УДК 303.732:[338+658.01](075.8)

МЕТОД МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО ПРЕДПОЧТЕНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Ю. В. Ведерников,
канд. техн. наук, доцент
Михайловская военная артиллерийская академия

Рассматривается задача определения отношений предпочтения на множестве сложных технических систем для случая, когда критерии оптимальности разнородны и могут быть заданы в частично формализованном, интервальном виде. Задача сводится к построению упорядоченного множества эффективных вариантов (кортежа предпочтений Парето) сложных систем. Предлагается метод решения, основанный на комплексном применении аксиоматических методов теории принятия решений, нечетких множеств и интервального анализа. Приведен численный пример.

Ключевые слова *— техническая система, отношение предпочтения, интервальный анализ, векторная оптимизация.*

Введение

В настоящий момент осложненные условия эксплуатации современных технических систем (СТС) различного назначения приводят в процессе оценки качества их функционирования к необходимости учета различных видов неопределенности. При этом достаточно часто большинство показателей рассматриваемых СТС оказываются заданными в виде диапазона их изменения. Для нахождения решений в задачах подобного класса используют интервальные [1–7] и нечеткие [2, 8–10] методы.

Приоритет в исследованиях, посвященных интервальному анализу, принадлежит академику Л. В. Канторовичу [11], идеи которого применительно к задачам оптимизации развил А. А. Ватолин. Он сформулировал для них определение множества решений. Математическим и вычислительным аспектам анализа статических систем в условиях интервальной неопределенности посвящена работа С. П. Шарыя [5]. Разработка методов оптимизации СТС для случая, когда критерии оптимальности заданы в интервальном виде, оказалась возможной благодаря результатам, полученным в теории интервального анализа такими учеными как Е. Каухер, Ю. Херцберг, Ю. И. Шокин и многими другими [1, 4, 6, 12, 17]. Вместе с тем эта проблема полностью еще не решена. Известные методы [4, 6] предполагают, что для двух интервалов A и B, определенных в соответствующих границах $A = [\underline{a}; a]$ и $B = [\underline{b}; b]$, считается, что $A > B$ (или $A < B$), если $\underline{a} > \underline{b}$, $a > b$ (или $\underline{a} < \underline{b}$, $a < b$). При условии $\underline{a} < \underline{b}$, $a > b$ (или $\underline{a} > \underline{b}$, $a < b$) два интервала A и B будут считаться несравнимыми. В частности, это относится и к важному для практики случаю, когда СТС характеризуется векторным разнородным критерием оптимальности. Кроме того, для нестандартных операций вычитания «–» и деления «:», определенных для элементов A, B, существует правило [4], что из равенства $A - C = B - C$ не следует, что $A = B$, например: $[\underline{9}; 13] - [\underline{1}; 4] = [\underline{10}; 12] - [\underline{1}; 4]$, или из равенства $A : C = B : C$ не следует, что $A = B$, например: $[\underline{2}; 6]:[\underline{1}; 2] = [\underline{3}; 4]:[\underline{1}; 2]$. Однако именно вышеперечисленные случаи достаточно часто встречаются при решении практических задач.

В статье предлагается метод, позволяющий определять предпочтения между вариантами систем, характеризующихся множеством интервальных характеристик. Он основан на сочетании отличительных свойств аксиоматических методов теории принятия решений, нечетких множеств и интервального анализа.

Постановка задачи

В основу предлагаемого метода положена идея сравнения неоднородных интервальных критериальных значений на основе построения интервального отношения предпочтения (ИОП). Рассмотрим его сущность и для этого введем необходимые в дальнейшем обозначения [13–15]:

$S=\{S_\alpha, \alpha=\overline{1,n}\}$ — множество возможных альтернативных вариантов структурного построения СТС;

$K_i(S_\alpha)=[\underline{K_i(S_\alpha)};\ \overline{K_i(S_\alpha)}]$ — частные критерии оптимальности, заданные в интервальном виде, характеризующие каждый отдельный вариант системы S_α, где $\underline{K_i(S_\alpha)}$ — нижняя граница интервала критериальной оценки, а $\overline{K_i(S_\alpha)}$ — верхняя граница интервала, $i=\overline{1,r}$; $\alpha=\overline{1,n}$;

$K(S_\alpha)=\{K_1(S_\alpha), K_2(S_\alpha), ..., K_r(S_\alpha)\}=\{[\underline{K_1(S_\alpha)};\ \overline{K_1(S_\alpha)}], [\underline{K_2(S_\alpha)};\ \overline{K_2(S_\alpha)}], ..., [\underline{K_r(S_\alpha)};\ \overline{K_r(S_\alpha)}]\}$ — векторный критерий, характеризующий каждый вариант системы;

$S^P \subset S$ — множество эффективных (парето-оптимальных) вариантов системы S_α с числом элементов n^P;

$P=(S^0_{k_1}, S^0_{k_2}, ..., S^0_{k_{n^P}})$ – упорядоченное множество эффективных вариантов (кортеж Парето), для элементов $S^0_{k_j} \in S^P$ которого справедливо

$$S^0_{k_1} \succ S^0_{k_2} \succ ... \succ S^0_{k_{n^P}}, \tag{1}$$

где «$\succ$» — знак отношения доминирования, $k_j \in \{\overline{1, n^P}\}$. Длина кортежа равна n^P.

