УДК 681.314

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ[1]

Часть 2: Мажоритарные алгоритмы

Э. П. Тихонов,
канд. техн. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

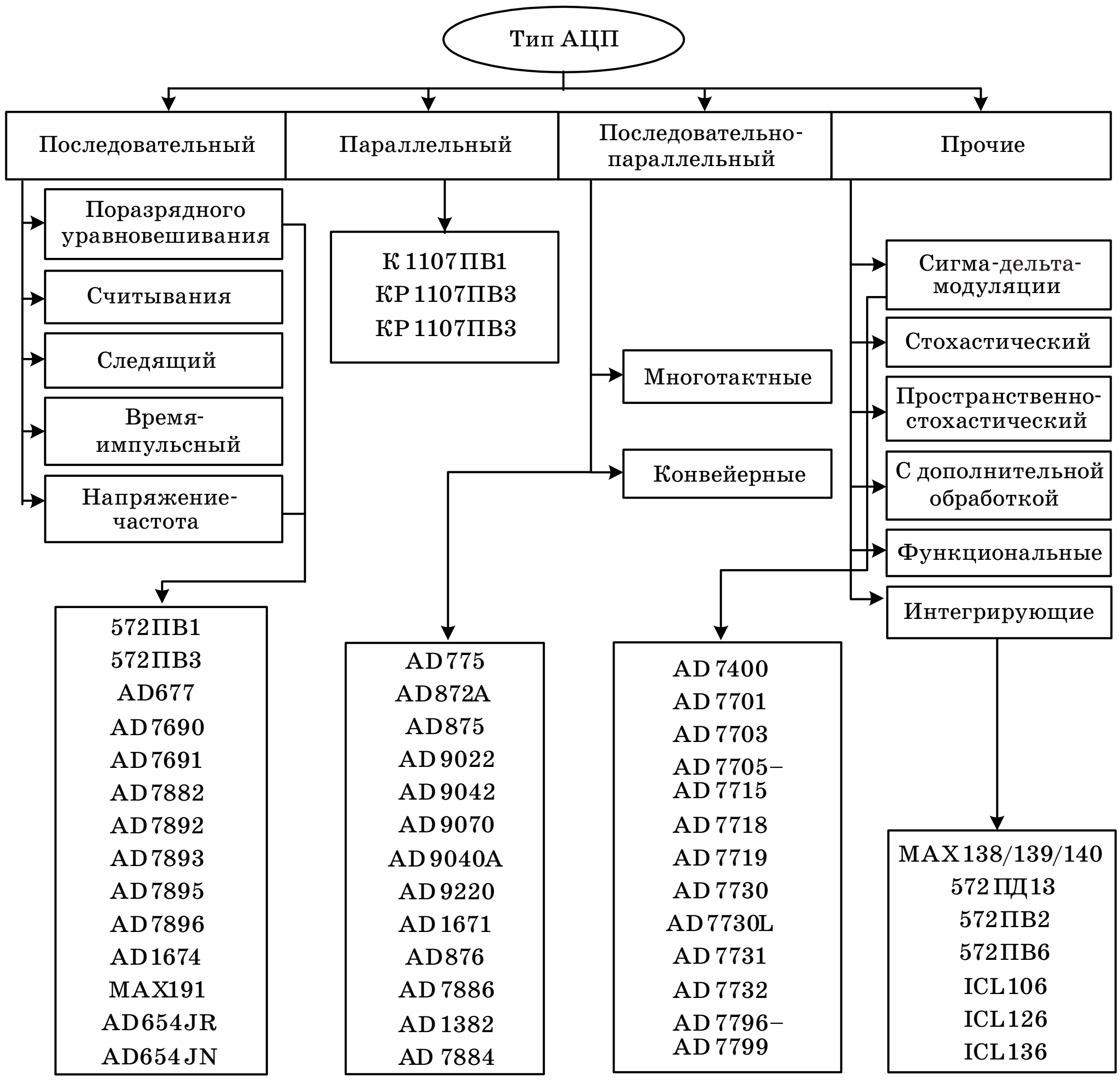
Предложено аналитическое описание различных модификаций алгоритмов аналого-цифровых преобразователей, включая мажоритарный и нейроноподобный принцип обработки информации, на базе которых выполнен сравнительный анализ их свойств, доведенных до численных результатов, и разработана классификационная схема аналого-цифровых преобразователей.

