}_{i_s} = \mu_{i_s}(t) x_{i_s} + w_{i_s}(t,\ x_{i_s});$$

$$\dot{y}_{i_s}(t) = c_{i_s}(t,\ x_{i_s}) - w_{i_s}(t,\ x_{i_s}),$$

$$s = 1, \ldots, m;$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{j_r} = -p_{j_r} w_{j_r}(t,\ x_{j_r}), \text{если } x_{j_r} > 0; \\ \dot{x}_{j_r} = 0, \text{если } x_{j_r} = 0; \\ \dot{y}_{j_r} = c_{j_r}(t, x_{j_r}^-), r = 1, \ldots, k. \end{cases}$$

Можно рассмотреть процедуру открытия нового предприятия, а не ранее замороженного. Будем, например, считать, что ПО расширяется, открывая новое предприятие, в момент достижения всеми предприятиями, входящими в него, некоторых заданных уровней развития e_i. Пусть на промежутке $[t_0,\ \tilde{t})$ ПО состояло из n предприятий (активных и пассивных), где $\tilde{t}$ — наименьший момент времени, для которого выполняются условия $y_i(\tilde{t}) \geq e_i$, $i = 1, \ldots, n$, причем при $t < \tilde{t}$ хотя бы одно из этих неравенств не выполняется. Тогда в момент времени $\tilde{t}$ орган управления ПО открывает новое $(n + 1)$-е предприятие, динамика которого задается уравнениями типа (25), (26), и при этом $x_{n+1}(\tilde{t}) = \tilde{x}_{n+1}$, $y_{n+1}(\tilde{t}) = \tilde{y}_{n+1}$, $\tilde{x}_{n+1}$, $\tilde{y}_{n+1}$ — заданные постоянные, удовлетворяющие условиям $d_{n+1} < \tilde{y}_{n+1} < e_{n+1}$. При этом $y_i(\tilde{t} + 0) = e_i + \tilde{\delta}_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $\tilde{\delta}_i$ — заданные положительные постоянные.

Таким образом, на основе понятия ЛСПР построена модель динамики ПО с изменяющимся в процессе функционирования количеством предприятий.

Литература

1. **Кириллов А. Н.** Экологические системы с переменной размерностью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 1999. Т. 6. Вып. 2. С. 318–336.
2. **Кириллов А. Н.** Управление многостадийными технологическими процессами // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2006. Вып. 4. С. 127–131.
3. **Кириллов А. Н.** Динамическая декомпозиция и устойчивость структур // Математический анализ и его приложения / Четинск. пед. ин-т им. Н. Г. Чернышевского. Чита, 1996. Вып. 2. С. 20–24.
4. **Свирежев Ю. М.** Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987. 368 с.
5. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
6. **Болтянский В. Г.** Задачи оптимизации со сменой фазового пространства // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. № 3. С. 518–521.
7. **Шильяк Д.** Децентрализованное управление сложными системами. М.: Мир, 1994. 576 с.
8. **Груйич Л. Т., Мартынюк А. А., Риббенс-Павелла М.** Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. Киев: Наук. думка, 1984. 473 с.
9. **Охтилев М. Ю., Соколов Б. В., Юсупов Р. М.** Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных динамических объектов. М.: Наука, 2006. 410 с.
10. **Кириллов А. Н.** Одна математическая модель распределения капитальных вложений // Экономика и математические методы. 1982. № 5. С. 922–925.