С учетом введенных обозначений сформулируем задачу.

Требуется найти упорядоченное множество эффективных вариантов структурного построения сложной системы (кортеж Парето) (1), для элементов $S^0_{k_j}$ которого в зависимости от смысла задачи выполняются условия

$$K_i(S^0_{k_j})=\min_{i=\overline{1,r};\ \alpha=\overline{1,n}}[K_i(S_\alpha)],\ S^0_{k_j} \in S^P, \tag{2}$$

или

$$K_i(S^0_{k_j})=\max_{i=\overline{1,r};\ \alpha=\overline{1,n}}[K_i(S_\alpha)],\ S^0_{k_j} \in S^P \tag{3}$$

для случая, когда скалярные критерии оптимальности $K_i(S_\alpha)=[\underline{K_i(S_\alpha)};\ \overline{K_i(S_\alpha)}]$ представлены в интервальном виде. Обычный (не интервальный) скалярный критерий $K_i(S_\alpha)$ целесообразно рассматривать как частный случай интервального критерия, который представлен в виде *вырожденного интервала* [2], т. е. интервала с совпадающими концами $K_i(S_\alpha)=\underline{K_i(S_\alpha)}=\overline{K_i(S_\alpha)}$.

Метод построения интервальных отношений предпочтения на множестве сложных систем, характеризующихся скалярными разнородными критериями оптимальности

При построении реальных СТС различного назначения встречаются ситуации (являющиеся, скорее, правилом, чем исключением), когда у лица, принимающего решение, нет четкого представления о предпочтениях между всеми или некоторыми из альтернативных вариантов [10]. Кроме того, только при наличии условия, *обеспечивающего сравнимость частных критериев*, возможно в дальнейшем построение принципа оптимальности и вытекающих из него алгоритмов решения многокритериальных задач. Несравнимость частных критериев является основной особенностью и главным препятствием к решению задач многокритериальной оптимизации [8]. Представленные обстоятельства существенно усиливаются в условиях, когда частные критерии не только неаддитивные, но еще и представлены в интервальном виде, с различными диапазонами отклонения качества от лучшего до худшего значения.

Исходя из перечисленного выше предлагается на основе анализа множества упорядоченных пар S_k и S_l $(S_k \in S$ и $S_l \in S$, где $k=\overline{1,n}; l=\overline{1,n}; k \neq l)$ вариантов сложной системы $S=\{S_\alpha, \alpha=\overline{1,n}\}$ по аналогии с нечетким отношением предпочтения [10, п. 1.2.1] ввести ***интервальное отношение предпочтения*** $R^uK_i(S_k, S_l)$ по i-му частному интервальному критерию оптимальности $K_i(S_\alpha)=[\underline{K_i(S_\alpha)};\ \overline{K_i(S_\alpha)}]$, $i=\overline{1,r}; \alpha=\overline{1,n}$ и для пары систем (S_k, S_l) определить интервальной функцией принадлежности $\mu^uK_i(S_k, S_l)$. Результаты анализа предлагается заносить в специальную оценочную матрицу $\|\mu^uK_i(S_k, S_l)\|$. При сравнении систем S_k и S_l k-системы располагать в строках, а l-системы — в столбцах.

Элементы $\mu^uK_i(S_k, S_l)$ оценочной матрицы, исходя из подходов, изложенных в работах [4, 8, 10, 14], определяются по выражению

$$\mu^uK_i(S_k, S_l)=\frac{K_i(S_k)-K_i(S_l)}{m_i}=\frac{[\underline{K_i(S_k)};\ \overline{K_i(S_k)}]-[\underline{K_i(S_l)};\ \overline{K_i(S_l)}]}{m_i}=$$
$$=\frac{[\min\{\underline{K_i(S_k)}-\underline{K_i(S_l)};\ \overline{K_i(S_k)}-\overline{K_i(S_l)}\};\ \max\{\underline{K_i(S_k)}-\underline{K_i(S_l)};\ \overline{K_i(S_k)}-\overline{K_i(S_l)}\}]}{m_i}, \tag{4}$$

где $K_i(S_k)$ и $K_i(S_l)$ — значения i-го скалярного критерия для систем S_k и S_l; m_i — ширина интервала оценок по i-му частному критерию оптимальности [2]. Средством числового представления критериев выступают интервальные значения, которые показывают допустимое отклонение качества варианта системы от худшего до лучшего (т. е. от минимального до максимального) в определенном диапазоне.

Важным моментом в данном случае является назначение величины m_i. При необходимости можно использовать в качестве m_i: предельно допустимые значения критериев оптимальности эталонной системы; предельно допустимые значения критериев оптимальности, которые хотелось бы достигнуть в ходе решения задачи оптимизации; в задачах контроля — предельно допустимые значения контролируемых параметров и т. д.