Ключевые слова *— аналого-цифровой преобразователь, мажоритарный принцип, помехоустойчивость, медиана, фильтр, контур.*

Прежде чем приступить к рассмотрению нетрадиционных модифицированных алгоритмов аналого-цифрового преобразования, целесообразно рассмотреть классификацию существующих различных типов АЦП, большинство из которых в том или ином виде уже разработаны, а некоторые из них выпускаются серийно в микросхемном исполнении. На рис. 7 представлена классификационная схема АЦП с указанием некоторых типов микросхем АЦП, выпускаемых серийно. В ней отсутствует обширный класс АЦП уголкод, который существенно отличается от класса преобразователей аналогового непрерывного сигнала в цифровой код как по алгоритму действия, так и по конструкции и поэтому требуют отдельного рассмотрения и классификации. Приведенные примеры микросхем показывают, какие алгоритмы аналого-цифрового преобразования получили в настоящее время наибольшее распространение.

Рассмотрим модификации алгоритмов преобразования, которые не нашли отражения в схеме. Среди них алгоритмы, использующие дополнительную обработку результатов сравнения уравновешивающей величины с входным сигналом или, в другой интерпретации, использующие дополнительное преобразование функции сравнения. Из возможного множества вариантов целесообразно выбрать такой алгоритм преобразования, который давал бы наибольший эффект по повышению помехоустойчивости. Понятие помехоустойчивости в данном случае включает наименьшую зависимость результатов сравнения входного сигнала с уравновешивающей величиной от импульсных и случайных непрерывных помех, которые суммируются с входным сигналом. Отметим, что процесс повышения помехоустойчивости, как правило, вступает в противоречие с требованием повышения быстродействия аналого-цифрового преобразования, так как в основе принципа повышения помехоустойчивости лежит необходимость увеличивать время обработки для получения и анализа дополнительной информации. Такое противоречие возникает как на схемотехническом уровне, так и на уровне использования информационных технологий, связанных с применением соответствующих помехоустойчивых алгоритмов обработки информации. Действительно, повышение быстродействия схемы сравнения приводит к расширению ее частотной полосы пропускания, что в свою очередь увеличивает уровень помехи. Естественно, что при использовании информационных технологий теоретически полностью освободиться от влияния помех можно только по результатам обработки неограниченного объема информации. Однако, выбрав надлежащим образом вид дополнительной обработки ограниченного числа результатов сравнения входного сигнала с уравновешивающей величиной, можно заметно ослабить воздей-

[1] Продолжение. Начало в № 1, 2009. С. 2–9.



■ ***Рис. 7.*** *Классификационная схема АЦП*

ствие помех на снижение достоверности результатов сравнения. Учитывая особенность вида функции сравнения (см., например, [1]), в качестве дополнительной обработки результатов сравнения предлагается принять так называемую мажоритарную обработку, использование которой приводит к алгоритму вида

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \\ + \otimes_{s=1}^{d} \left\{ \varphi\left\{ x - E[(n-s)\Delta t], a_n \right\} \right\}, \qquad (8)$$

где

$$\otimes_{s=1}^{d} \left\{ \varphi\left\{ x - E[(n-s)\Delta t], a_n \right\} \right\} = \\ = \begin{cases} a_n \otimes_{s=1}^{d} \left\{ h\left\{ x - E[(n-s)\Delta t] - a_n \right\} \right\} \\ a_n \otimes_{s=1}^{d} \left\{ \mathrm{sign}\left\{ \left[x - E[(n-s1)\Delta t] \right] \right\} \right\} \end{cases}$$

и

$$\otimes_{s=1}^{d} h\{\theta_s - a_n\} = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum_{s=1}^{d} h\{\theta_s - a_n\} > 0{,}5d \\ 0, \text{ в противоположном случае} \end{cases},$$

или

$$\otimes_{s=1}^{d} \mathrm{sign}\{\theta_s\} = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum_{s=1}^{d} \mathrm{sign}\{\theta_s\} > 0 \\ -1 \text{ в противоположном случае} \end{cases},$$

где $\theta_s = x - E[(n-s)\Delta t]$, d — число тактов сравнения при мажоритарной выборке результатов сравнения входного сигнала с уравновешивающей величиной и $0 < d_1 < d$.

