УДК 621.391

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНЫХ АДАПТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ-ОРТОГОНАЛИЗАТОРОВ

А. Р. Бестугин,
канд. техн. наук, доцент
В. А. Шаталова,
канд. техн. наук, старший преподаватель
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Предложены адаптивные алгоритмы подстройки весовых коэффициентов многомерных фильтров-ортогонализаторов, выполняющих ортогонализацию компонент входного векторного случайного процесса методами прямых вычислений. Получено аналитическое выражение совместной плотности распределения вероятностей выборочных оценок дисперсий выходных напряжений многомерных адаптивных фильтров-ортогонализаторов.

Ключевые слова *— ортогонализация, адаптивный алгоритм, статистические характеристики.*

Введение

Многомерные адаптивные фильтры-ортогонализаторы осуществляют преобразование входных векторных случайных процессов (СП) $\boldsymbol{\xi}_n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ с коррелированными компонентами в СП $\boldsymbol{\eta}_n$ с некоррелированными компонентами и являются основной составной частью многомерных адаптивных выбеливающих фильтров [1]. Они также широко применяются при решении задач обнаружения, оценивания параметров, разрешения и распознавания образов объектов в качестве самостоятельных устройств [2].

Несмотря на множество работ, посвященных применению и реализации указанных фильтров, не рассмотренными [3] остались вопросы оценивания скорости сходимости адаптивных алгоритмов и вида плотностей распределения вероятностей (ПРВ) выборочных оценок весовых коэффициентов и дисперсий выходных напряжений фильтров-ортогонализаторов, формируемых на каждом шаге адаптации. Получено выражение [4], позволяющее определить скорость сходимости адаптивного алгоритма фильтра-ортогонализатора, подстройка весовых коэффициентов которого осуществляется по методу прямых вычислений. Решен также важный вопрос — нахождение ПРВ выборочных оценок весовых коэффициентов адаптивных фильтров-ортогонализаторов [5].

Цель данной работы состоит в определении ПРВ выборочных дисперсий выходных напряжений адаптивных фильтров-ортогонализаторов.

Адаптивные многоканальные фильтры-ортогонализаторы

Фильтр-ортогонализатор осуществляет пространственную обработку в соответствии с выражением [1, 2, 4]

$$\boldsymbol{\eta}_n = \boldsymbol{\xi}_n - \mathbf{H}\boldsymbol{\eta}_n, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\xi}_n$ и $\boldsymbol{\eta}_n$ — L-мерные комплексные векторы выборок входных и выходных напряжений ортогонализатора, взятых в произвольный момент времени n; $\mathbf{H}$ – $L \times L$ нижняя треугольная матрица весовых коэффициентов h_{il} с нулевой главной диагональю, $h_{il} = r_{il}/\theta_{ll}$, здесь $r_{il} = \mathrm{M}[\xi_i\eta_l^*]$; $\theta_{ll} = \mathrm{M}[\eta_l\eta_l^*] = \mathrm{M}[|\eta_l|^2]$; $\mathrm{M}[\cdot]$ означает операцию вычисления математического ожидания от выражения, стоящего в квадратных скобках; ξ_i и η_l — соответствующие элементы векторов $\boldsymbol{\xi}_n$ и $\boldsymbol{\eta}_n$; * означает комплексно сопряженную случайную величину, эрмитово сопряженную матрицу или вектор. Предполагается, что $\mathrm{M}[\boldsymbol{\xi}_n] = \mathbf{0}$, $\mathbf{0}$ — нулевой вектор.

В случае гауссовой совместной ПРВ выборок вектора $\boldsymbol{\xi}_n$, когда неизвестна ковариационная матрица $\mathbf{K}_\xi = \mathrm{M}[\boldsymbol{\xi}_n\boldsymbol{\xi}_n^*]$, в процедуре (1) вместо истинных значений весовых коэффициентов h_{il} необходимо использовать их оценки максимального правдоподобия, получаемые по p независимым выборкам СП $\boldsymbol{\xi}_n$ и $\boldsymbol{\eta}_n$:

$$\hat{h}_{il} = \hat{r}_{il}/\hat{\theta}_{ll}; \quad (2)$$

$$\hat{r}_{il} = p^{-1}\sum_{n=1}^{p}\xi_{i,n}\eta^*_{l,n}, \quad \hat{\theta}_{ll} = p^{-1}\sum_{n=1}^{p}\eta_{l,n}\eta^*_{l,n}. \quad (3)$$