В результате функция принадлежности $\mu^u K_i(S_k, S_l)$ для пары систем (S_k, S_l), характеризующая степень согласия с тем, что система S_k доминирует над системой S_l по i-му частному интервальному критерию, будет также представлена в интервальном виде:

$$\mu^u K_i(S_k, S_l) = [\underline{\mu^u K_i(S_k, S_l)}; \overline{\mu^u K_i(S_k, S_l)}].$$

Отличительной особенностью рассматриваемого подхода от методов теории нечетких множеств [8–10] является определение интервальной функции принадлежности в интервале [–1; 1].

Определение. *Интервальным отношением предпочтения* R^u на множестве S_α называется множество декартова произведения ($S_k \times S_l$, где $k = \overline{1,n}; l = \overline{1,n}; k \neq l$), характеризующееся интервальной функцией принадлежности $\mu^u K_i(S_k, S_l) : S_k \times S_l \to [-1; 1]$. Значение этой функции $\mu^u K_i(S_k, S_l) = [\underline{\mu^u K_i(S_k, S_l)}; \mu^u K_i(S_k, S_l)]$ понимается как объективная мера степени выполнения отношения $S_k R^u S_l$ по скалярному критерию оптимальности $K_i(S_\alpha) = [\underline{K_i(S_\alpha)}; \overline{K_i(S_\alpha)}]$, $(i = \overline{1,r}; \alpha = \overline{1,n})$, заданному в интервальном виде, характеризующему каждый отдельный вариант системы S_α, где:

$\underline{\mu^u K_i(S_k, S_l)} \in [-1; 0]$ — значение, характеризующее максимальную степень потерь при признании системы S_k, доминирующей систему S_l по скалярному интервальному критерию оптимальности K_i;

$\overline{\mu^u K_i(S_k, S_l)} \in [0; 1]$ — значение, характеризующее максимальную степень выигрыша при признании системы S_k, доминирующей систему S_l по рассматриваемому K_i;

$\overline{\mu^u K_i(S_k, S_l)} \in [-1; 0]$ — означает абсолютное отсутствие доминирования системы S_k над системой S_l по скалярному интервальному критерию K_i;

$\underline{\mu^u K_i(S_k, S_l)} \in [0; 1]$ — означает абсолютное доминирование системы S_k над системой S_l по скалярному интервальному критерию K_i;

$[\underline{\mu^u K_i(S_k, S_l)}; \overline{\mu^u K_i(S_k, S_l)}] \in [-1; 1]$ — интервальное значение (комплексная характеристика), характеризующее степень выигрыша и степень потерь при признании системы S_k, доминирующей систему S_l по рассматриваемому K_i.

Введем отношение *строгого интервального предпочтения* системы S_k над системой S_l и определим его функцией принадлежности $\mu^u_D K_i(S_k, S_l)$, характеризующей интенсивность доминирования системы S_k над системой S_l по i-му частному интервальному критерию оптимальности, в виде

$$\begin{aligned}
\mu^u_D K_i(S_k, S_l) &= \mu^u K_i(S_k, S_l) - \mu^u K_i(S_l, S_k) = \\
&= [\underline{\mu^u K_i(S_k, S_l)};\ \overline{\mu^u K_i(S_k, S_l)}] - \\
&- [\underline{\mu^u K_i(S_l, S_k)};\ \overline{\mu^u K_i(S_l, S_k)}] = \\
&= [\min\{\underline{\underline{\mu^u K_i(S_k, S_l)} - \underline{\mu^u K_i(S_l, S_k)}}; \\
&\underline{\overline{\mu^u K_i(S_k, S_l)} - \overline{\mu^u K_i(S_l, S_k)}}\}; \\
&\max\{\underline{\mu^u K_i(S_k, S_l)} - \underline{\mu^u K_i(S_l, S_k)}; \\
&\overline{\overline{\mu^u K_i(S_k, S_l)} - \overline{\mu^u K_i(S_l, S_k)}}\}].
\end{aligned} \quad (5)$$

Результаты сравнения $\mu^u K_i(S_k, S_l)$ и $\mu^u K_i(S_l, S_k)$, ($\forall S_k$ и S_l) будем заносить в специальную оценочную матрицу $\|\mu^u_D K_i(S_k, S_l)\|$.

Введем отношение интервального недоминирования системы S_k над системой S_l и определим его функцией принадлежности $\mu_{ND} K_i(S_k, S_l)$ как дополнение к $\mu^u_D K_i(S_k, S_l)$ в виде

$$\mu_{ND} K_i(S_k, S_l) = \\
= \begin{cases} 1, \text{если}\, \mu^u_D K_i(S_k, S_l) < 0 \\ 1 - \mu^u_D K_i(S_k, S_l), \text{если}\, \mu^u_D K_i(S_k, S_l) \geq 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Результаты выполнения условия (6) будем заносить в оценочную матрицу $\|\mu_{ND} K_i(S_k, S_l)\|$.