Суть мажоритарного преобразования $\otimes_{s=1}^{d} \times \left\{ \varphi\left\{ x - E[(n-s)\Delta t], a_n \right\} \right\}$ вытекает из принципа выбора по большинству голосов выборщиков. В рассматриваемом случае голоса выборщиков отождествляются с количеством операций сравнения, результатами которых являются значения индикаторной или знаковой функции сравнения. При этом параметр d соответствует общему числу выборщиков, в нашем случае — числу тактов или операций сравнения, причем, чтобы не попасть в ситуацию неопределенности, значение параметра d должно быть нечетным, т. е. $d = 2N + 1$, $N = 0, 1, 2, \ldots$. При независимом воздействии помехи и вероятности правильного срабатывания на каждом такте сравнения $P > 0{,}5$ результат сравнения по мажоритарному принципу можно описать в соответствии со схемой Бернулли [7]. В этом случае для мажоритарного принципа сравнения вероятность правильного выбора определяется в соответствии с формулой

$$P_d = \sum_{i=0}^{N+1} C_{2N+1}^{i} P^{2N+1-i}(1-P)^{i},$$

где C_{2N+1}^{i} — число сочетаний из $2N + 1$ по i; $d = 2N + 1$.

Суть доказательства преимущества мажоритарного алгоритма для заданного параметра d состоит в следующем. Пусть помеха ξ имеет гауссово распределение вероятностей с нулевым математическим ожиданием. Тогда функции сравнения будут принимать значения с вероятностями:

— для индикаторной функции сравнения

$$P\left\{x+\xi \geq E\left[(n-1)\Delta t\right]+a_n\right\} \text{ и}$$

$$1-P\left\{x+\xi \geq E\left[(n-1)\Delta t\right]+a_n\right\},$$

— для знаковой функции сравнения

$$P\left\{x+\xi \geq E\left[(n-1)\Delta t\right]\right\} \text{ и}$$

$$1-P\left\{x+\xi \geq E\left[(n-1)\Delta t\right]\right\}$$

по формулам

$$h\left\{x+\xi-E\left[(n-1)\Delta t\right]-a_n\right\}= \\ =\begin{cases} 1 \text{ с } P\left\{x+\xi \geq E\left[(n-1)\Delta t\right]+a_n\right\} \\ 0 \text{ с } 1-P\left\{x+\xi \geq E\left[(n-1)\Delta t\right]+a_n\right\} \end{cases};$$

$$\operatorname{sign}\left\{x+\xi-E\left[(n-1)\Delta t\right]\right\}= \\ =\begin{cases} 1 \text{ с } P\left\{x+\xi \geq E\left[(n-1)\Delta t\right]\right\} \\ -1 \text{ с } 1-P\left\{x+\xi \geq E\left[(n-1)\Delta t\right]\right\} \end{cases}.$$

При этом вероятности появления выходного сигнала высокого уровня, соответствующего единице на выходе сравнивающих устройств, при воздействии аддитивной гауссовой помехи для числа тактов сравнения $d = 1$ можно определить по равенству

$$P_1\{\theta\}=\Phi[\theta]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\theta}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

где $\theta = \gamma/\sigma_\xi$, причем $0 \leq \theta \leq 3$, а параметр γ равен разности значений входного сигнала и уравновешивающей величины, т. е.: $\gamma = x - (E(n\Delta t) + a_n)$ для индикаторной и $\gamma = x - E(n\Delta t)$ для знаковой функций сравнения; σ_ξ — СКО помехи; $\Phi[\theta]$ — функция Лапласа. По определению, параметр θ является безразмерной величиной. Пусть для определенности вероятность появления единицы на выходе СУ $P > 0{,}5$. Нужно показать, что при мажоритарном выборе и нечетном числе тактов сравнения $d > 1$ вероятность правильного срабатывания функции сравнения превышает соответствующую вероятность для $d = 1$, т. е.