При практическом использовании алгоритмов целесообразнее применять итерационные алгоритмы вычисления оценок неизвестных параметров r_{il}, σ^2_{ll} с помощью алгоритмов стохастической аппроксимации:

$$\hat{r}_{il}(n+1) = \hat{r}_{il}(n) - \mu(n)\left[\hat{r}_{il}(n) - \xi_i(n)\eta^*_l(n)\right]; \quad (4)$$

$$\hat{\theta}_{ll}(n+1) = \hat{\theta}_{ll}(n) - \mu(n)\left[\hat{\theta}_{ll}(n) - \eta_l(n)\eta^*_l(n)\right]. \quad (5)$$

Алгоритмы сходятся в среднеквадратическом, если последовательность чисел $\mu(n)$ выбирается из условия

$$\mu(n) > 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu(n) = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu^2(n) < \infty. \quad (6)$$

Применение оценок максимального правдоподобия в виде (2), (3) и процедур стохастической аппроксимации (4), (5) обеспечивает сходимость точно такую же, как и при использовании метода прямого обращения выборочной ковариационной матрицы $\hat{\mathbf{K}}_\xi$ [2, 4].

В работах [2, 4] показано, что процедура (1) может выполняться с выбором ведущего элемента. Ее важным преимуществом является естественное ограничение величины весовых коэффициентов $|h_{ij}| < 1$; $\forall i, j \in \overline{1,L}$; $\forall i > j$; упорядоченность по дисперсиям выходных напряжений ортогонализатора $\hat{\theta}_{11} > \hat{\theta}_{22} > \ldots > \hat{\theta}_{LL}$, что не всегда имеет место в исходной процедуре.

Совместная плотность распределения вероятностей выборочных дисперсий выходных напряжений адаптивных фильтров-ортогонализаторов

Совместная ПРВ элементов выборочной матрицы $\hat{\mathbf{K}}_\xi$ гауссова СП ξ_t имеет вид

$$p(\hat{\mathbf{K}}_\xi) = \frac{\left[\left|\hat{\mathbf{K}}_\xi\right|^{p-L}\exp\left\{-\mathrm{tr}\left(\mathbf{K}_\xi^{-1}\hat{\mathbf{K}}_\xi\right)\right\}\right]}{\pi^{\frac{1}{2}L(L-1)}\Gamma(p)\ldots\Gamma(p-L+1)\left|\mathbf{K}_\xi\right|^p} \quad (7)$$

и является так называемой комплексной ПРВ Уишарта [5].

Определим совместную ПРВ выборочных оценок дисперсий $\hat{\theta}_{ii}$, $i \in \overline{1,L}$ напряжений, формируемых на выходах фильтров-ортогонализаторов.

Найдем совместную ПРВ $p(\hat{\mathbf{H}}_0, \hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta)$. Для этого прежде всего вычислим якобиан преобразования j. Можно показать [5], что в случае входного комплексного гауссова СП j равен квадрату определителя Вандермонда: $j = 2^L\prod_{i=1}^{L-1}\prod_{l=i+1}^{L}(\hat{\theta}_{ii} - \hat{\theta}_{ll})^2$.

Совместную ПРВ $\hat{\mathbf{H}}_0$ и $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta$ найдем, заменяя в (7) $\hat{\mathbf{K}}_\xi = \hat{\mathbf{H}}_0\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta\hat{\mathbf{H}}^*_0$, учитывая, что $\left|\hat{\mathbf{K}}_\xi\right| = \left|\hat{\mathbf{H}}_0\right|\left|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta\right| \times \left|\hat{\mathbf{H}}^*_0\right| = \left|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta\right|$, $\left|\hat{\mathbf{H}}_0\right| = \left|\hat{\mathbf{H}}^*_0\right| = 1$ и умножая полученный результат на якобиан j. В результате получим

$$p(\hat{\mathbf{H}}_0, \hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta) = \frac{c_1\left|\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta\right|^{p-L}\exp\left\{-\mathrm{tr}\left(\mathbf{K}_\xi^{-1}\hat{\mathbf{H}}_0\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta\hat{\mathbf{H}}^*_0\right)\right\}}{\pi^{\frac{1}{2}L(L-1)}\prod_{i=0}^{L-1}\Gamma(p-i)\left|\boldsymbol{\Theta}_\eta\right|^p} \times$$
$$\times 2^L\prod_{i=1}^{L-1}\prod_{l=i+1}^{L}(\hat{\theta}_{ii} - \hat{\theta}_{ll})^2, \quad (8)$$