Степень «недоминируемости» системы S_k ни одной другой системой по i-му скалярному интервальному критерию оптимальности характеризуется [10] функцией принадлежности множеству недоминируемых систем $\mu^*_D K_i(S_k)$ в виде

$$\mu^*_D K_i(S_k) = \min \mu_{ND} K_i(S_k, S_l). \quad (7)$$

Значение функции принадлежности $\mu^*_D K_i(S_k)$ показывает степень близости варианта системы S_k к эффективному (парето-оптимальному) варианту по рассматриваемому скалярному интервальному i-му критерию оптимальности.

Если в процессе решения, в зависимости от смысла задачи, необходимо выполнить условие (2), то выбор значения $\mu^*_D K_i(S_k)$ необходимо осу-

■ ***Таблица 1****. Таблица исходных данных*

Критерии $K_i(S_\alpha)$	Системы (S_α)			
	S_1	S_2	S_3	m_i
1. $K_1(S_\alpha)$ — ориентировочная стоимость образца (тыс. у. е.)	[40; 90]	[50; 70]	[60; 65]	100
2. $K_2(S_\alpha)$ — ожидаемый эффект от эксплуатации образца (баллы)	[5; 6]	[3; 9]	[4; 7]	10
3. $K_3(S_\alpha)$ — ожидаемая скорость выполнения операций (опер./с)	[80; 100]	[100; 120]	[110; 115]	150

ществлять из k-й строки оценочной матрицы $\|\mu_{ND}K_i(S_k, S_l)\|$. Если в процессе решения необходимо выполнить условие (3), то выбор значения $\mu^*_D K_i(S_k)$ необходимо осуществлять из l-го столбца оценочной матрицы $\|\mu_{ND}K_i(S_k, S_l)\|$.

Величину $\mu^*_D K_i(S_k)$ будем рассматривать как *меру предпочтения*, обеспечивающую объективный и адекватный реальности способ сравнения сложных систем, характеризующихся разнородными интервальными критериальными значениями, и устанавливающую значение приоритета системы при выборе.

Рассмотрим иллюстративный пример.

Пример. Необходимо отдать предпочтение одной из трех систем $\{S_1, S_2, S_3\}$, характеризующихся тремя критериями $K_1(S_\alpha)$, $K_2(S_\alpha)$ и $K_3(S_\alpha)$, значения которых заданы в интервальном виде, остальные системы расположить в порядке убывания предпочтения.

Варианты систем, значения критериев оптимальности и ширина интервала оценок по i-му частному критерию представлены в табл. 1. При этом должны выполняться условия

$$K_1(S^*_\alpha) = \min_{\alpha=1,3}[K_1(S_\alpha)]; \tag{8}$$

$$K_2(S^*_\alpha) = \max_{\alpha=1,3}[K_2(S_\alpha)]; \tag{9}$$

$$K_3(S^*_\alpha) = \max_{\alpha=1,3}[K_3(S_\alpha)]. \tag{10}$$

Как видно из табл. 1, критерии $K_1(S_\alpha)$, $K_2(S_\alpha)$ и $K_3(S_\alpha)$ являются разнородными, измеряемыми в различных шкалах, с различными диапазонами отклонения качества. Кроме того, условия (8) и (9), (10) являются диаметрально противоположными.

Решение задачи:

1. С использованием выражения (4) определяем $\mu^u K_1(S_1, S_2)$:

$$\mu^u K_1(S_1, S_2) = \frac{[40; 90] - [50; 70]}{100} =$$

$$= \frac{[\min\{\underline{40-50; 90-70}\}; \max\{\overline{40-50; 90-70}\}]}{100} =$$

$$= \frac{[-10; 20]}{100} = [-0{,}1; 0{,}2].$$

Аналогично представленным вычислениям рассчитываем $\mu^u K_1(S_k, S_l)$, $\mu^u K_2(S_k, S_l)$ и $\mu^u K_3 \times (S_k, S_l)$ $(\forall S_k$ и $S_l)$. Полученные данные сводим в табл. 2.

2. С использованием выражения (5) определяем $\mu^u_D K_1(S_1, S_2)$:

$$\mu^u_D K_1(S_1, S_2) = [-0{,}1; 0{,}2] - [-0{,}2; 0{,}1] =$$

$$= [\min\{\underline{-0{,}1-(-0{,}2); 0{,}2-0{,}1}\};$$

$$\max\{\overline{-0{,}1-(-0{,}2); 0{,}2-0{,}1}\}] = 0{,}1.$$

Аналогично представленным вычислениям рассчитываем $\mu^u_D K_1(S_k, S_l)$, $\mu^u_D K_2(S_k, S_l)$ и $\mu^u_D K_3(S_k, S_l)$ $(\forall S_k$ и $S_l)$. Полученные данные сводим в табл. 3.

3. С использованием выражения (6) находим значения $\mu_{ND}K_1(S_k, S_l)$, $\mu_{ND}K_2(S_k, S_l)$ и $\mu_{ND}K_3(S_k, S_l)$. Полученные данные представим в табл. 4 и 5.