$$P_d(\theta)=\sum_{i=0}^{N+1} C_{2N+1}^{i} P^{2N+1-i}(1-P)^{i} > P.$$

Рассмотрим случай, когда $d = 3$, для которого вероятность правильного срабатывания определяется в соответствии с равенством

$$P_3(\theta)=C_3^3 P^3 + C_3^2 P^2(1-P).$$

Покажем, что при мажоритарном выборе эта вероятность превышает вероятность правильного срабатывания СУ без использования мажоритарной функции сравнения. Для этого необходимо показать, что для $1 \geq P\{\theta\} \geq 1/2$ выполняется условие

$$C_3^3 P^3 + C_3^2 P^2(1-P) - P \geq 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно P, получаем, что равенство нулю левой части достигается для двух значений $\{1; 0{,}5\}$ данной вероятности P. Эти оба значения вероятности говорят о том, что при правильном срабатывании СУ с вероятностью единица или для случая его срабатывания с одинаковой вероятностью правильно или неправильно, равной 0,5, выигрыша при введении мажоритарного выбора нет. Однако совсем другая картина наблюдается для случая, когда выполняется строгое неравенство $1 > P > 0{,}5$, для которого

$$C_3^3 P^2 + C_3^2 P(1-P) - 1 > 0,$$

и максимум выигрыша достигается для $P = 0{,}75$. Строгое математическое доказательство преимущества мажоритарного алгоритма для заданного параметра $d > 3$ достаточно громоздко и особого интереса для технического приложения не представляет, так как увеличение параметра $d > 3$ нецелесообразно из-за соответствующего увеличения общего времени преобразования. Кроме того, схему доказательства для параметра $d = 3$ можно использовать и для больших значений этого параметра. На рис. 8 показаны графики вероятностей правильного срабатывания индикаторного СУ для различных d при воздействии помехи в зависимости от изменения параметра θ (на графике $\theta = x$). Для сравнения на этом же графике представлена индикаторная функция сравнения в отсутствие помехи. Из анализа графиков следует:

- воздействие помехи переводит индикаторную функцию в функцию активации, присущую нейронам [8];
- с увеличением значения параметра d, а следовательно, и времени анализа функция активации нейронного типа приближается к индикаторной функции, описывающей результат сравнения для идеального случая отсутствия помех;
- эффект использования мажоритарной функции сравнения с ростом значений параметра d равносилен эффекту, возникающему при выполнении функции сравнения для $d = 1$ в присутствии помехи, но с соответствующим уменьшением дисперсии помехи, действующей в СУ.

Количественную оценку качества функции сравнения при воздействии помехи в зависимости от параметра d и величины γ целесообразно оценить по вероятности ошибки $P_{d\,\text{ош}}$ срабатывания СУ в присутствии помехи в соответствии с формулой

$$P_{d\,\text{ош}} = P(\gamma > 0)P[h(\gamma + \xi) = 0] + \\ + P(\gamma < 0)P[h(\gamma + \xi) = 1],$$

где $P(\gamma > 0)$ — вероятность того, что при положительном значении разности γ при воздействии помехи результат сравнения должен установиться равным единице; $P[h(\gamma + \xi) = 0]$ — вероятность того, что при положительном значении разности γ при воздействии помехи в действительности устанавливается результат сравнения, равный нулю; $P(\gamma < 0)$ — вероятность того, что при отрицательном значении разности γ при воздействии помехи должен установиться результат сравнения, равный нулю; $P[h(\gamma + \xi) = 1]$ — вероятность того, что при отрицательном значении разности γ при воздействии помехи в действительности устанавливается результат сравнения, равный единице.

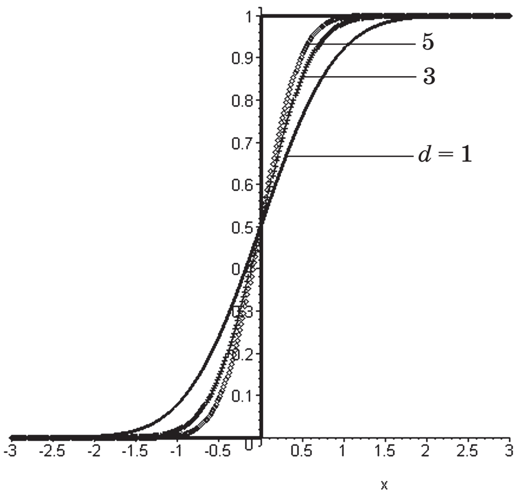
Динамика изменения вероятности ошибки в СУ в зависимости от изменения параметра θ показана на рис. 9. В качестве критерия K_d повышения помехоустойчивости при фиксированной дисперсии помехи целесообразно использовать отношение

$$K_d = \frac{\int_{-3}^{3} P_{1\,\text{ош}}(\theta)\,d\theta}{\int_{-3}^{3} P_{d\,\text{ош}}(\theta)\,d\theta},$$