где c_1 — коэффициент, выбираемый из условия нормировки:

$$c_1\int_{\hat{h}_{il}\in\hat{H}_0}\ldots\int_{\hat{\theta}\in\hat{\Theta}_\eta}p(\hat{\mathbf{H}}_0, \hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta)\prod_{i=1}^{L-1}\prod_{l=i+1}^{L}\mathrm{d}\hat{h}_{il,\,0}\prod_{i=1}^{l}\mathrm{d}\hat{\theta}_{ii} = 1. \quad (9)$$

Для того чтобы определить частное распределение $p(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta)$, необходимо проинтегрировать (8) по элементам матрицы $\hat{\mathbf{H}}_0$ в пределах $-1 \le h_{il0} \le 1$, $\forall i > l$, $\forall i \in \overline{2,L}$:

$$p(\hat{\Theta}_\eta) =$$
$$= c_1c_2\int_{-1}^{1}\ldots\int_{-1}^{1}\exp\left\{-\mathrm{tr}\left[\mathbf{K}_\xi^{-1}\hat{\mathbf{H}}_0\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta\hat{\mathbf{H}}^*_0\right]\right\} \times$$
$$\times \mathrm{d}\hat{h}_{21,0}\ \ldots\ \mathrm{d}\hat{h}_{LL-1,0}, \quad (10)$$

где

$$c_2 = 2^L\left|\hat{\Theta}_\eta\right|^{p-L}\prod_{i=1}^{L-1}\prod_{l=i+1}^{L}(\hat{\theta}_{ii} - \hat{\theta}_{ll})^2 \times$$
$$\times\left\{\pi^{\frac{1}{2}L(L-1)}\prod_{i=0}^{L-1}\Gamma(p-i)\left|\Theta_\eta\right|^p\right\}^{-1}.$$

Возможны несколько вариантов вычисления данного интеграла. Первый основан на использовании экстремальных свойств собственных чисел $\hat{\Lambda}_i$ и собственных векторов $\hat{\mathbf{U}}_i$ матрицы $\hat{\mathbf{K}}_\xi$. Здесь будет рассмотрен второй вариант, базирующийся на представлении матрицы $\hat{\mathbf{K}}_\xi$ в виде суммы матриц ранга 1: $\hat{\mathbf{K}}_\xi = \hat{\mathbf{H}}_0\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta\hat{\mathbf{H}}_0 = \sum_{i=1}^{L}\hat{\theta}_{ii}\hat{\mathbf{H}}_i\hat{\mathbf{H}}^*_i$, где $\hat{\mathbf{H}}_i$ — матрица, у которой i-й столбец совпадает с i-м столбцом $\hat{\mathbf{h}}_{i0}$ матрицы $\hat{\mathbf{H}}_0$, а остальные элементы равны нулю. Необходимо отметить, что

$\hat{\mathbf{H}}_0$ является матрицей с ортогональными столбцами. Можно показать простым перемножением, что $\hat{\mathbf{K}}_\xi = \hat{\mathbf{H}}_0 \hat{\mathbf{\Theta}}_\eta \hat{\mathbf{H}}_0 = \sum_{i=1}^{L} \hat{\theta}_{ii} \hat{\mathbf{H}}_i \hat{\mathbf{H}}_i^* = \sum_{i=1}^{L} \hat{\theta}_{ii} \hat{\mathbf{h}}_{i0} \hat{\mathbf{h}}_{i0}^*$.