4. Значения $\mu^*_D K_i(S_k)$ для всех критериев сведем в табл. 6.

Согласно работе [16], значения $\mu^*_D K_i(S_k)$ определяются в диапазоне $\to$ [0; 1], где $\mu^*_D K_i(S_k) = 1$ оз-

■ ***Таблица 2****. Оценочная матрица* $\|\mu^u K_i(S_k, S_l)\|$

Системы (S_k)	Системы (S_l)		
	S_1	S_2	S_3
$\|\mu^u K_1(S_k, S_l)\|$			
S_1	–	[–0,1; 0,2]	[–0,2; 0,25]
S_2	[–0,2; 0,1]	–	[–0,1; 0,05]
S_3	[–0,25; 0,2]	[–0,05; 0,1]	–
$\|\mu^u K_2(S_k, S_l)\|$			
S_1	–	[–0,3; 0,2]	[–0,1; 0,1]
S_2	[–0,2; 0,3]	–	[–0,1; 0,2]
S_3	[–0,1; 0,1]	[–0,2; 0,1]	–
$\|\mu^u K_3(S_k, S_l)\|$			
S_1	–	[–0,13]	[–0,2; –0,1]
S_2	[0,13]	–	[–0,06; 0,03]
S_3	[0,1; 0,2]	[–0,03; 0,06]	–

■ ***Таблица 3***. *Оценочная матрица* $\mu^u_D K_i(S_k, S_l)$

Системы (S_k)	Системы (S_l)		
	S_1	S_2	S_3
$\mu^u_D K_1(S_k, S_l)$			
S_1	–	0,1	0,05
S_2	–0,1	–	–0,05
S_3	–0,05	0,05	–
$\mu^u_D K_2(S_k, S_l)$			
S_1	–	0,1	0
S_2	–0,1	–	0,1
S_3	0	–0,1	–
$\mu^u_D K_3(S_k, S_l)$			
S_1	–	–0,26	–0,3
S_2	0,26	–	–0,03
S_3	0,3	0, 03	–

■ ***Таблица 4***. *Оценочная матрица* $\mu_{ND} K_1(S_k, S_l)$

Системы (S_k)	Системы (S_l)			
	S_1	S_2	S_3	$\mu^*_D K_1(S_k)$
S_1	–	0,9	0,95	0,9
S_2	1	–	1	1
S_3	1	0,95	–	0,95

■ ***Таблица 5***. *Значения* $\mu_{ND} K_i(S_k, S_l)$

Системы (S_k)	Системы (S_l)		
	S_1	S_2	S_3
$\mu_{ND} K_2(S_k, S_l)$			
S_1	–	0,9	1
S_2	1	–1	0,9
S_3	1	1	–
$\mu^*_D K_2(S_k)$	1	0,9	0,9
$\mu_{ND} K_3(S_k, S_l)$			
S_1	–	1	1
S_2	0,74	–	1
S_3	0,7	0,97	–
$\mu^*_D K_3(S_k)$	0,7	0,97	1

■ ***Таблица 6***. *Значения* $\mu^*_D K_i(S_k)$

Системы (S_k)	$\mu^*_D K_i(S_k)$		
	$\mu^*_D K_1(S_k)$	$\mu^*_D K_2(S_k)$	$\mu^*_D K_3(S_k)$
S_1	0,9	1	0,7
S_2	1	0,9	0,97
S_3	0,95	0,9	1

начает, что система S_k является лучшей по i-му скалярному критерию в рассматриваемом множестве систем, 0 — худшей, а значение из диапазона [0; 1] показывает величину приоритета системы при выборе. Чем она выше, тем предпочтительней является рассматриваемая система S_k по i-му скалярному критерию оптимальности.

В результате решения задачи все интервальные критериальные оценки приведены к общему виду, удобному для сравнения при решении задач многокритериальной оптимизации.

Предложенный метод позволил сформулировать задачу построения отношения предпочтения на множестве СТС, характеризующихся векторным неоднородным критерием оптимальности, в следующем виде.

Требуется найти множество эффективных упорядоченных систем (кортеж предпочтений Парето) P^μ

$$S^\mu_{k_1} \succ S^\mu_{k_2} \succ \ldots \succ S^\mu_{k_{n^P}}, \quad (11)$$

— для элементов $S^\mu_{k_j}$ которого справедливо

$$\mu^*_D K(S^\mu_{k_j}) = \max_{i=1,r;\, \alpha=1,n} \{\mu^*_D K_i(S_\alpha)\},\ S^\mu_{k_j} \in S^P. \quad (12)$$

Рассмотрим метод решения задачи (11) при условии (12).