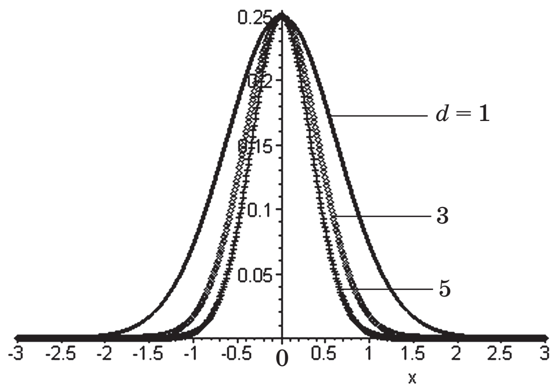
где $P_{1\,\text{ош}}(\theta)$ и $P_{d\,\text{ош}}(\theta)$ — вероятности ошибок в зависимости от изменения параметра θ для значений $d = 1$ и $d = 3, 5, 7, \ldots$.

Расчетные значения критерия K_d повышения помехоустойчивости для $d = 1$, 3 и 5 соответственно равны 1; 1,494 и 1,868. Отсюда следует, что с ростом параметра d темпы роста критерия повышения помехоустойчивости заметно снижаются (почти в 2 раза). Для значения параметра $d = 3$ выигрыш в помехоустойчивости для определения достоверности каждого разряда в двоичном коде достигает 50 %, что является достаточно высоким показателем при увеличении числа тактов сравнения в 3 раза на один разряд.

Введение мажоритарной выборки, достаточно просто реализуемой схемотехнически на логических элементах, в каждом канале параллельного АЦП позволит в 1,5 раза увеличить его помехоустойчивость, что является существенным пока-



■ *Рис. 8. Графики вероятностей правильного срабатывания индикаторного СУ*



■ *Рис. 9. Графики изменения вероятности ошибки при работе СУ в зависимости от изменения θ при воздействии помехи* зателем повышения помехоустойчивости, учитывая низкую помехоустойчивость алгоритма аналого-цифрового преобразования параллельного действия к аддитивной помехе.

Необходимо отметить еще одну существенную особенность мажоритарных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Мажоритарный выбор результатов многократного сравнения существенно расширяет функциональные возможности мажоритарных АЦП. Благодаря этим возможностям расширяется и сфера применения подобных АЦП. В частности, данные АЦП позволяют преобразовывать аналоговую информацию, распределенную в пространстве, в цифровой код. При этом СУ АЦП для каждого пространственного сигнала должно иметь отдельный вход. Электроника позволяет создавать различные варианты структурных схем АЦП с мажоритарной обработкой входного пространственно распределенного сигнала (рис. 10, *а* и *б*). Таким образом, мажоритарные АЦП могут легко трансформироваться в многоканальные по входу и одноканальные по выходу АЦП с алгоритмами функционирования (8), которые математически можно представить в явном виде:

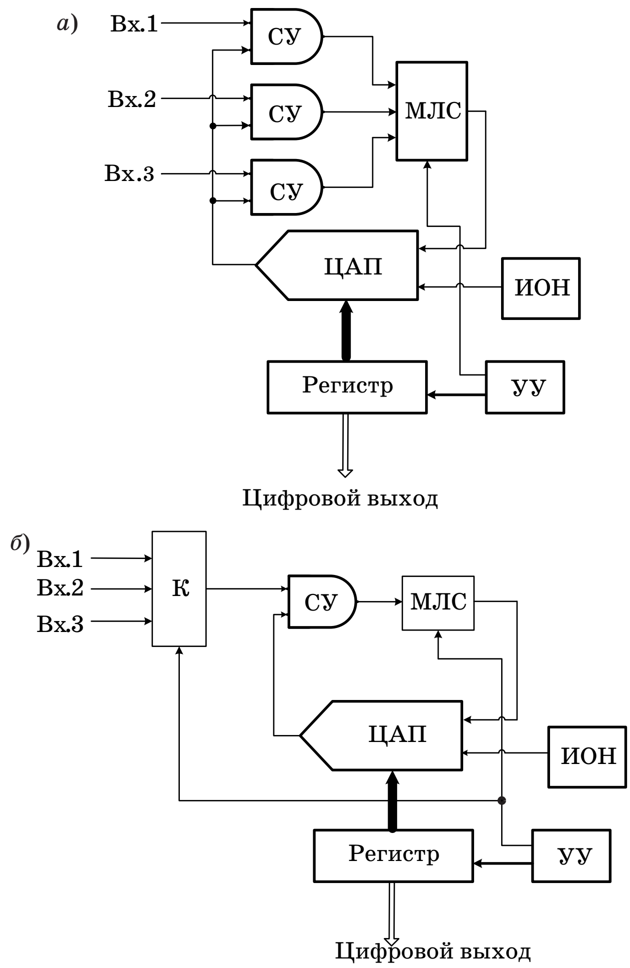
$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + E_0 2^{-n+1} \times \times \left\{1 + \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{d} \operatorname{sign} \times \times \left[x_i(n\Delta t) + \xi_i(n\Delta t) - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}\right]\right\};$$