Это позволяет записать интеграл в (10) в виде

$$p(\hat{\mathbf{\Theta}}_\eta) = c_1 c_2 \prod_{i=1}^{L} \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \exp\left\{ -\hat{\theta}_{ii} \hat{\mathbf{h}}_{i0}^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{h}}_{i0} \right\} \times \times \mathrm{d}\hat{h}_{21,0} \ldots \mathrm{d}\hat{h}_{LL-1,0}. \quad (11)$$

Представим $\hat{\mathbf{h}}_{i0}^T = \left[\mathbf{0}^T, 1, \hat{h}_{i+1,\,i}, \ldots, \hat{h}_{L,\,i} \right]$ в виде суммы двух векторов $\hat{\mathbf{h}}_{i0}^T = \mathbf{1}_i^T + \hat{\mathbf{h}}_i^T$, где $\mathbf{1}_i^T = [\mathbf{0}^T, 1, 0, \ldots, 0]$, $\hat{\mathbf{h}}_i^T = \left[\mathbf{0}^T, 0, \hat{h}_{i+1,\,i}, \ldots, \hat{h}_{L,\,i} \right]$. Тогда получим, что

$$\hat{\mathbf{h}}_{i0}^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{h}}_{i0} = (\mathbf{1}_i + \hat{\mathbf{h}}_i)^* \mathbf{K}_\xi^{-1} (\mathbf{1}_i + \hat{\mathbf{h}}_i) = = \left(\mathbf{1}_i^T \mathbf{K}_\xi^{-1} \mathbf{1}_i \right) + \left(\hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \mathbf{1}_i \right) + + \left(\mathbf{1}_i^T \mathbf{K}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i \right) + \left(\hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i \right). \quad (12)$$

Заметим, что $(\mathbf{1}_i^T \mathbf{K}_\xi^{-1} \mathbf{1}_i) = k_{\xi ii}$ – i-й диагональный элемент матрицы $\mathbf{K}_\xi^{-1}$. С другой стороны, $\left(\hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \mathbf{1}_i \right)$ означает, что в результате умножения $\mathbf{K}_\xi^{-1} \mathbf{1}_i$ выбирается i-й вектор-столбец $\mathbf{k}_\xi^i$ матрицы $\mathbf{K}_\xi^{-1}$, который затем умножается на вектор $\mathbf{h}_i^*$. Полученное скалярное произведение $\mathbf{h}_i^* \mathbf{K}_{\xi i} = \sum_{j=i+1}^{L} \hat{h}_{ij}^* k_{\xi ij}$ можно преобразовать к виду $\mathbf{h}_i^* \mathbf{D}_\xi^{-1} \mathbf{h}_i$, если каждый элемент суммы одновременно умножить и разделить на $\hat{h}_{ij}$ и обозначить $d_{jj}^{-1} = k_{\xi ij} / \hat{h}_{ij}$.

С учетом введенных обозначений и сделанных пояснений представим

$$\hat{\mathbf{h}}_{i0}^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{h}}_{i0} = k_{\xi ii} + 2\left(\hat{\mathbf{h}}_{i0}^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \mathbf{1}_i \right) + \hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i = = k_{\xi ii} + 2\hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{D}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i + \hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{K}_\xi^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i = = k_{\xi ii} + \hat{\mathbf{h}}_i^* \left(2\mathbf{D}_\xi^{-1} + \mathbf{K}_\xi^{-1} \right) \hat{\mathbf{h}}_i = k_{\xi ii} + \hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{K}_{\xi D}^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i. \quad (13)$$

Тогда (11) приобретает следующий вид:

$$p(\hat{\mathbf{\Theta}}_\eta) = c_1 c_2 \prod_{i=1}^{L} \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \exp\left\{ -\hat{\theta}_{ii} k_{\xi ii} - \hat{\theta}_{ii} \hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{K}_{\xi D}^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i \right\} \times \times \mathrm{d}\hat{h}_{21} \ldots \mathrm{d}\hat{h}_{LL-1} = c_1 c_2 \prod_{i=1}^{L} \exp\left\{ -\hat{\theta}_{ii} k_{\xi ii} \right\} \times \times \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \exp\left\{ -\hat{\theta}_{ii} \hat{\mathbf{h}}_i^* \mathbf{K}_{\xi D}^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i \right\} \mathrm{d}\hat{h}_{21} \ldots \mathrm{d}\hat{h}_{ll-1}. \quad (14)$$

В соответствии с процедурой квадратного корня запишем $\mathbf{K}_{\xi D}^{-1} = (\mathbf{K}_1^*)^{-1} \mathbf{K}_1^{-1}$, где $\mathbf{K}_1^{-1}$ — нижняя треугольная матрица, и сделаем замену переменных под знаком интеграла

$$2^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathbf{V}}_{i0} = \hat{\theta}_{ii}^{\frac{1}{2}} \mathbf{K}_1^{-1} \hat{\mathbf{h}}_i \ \text{ или } \ \hat{\mathbf{h}}_i = 2^{-\frac{1}{2}} \hat{\theta}_{ii}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}_1 \hat{\mathbf{V}}_{i0}. \quad (15)$$