Метод построения отношения предпочтения на множестве сложных систем, характеризующихся векторным неоднородным критерием оптимальности

При несомненных достоинствах методов решения задач многокритериальной (векторной) оптимизации [3, 15, 17] их общим недостатком, как, впрочем, и всех аксиоматических методов теории принятия решений, является то, что идет определение предпочтительности одного скалярного критерия над другим (т. е. определение того, что одна система лучше (хуже) другой по рассматриваемому критерию), далее каким бы то ни было *субъективным*, как правило, эвристическим или экспертным методом вводятся коэффициенты важности скалярных критериев оптимальности и уже с ними в дальнейшем производятся различные вычисления. Однако в реальных ситуациях достаточно часто оказывается, что относительную важность критериев (или признаков, по которым оцениваются альтернативы) невозможно достоверно описать соответствующими коэффициентами, кроме того, субъективизм назначения коэффициентов важности понижает достоверность принимаемого решения.

Предлагаемый метод построения отношения предпочтения на множестве СТС, характеризующихся векторным неоднородным критерием оптимальности (*метод многокритериального предпочтения*), в отличие от известных (семейства методов *ЭЛЕКТРА* Б. Руа, метода «жесткого» ранжирования [13], методов, изложенных в работах [3, 5], и т. д.) позволяет вместо коэффициентов важности критериев использовать функции принадлежности $\mu_D^* K_i(S_\alpha)$, определяемые по описанной выше процедуре и показывающие степень близости систем S_α к эффективной (парето-оптимальной) системе по $K_i(S_\alpha)$ — частному критерию оптимальности. Сущность рассматриваемого метода многокритериального предпочтения [16] при решении задачи (11) и выполнении условия (12) заключается в следующем.

1. На основе анализа $\mu_D^* K_i(S_k)$ и $\mu_D^* K_i(S_l)$, $i=\overline{1,r}$ проведем попарное сравнение систем S_k и S_l и определим элементы C_{kl}^μ оценочной матрицы $\|C_{kl}^\mu\|$, $k=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,n}$; $k \neq l$, в следующей последовательности.

Обозначим $I_{kl}^+, I_{kl}^-, I_{kl}^=$ соответственно подмножества лучших, худших и равных значений $\mu_D^* K_i(S_k)$ и $\mu_D^* K_i(S_l)$ для каждой пары систем S_k и S_l, $k=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,n}$; $k \neq l$. Осуществим попарное сравнение систем S_k и S_l на основе анализа $\mu_D^* K_i(S_k)$ и $\mu_D^* K_i(S_l)$, $i=\overline{1,r}$. Для возможных значений подмножеств $I_{kl}^+, I_{kl}^-, I_{kl}^=$ введем следующие значения элементов оценочной матрицы $\|C_{kl}^\mu\|$:

$$\text{если } I_{kl}^+ = \varnothing, I_{kl}^- = \varnothing, I_{kl}^= = \{\overline{1,r}\},$$
$$\text{то } C_{kl}^\mu = 1, C_{lk}^\mu = 1; \tag{13}$$
$$\text{если } I_{kl}^+ = \{\overline{1,r}\}, I_{kl}^- = \varnothing, I_{kl}^= = \varnothing,$$
$$\text{то } C_{kl}^\mu = N_2, C_{lk}^\mu = 0, N_2 >> 1; \tag{14}$$
$$\text{если } I_{kl}^+ = \varnothing, I_{kl}^- = \{\overline{1,r}\}, I_{kl}^= = \varnothing,$$
$$\text{то } C_{kl}^\mu = 0, C_{lk}^\mu = N_2; \tag{15}$$
$$\text{если } I_{kl}^+ \neq \varnothing, I_{kl}^- = \varnothing, I_{kl}^= \neq 0,$$
$$\text{то } C_{kl}^\mu = N_3, C_{lk}^\mu = 0;\ 1 << N_3 < N_2; \tag{16}$$
$$\text{если } I_{kl}^+ = \varnothing, I_{kl}^- \neq \varnothing, I_{kl}^= \neq 0,$$
$$\text{то } C_{kl}^\mu = 0, C_{lk}^\mu = N_3; \tag{17}$$
$$\text{если } I_{kl}^+ \neq \varnothing, I_{kl}^- \neq \varnothing, \left|I_{kl}^=\right| \geq 0, \tag{18}$$

то C_{kl}^μ, в отличие от [15], определим в виде

$$C_{kl}^\mu = \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_D^* K_i(S_k)\right)\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_D^* K_i(S_l)\right)^{-1},$$
$$C_{kl}^\mu = C_{lk}^{\mu\,-1}. \tag{19}$$

В случае, когда при формировании исходных данных для решения задачи заданы коэффициенты важности рассматриваемых скалярных критериев оптимальности, то C_{kl}^μ для условия (18) определим в виде

$$C_{kl}^\mu = \left(\sum_{i=1}^{r} \mu_D^* K_i(S_k) a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{r} \mu_D^* K_i(S_l) a_i\right)^{-1},$$
$$C_{kl}^\mu = C_{lk}^{\mu\,-1}, \tag{20}$$

где a_i — коэффициент важности i-го критерия, причем $\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$.

Согласно теореме 1 [16], если в l-м $(l \in \{\overline{1,n}\})$ столбце оценочной матрицы одно из чисел C_{kl}^μ равно значению N_2 или N_3, то l-й вариант системы не принадлежит множеству эффективных вариантов.