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + E_0 2^{-n} \operatorname{sign} \times \times \left\{\sum_{i=1}^{d} \operatorname{sign}\left[x_i(n\Delta t) + \xi_i(n\Delta t) - E(n\Delta t)\right]\right\}, \qquad (9)$$

где $x_i(n\Delta t)$ и $\xi_i(n\Delta t)$ — сигналы и помехи, распределенные в пространстве и зафиксированные в момент сравнения с уравновешивающей величиной $E(n\Delta t)$; $i = 1, 2, ..., d$, здесь d — число сравнений, выполняемых при пространственном разделении составляющих векторного сигнала. Количество СУ определяется количеством пространственных источников векторного сигнала, т. е. числом d. Мажоритарный принцип сравнения можно использовать и для других алгоритмов аналого-цифрового преобразования, например для следящего алгоритма и алгоритма считывания.

Алгоритмы (9) благодаря применению мажоритарной функции сравнения при обработке пространственно распределенного сигнала выполняют двойную функцию:

- пространственную медианную фильтрацию;



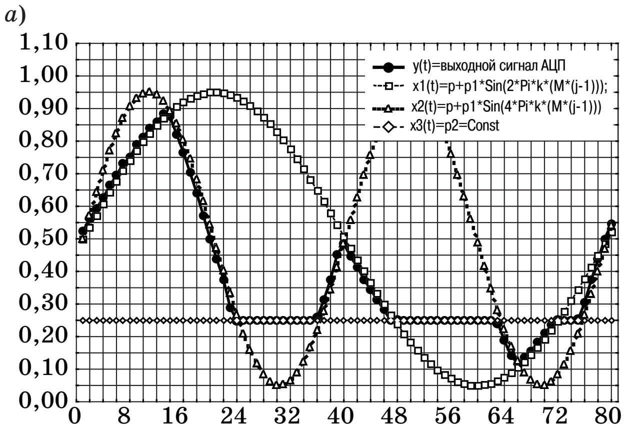
■ ***Рис. 10.*** *Структурная схема АЦП с параллельной (а) и последующей мажоритарной обработкой выходных сигналов СУ (б — с коммутируемым входным сигналом): МЛС — мажоритарная логическая схема; ИОН — источник опорного напряжения; УУ — устройство управления; К — коммутатор (аналоговый мультиплексор) входных сигналов*

- преобразования аналогового значения медианы многомерного сигнала в цифровой двоичный код.

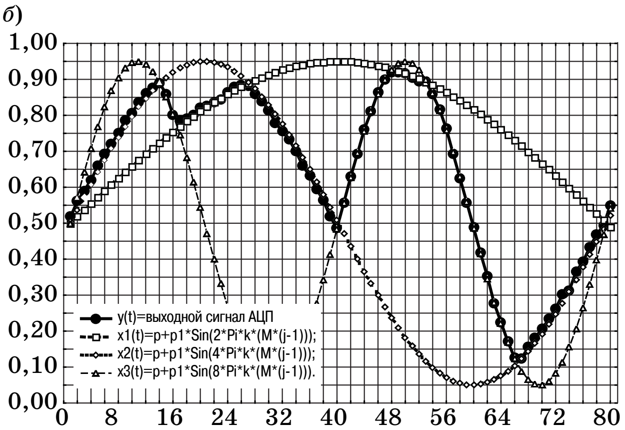
Иначе говоря, алгоритмы (9) преобразуют в цифровой код медиану многомерного сигнала размерности d. Распределение источников сигнала в пространстве не имеет значения для функционирования алгоритма. Благодаря этому открываются широкие возможности для практического применения АЦП, использующих подобные алгоритмы, так как существенно упрощаются структура и алгоритмы обработки информации в многоканальных электронных комплексах, предназначенных для решения многообразных технических задач.