Тогда

$$2^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\hat{\mathbf{V}}_{i0} = \hat{\theta}_{ii}^{\frac{1}{2}} \mathbf{K}_1^{-1} \mathrm{d}\hat{\mathbf{h}}_i \ \text{ и } \ \mathrm{d}\hat{\mathbf{h}}_i = 2^{-\frac{1}{2}} \hat{\theta}_{ii}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{K}_1 \mathrm{d}\hat{\mathbf{V}}_{i0}. \quad (16)$$

Это означает, что

$$\mathrm{d}\hat{h}_{il} = 2^{-\frac{1}{2}} \hat{\theta}_{ii}^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=i}^{l} k_{1lr} \mathrm{d}\hat{\mathrm{v}}_{ir0} = = (2\hat{\theta}_{ii})^{-\frac{1}{2}} \left[\sum_{r=i}^{l} k_{1lr} \frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{v}}_{ir0}}{\mathrm{d}\hat{\mathrm{v}}_{il0}} \right] \mathrm{d}\hat{\mathrm{v}}_{il0} = = 2^{-\frac{1}{2}} \hat{\theta}_{ii}^{-\frac{1}{2}} \upsilon_{il} \mathrm{d}\hat{\mathrm{v}}_{il0}. \quad (17)$$

Пределы интегрирования для каждого элемента $\hat{\mathrm{v}}_{il0}$, $l \in \overline{i+1, L}$, $i \in \overline{1, L-1}$ определяются из (15)

$$-\tau_{il} = -2^{\frac{1}{2}} \hat{\theta}_{ii}^{\frac{1}{2}} \sum_{r=i}^{l} k_{1lr} \le \hat{\mathrm{v}}_{il0} \le \le 2^{\frac{1}{2}} \hat{\theta}_{ii}^{\frac{1}{2}} \sum_{r=i}^{l} k_{1lr} = \tau_{il}, \quad (18)$$

где $\hat{h}_{lr}^*$ — элемент матрицы $\hat{\mathbf{H}}_0^*$, находящийся на пересечении строки с номером «l» и столбца с номером «r». Поскольку $\hat{\mathbf{H}}_0^*$ — верхняя треугольная матрица, $\forall \hat{h}_{ir} = 0, \forall r \in \overline{1, L-1}$.

Окончательный вариант (14) с учетом (15)–(18) имеет вид

$$p(\hat{\mathbf{\Theta}}_\eta) = c_3 2^{-\frac{L(L-1)}{4}} \prod_{i=1}^{L} \hat{\theta}_{ii}^{-\frac{L-i}{2}} \exp\left\{ -\hat{\theta}_{ii} k_{\xi ii} \right\} \prod_{l=i+1}^{L} \upsilon_{il} \times \times \int_{-\tau_{il}}^{\tau_{il}} \exp\left\{ -\left| \hat{\mathrm{v}}_{il0} \right|^2 2^{-1} \right\} \mathrm{d}\hat{\mathrm{v}}_{il0} = c_3 2^{-\frac{L(L-1)}{4}} \prod_{i=1}^{L} \hat{\theta}_{ii}^{-\frac{L-i}{2}} \times \times \exp\left\{ -\hat{\theta}_{ii} k_{\xi ii} \right\} \prod_{l=i+1}^{L} \upsilon_{il} (\pi/\pi)^{\frac{L(L-1)}{4}} \times \times \int_{-\tau_{il}}^{\tau_{il}} \exp\left\{ -\left| \hat{\mathrm{v}}_{il0} \right|^2 2^{-1} \right\} \mathrm{d}\hat{\mathrm{v}}_{il0} = = c_3 \pi^{\frac{L(L-1)}{4}} \prod_{i=1}^{L} \hat{\theta}_{ii}^{-\frac{L-i}{2}} z_i(\tau_i) \exp\left\{ -\hat{\theta}_{ii} k_{\xi ii} \right\}, \quad (19)$$

где $c_3 = c_1 c_2$; $z_i(\tau_i) = \prod_{l=i+1}^{L} \upsilon_{il} \operatorname{erf}\left(\tau_{il} / \sqrt{2} \right)$,

$$\operatorname{erf}\left(\tau_{il}/\sqrt{2}\right)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-\tau_{il}}^{\tau_{il}}\exp\left\{-\left|\hat{v}_{il0}\right|^2 2^{-1}\right\}d\hat{v}_{il0}$$

— интеграл вероятностей.