2. Для формулировки решающих правил, по аналогии с методом «жесткого» ранжирования [15], введем систему показателей: H_l^μ — количество элементов в l-м столбце оценочной матрицы $\|C_{kl}^\mu\|$, значения которых больше единицы; M_l^μ — количество элементов в l-м столбце той же матрицы, значения которых меньше единицы, но больше нуля; $C_{kl\,\max}^\mu$ — максимальное значение элемента в l-м столбце матрицы. *Физический смысл показателей*: H_l^μ показывает, сколько вариантов из рассматриваемого множества превышает l-й; M_l^μ — в скольких вариантах доминирует l-я система; $C_{kl\,\max}^\mu$ определяет максимальную степень доминирования k-й системы над l-й, $k=\overline{1,n}$; $l=\overline{1,n}$; $k \neq l$.

3. Для определения порядка предпочтений на множестве систем перейдем от одношагового процесса поиска приоритетного расположения альтернатив к многошаговому процессу [3, 15]. На каждом шаге t, $t = 1, 2, ..., n^P - 1$, где n^P — число эффективных вариантов, выбираем j-ю альтернативу, лучшую с точки зрения предлагаемых ниже решающих правил (RP). Затем ее номер включаем в кортеж Парето P и в последующем рассмотрении j-я альтернатива больше не участвует (в матрице $\|C_{kl}^\mu\|$ вычеркиваем j-ю строку и j-й столбец). Это позволяет исключить влияние варианта S_j на выбор лучшей альтернативы, проводимой на следующем шаге. Далее вновь используем, но теперь на каждом шаге $t + 1$, показатели $H_l^{\mu(t)}$, $M_l^{\mu(t)}$, $C_{kl\max}^{\mu(t)}$, которые имеют оговоренный выше физический смысл.

Решающие правила многокритериального предпочтения (*RP МП*).

1. Поиск приоритетного расположения СТС необходимо проводить только среди эффективных вариантов по шагам t, $t = 1, 2, ..., n^P - 1$.

2. Положить $t = 1$.

3. Найти показатели $H_l^{\mu(t)}$, $M_l^{\mu(t)}$, $C_{kl\max}^{\mu(t)}$ и определить лучшую альтернативу S_j с минимальным значением $H_l^{\mu(t)}$.

4. Номер j занести в множество P.

5. Исключить из оценочной матрицы j-ю строку и j-й столбец.

6. Если альтернативы с номерами $l_j \in L_{k(t)} = \{l_1, l_2, ..., l_j, ..., l_{k(t)}\}$ имеют одинаковые минимальные значения $H_{l_j}^{\mu(t)}$, то лучшей является альтернатива S_{l_j} с максимальным значением $M_{l_j}^{\mu(t)} = \max\limits_{l_j \in L_{k(t)}} M_{l_j}^{\mu(t)}$.

7. Если варианты с номерами $l_j \in L_{k(t)} = \{l_1, l_2, ..., l_j, ..., l_{k(t)}\}$ имеют соответственно одинаковые значения $H_{l_j}^{\mu(t)}$, $M_{l_j}^{\mu(t)}$, то лучшей является альтернатива S_{l_j} с минимальным значением $C_{kl\max_j}^{\mu(t)}$.

8. Если лучшие системы имеют соответственно равные значения $H_{l_j}^{\mu(t)}$, $M_{l_j}^{\mu(t)}$, $C_{kl\max_j}^{\mu(t)}$, то такие системы считают эквивалентными.

9. Положить $t = t + 1$.

10. Если $t < (n^P - 1)$, перейти к шагу 3, иначе — к шагу 11.

11. Конец решения.

Пример (продолжение). Для определения отношения предпочтения на рассматриваемом множестве СТС $\{S_1, S_2, S_3\}$, характеризующихся векторным неоднородным критерием оптимальности $K(S_\alpha) = \{K_1(S_\alpha), K_2(S_\alpha), K_3(S_\alpha)\}$, $\alpha = \{1, 2, 3\}$, будем использовать $\overset{*}{\mu}_D K_i(S_k)$, определенные на предыдущем этапе решения (табл. 8), и RP МП.

1. Построим матрицу предпочтений $\|C_{kl}^{\mu}\|$ (табл. 7).

Порядок расчета чисел C_{kl}^{μ}:

$$C_{12}^{\mu} = \frac{\overset{*}{\mu}_D K_1(S_1) + \overset{*}{\mu}_D K_2(S_1) + \overset{*}{\mu}_D K_3(S_1)}{\overset{*}{\mu}_D K_1(S_2) + \overset{*}{\mu}_D K_2(S_2) + \overset{*}{\mu}_D K_3(S_2)} = \frac{0{,}9 + 1 + 0{,}7}{1 + 0{,}9 + 0{,}97} = \frac{2{,}6}{2{,}87} = 0{,}9.$$

2. Анализ оценочной матрицы $\|C_{kl}^{\mu}\|$ позволяет получить на 1-м шаге ($t = 1$) решения показатели $H_{l_j}^{\mu(1)}$, $M_{l_j}^{\mu(1)}$, $C_{kl\max_j}^{\mu(1)}$, которые приведены в табл. 8.