Напомним [9, 10], что медианой последовательности x_i $\{i = 1, ..., d\}$ является средний по значению член последовательности при ее упорядочении по возрастанию. Для четного значения d рекомендуется определять медиану как среднее арифметическое двух средних членов. Нетрудно убедиться в том, что в алгоритмах (9) находится скользящая или текущая медиана дискретного во времени входного сигнала, т. е. выбирается средний по значению член последовательности дискретного во времени с шагом Δt одномерного входного сигнала (рис. 11, *а*, *б*). Подобную функцию выполняют так называемые медианные фильтры. Медианные фильтры обладают рядом положительных, с точки зрения обработки информации, свойств. В частности, в отличие от алгоритма скользящего среднего медианная фильтрация сохраняет перепады между анализируемыми значениями сигналов, что имеет большое значение, например, при обработке изображений и выделении их контуров [9, 10]. Таким образом, «скользя» по нечеткому контуру изображения линейкой из d датчиков и имея соответствующий

а)



б)



■ ***Рис. 11.*** *Графики, иллюстрирующие работу мажоритарного алгоритма аналого-цифрового преобразования: а — одна из составляющих сигнала равна постоянной величине; б — составляющие сигнала изменяются по гармоническому закону*

АЦП, можно без дополнительной довольно громоздкой обработки информации получать результат медианной фильтрации контура изображения в темпе с выполнением операции аналого-цифрового преобразования.

Графики иллюстрируют работу мажоритарного алгоритма аналого-цифрового преобразования в режиме выделения и преобразования в цифровой двоичный код медианы из 3-мерного входного сигнала, составляющие которого принимают различный вид (см. рис. 11).

Мажоритарную обработку входного сигнала можно осуществить как по пространству, так и по времени в соответствии со следующими комбинированными алгоритмами:

$$E[(n+i+1)\Delta t] = E[(n+i)\Delta t] + E_0 2^{-(n+1)} \times \left\{1 + \operatorname{sign}\sum_{j=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d_2}\operatorname{sign}\left[x_j[(n+i)\Delta t] + \xi_j[(n+i)\Delta t] - E[(n+i)\Delta t] - E_0 2^{-n}\right]\right\}$$

и

$$E[(n+i+1)\Delta t] = E[(n+i)\Delta t] + E_0 2^{-n}\operatorname{sign} \times \left\{\sum_{j=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d_2}\operatorname{sign}\left[x_j[(n+i)\Delta t] + \xi_j[(n+i)\Delta t] - E[(n+i)\Delta t]\right]\right\}, \qquad (10)$$

где d_1 и d_2 — число операций сравнения, выполняемых при пространственном и последовательно-временном способах поступления составляющих векторного сигнала на входы СУ. Количество СУ определяется количеством пространственных источников векторного сигнала, т. е. нечетным числом d_1. Причем для каждого СУ решение об изменении уравновешивающей величины принимается после выполнения d_2 нечетного числа сравнения, полученного последовательно во времени.

Комбинированный мажоритарный принцип сравнения можно использовать и для других алгоритмов аналого-цифрового преобразования, например, для следящего алгоритма получаем

$$E[(n+i+1)\Delta t] = E[(n+i)\Delta t] + E_0 2^{-N}\operatorname{sign}\left\{\sum_{j=1}^{d_1}\sum_{i=1}^{d_2}\operatorname{sign}\left[x_j[(n+i)\Delta t] + \xi_j[(n+i)\Delta t] - E[(n+i)\Delta t]\right]\right\}.$$

Таким образом, разработка комбинированных алгоритмов с использованием мажоритарной обработки результатов сравнения сигнала с уравновешивающей величиной позволяет не только улучшить метрологические характеристики АЦП, но и расширить их функциональные возможности при обработке сигналов уже на стадии выполнения основной функции — аналого-цифрового преобразования.

Окончание следует.

Литература

7. **Ширяев А. Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980. 575 с.
8. **Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю., Антонов В. Н.** Нейросетевые системы управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. 265 с.
9. **Гильбо Е. П., Челпанов И. Б.** Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора. М.: Сов. радио, 1975. 344 с.
10. **Быстрые алгоритмы** в цифровой обработке изображений / Т. С. Хуанг, Дж.-О. Эклунд, Г. Дж. Нуссбаумер и др.; Под ред. Т. С. Хуанга: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1984. 224 с.