3. Анализ табл. 8 показывает, что в соответствии с принятыми RP МП предпочтение на 1-м шаге решения ($t = 1$) необходимо отдать системе S_2. Включаем ее в кортеж Парето P. В табл. 7 удаляем вторую (S_2) строку и второй (S_2) столбец.

4. На 2-м шаге ($t = t + 1 = 2$) получаем вторую матрицу предпочтений (табл. 9) и матрицу показателей (табл. 10).

5. Предпочтение на 2-м шаге в соответствии с RP МП отдаем системе S_3. Так как $t = 2 = n^P - 1$, где $n^P = 3$, решение заканчиваем и строим кортеж предпочтений Парето: $P = \{S_2, S_3, S_1\}$.

■ ***Таблица 7.*** *Матрица предпочтений* $\|C_{kl}^{\mu}\|$

Системы (S_k)	Системы (S_l)		
	S_1	S_2	S_3
S_1	–	0,9	0,91
S_2	1,1	–	1,01
S_3	1,09	0,99	–

■ ***Таблица 8.*** *Матрица показателей*

Показатели	Системы (S_l)		
	S_1	S_2	S_3
$H_{l_j}^{\mu(1)}$	2	0	1
$M_{l_j}^{\mu(1)}$	0	2	1
$C_{kl_j\max}^{\mu(1)}$	1,1	0,99	1,01

■ ***Таблица 9.*** *Матрица предпочтений* (*шаг 2*)

Системы (S_k)	Системы (S_l)	
	S_1	S_3
S_1	–	0,91
S_3	1,09	–

■ ***Таблица 10.*** *Матрица показателей* (*шаг 2*)

Показатели	Системы (S_l)	
	S_1	S_3
$H_{l_j}^{\mu(2)}$	1	0
$M_{l_j}^{\mu(2)}$	0	1
$C_{kl_j\max}^{\mu(2)}$	1,09	0,91

В результате решения задачи получили, что предпочтение по векторному неоднородному критерию оптимальности $K(S_\alpha) = \{K_1(S_\alpha), K_2(S_\alpha), K_3(S_\alpha)\}$ следует отдать *второй* системе (S_2), *третья* (S_3) и *первая* (S_1) системы занимают соответственно второе и третье места в кортеже.

Заключение

Таким образом, поставлена и решена важная в прикладном плане задача определения отношений предпочтения на множестве СТС для случая, когда критерии оптимальности разнородны и могут быть заданы в частично формализованном, интервальном виде. Задача сводится к построению упорядоченного множества эффективных вариантов (кортежа предпочтений Парето) СТС по векторному разнородному критерию оптимальности.

На наш взгляд, метод может найти широкое применение при решении прикладных задач принятия решений в экономике, социальной сфере, оценке вариантов СТС различного назначения и т. д.

Литература

1. **Аленфельд Г., Херцбергер Ю.** Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 360 с.
2. **Алтунин А. Е., Семухин М. В.** Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та, 2000. 352 с.
3. **Белкин А. Р., Левин М. Ш.** Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации. М.: Наука, 1990. 160 с.
4. **Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.** Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 222 с.
5. **Шарый С. П.** Новый подход к анализу статических систем с интервальной неопределенностью в данных // Вычислительные технологии. 1997. № 1. С. 84–101.
6. **Шокин И. Ю.** Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981. 112 с.
7. **Левин В. И.** Задачи непрерывной оптимизации в условиях интервальной неопределенности // Информационные технологии. 1999. № 7. С. 31– 37.
8. **Жуковин В. Е.** Нечеткие многокритериальные модели принятия решений. Тбилиси: Мецниереба, 1988. 71 с.
9. **Заде Л. А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
10. **Орловский С. А.** Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации: Монография. М.: Наука, 1981. 203 с.
11. **Канторович Л. В.** Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
12. **Kaucher E.** Algebraische Erweiterungen der Intervallrechnung unter Erhaltung Ordnungs und Verbandsstrukturen // Computing Suppl. 1977. № 1. P. 65–79.
13. **Сафронов В. В., Ведерников Ю. В. и др.** Методика оптимизации структуры сложных технических систем в условиях риска // Информационно-управляющие системы. 2007. № 1. С. 40–46.
14. **Сафронов В. В., Ведерников Ю. В.** Метод многокритериального ранжирования сложных систем при различных видах неопределенности исходных данных // Информационно-управляющие системы. 2008. № 3. С. 32–39.
15. **Сафронов В. В., Ведерников Ю. В.** Научно-методический аппарат векторной оптимизации систем контроля и управления сложными динамическими объектами при разнородных исходных данных // Информационные технологии. (Приложение). 2007. № 11. 32 с.
16. **Ведерников Ю. В.** Теоретико-множественное обоснование выбора сложных систем при разнородной исходной информации: Монография. СПб.: МО РФ, 2008.
17. **Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н.** Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986. 296 с.