Таким образом, плотность распределения (16) определяется формулой

$$p(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta)=$$
$$=c_1\frac{2^L\prod\limits_{\varsigma=1}^{L}\hat{\theta}_{\varsigma\varsigma}^{p-\frac{3L}{2}+\frac{\varsigma}{2}}z_\varsigma(\tau_\varsigma)\prod\limits_{i=1}^{L-1}\prod\limits_{l=i+1}^{L}(\hat{\theta}_{ii}-\hat{\theta}_{ll})^2}{\pi^{\frac{L(L-1)}{4}}\Gamma(p)\ldots\Gamma(p-L+1)\left|\boldsymbol{\Theta}_\eta\right|^p}\times$$
$$\times\exp\left\{-\hat{\theta}_{\varsigma\varsigma}k_{\xi\varsigma\varsigma}\right\}. \qquad (20)$$

Область интегрирования конечна, так как $\forall\hat{\theta}_{ii}\in\hat{K}_\xi$ различны с вероятностью 1 и упорядочены по величине $\hat{\theta}_{11}>\hat{\theta}_{22}>\ldots>\hat{\theta}_{LL}$, так что $\alpha_i<\hat{\theta}_{ii}\le\beta_{ii}$, $\forall i\in\overline{1,L}$. Как следствие, $\forall\left(\alpha_i,\beta_i\right]$ не перекрываются, т. е. $\forall\left(\alpha_i,\beta_i\right]\bigcap\left(\alpha_l,\beta_l\right]=\varnothing$. С другой стороны, $\mathrm{tr}\hat{\mathbf{K}}_\xi=\mathrm{tr}\hat{\boldsymbol{\Lambda}}\ge\hat{\theta}_{11}$. Вычисление интеграла в (9) при больших p и L представляет весьма сложную задачу.

Обращаясь к (20), замечаем, что $\forall\hat{\theta}_{ii}$ являются зависимыми случайными величинами, так как $p(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta)$ не может быть представлена в виде произведения ПРВ $p(\hat{\theta}_{ii})$, $i\in\overline{1,L}$. Зависимость $p(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_\eta)$ от матрицы $\hat{\mathbf{K}}_\xi$ заключается в коэффициентах $\upsilon_{\varsigma n}$.

Заключение

В результате анализа адаптивных алгоритмов (2)–(5), реализующих процедуру ортогонализации Грама—Шмидта, впервые получены выражение (8) для совместной плотности распределения выборочных значений весовых коэффициентов и дисперсий выходных напряжений, формируемых на выходах фильтров-ортогонализаторов, а также формула (20) для совместной плотности распределения выборочных дисперсий выходных напряжений, формируемых на выходах фильтров-ортогонализаторов. Последняя отличается от известной многомерной плотности распределения выборочной ковариационной матрицы Уишарта (7). На основании (20) можно утверждать, что оценки дисперсий выходных напряжений адаптивных фильтров-ортогонализаторов являются зависимыми случайными величинами.

Скорость сходимости предложенных алгоритмов такая же, как у всех известных адаптивных алгоритмов, реализуемых методом прямых вычислений [2, 3].

Литература

1. **Лексаченко В. А., Шаталов А. А.** Синтез многомерного выбеливающего фильтра по методу Грама—Шмидта // Радиотехника и электроника. 1976. Т. 21. № 1. С. 112–119.
2. **Давыдов В. С., Лукошкин А. П., Шаталов А. А., Ястребков А. Б.** Радиолокация сложных целей. Разрешение и распознавание. — СПб.: Янис, 1993. — 280 с.
3. **Haykin S.** Adaptive Filter Theory. 4th edition. — Prentice Hall, 2002. — 936 p.
4. **Шаталов А. А., Ястребков А. Б., Селезнев Б. Н.** Быстродействующие алгоритмы адаптации многомерных адаптивных выбеливающих фильтров // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 1. С. 36–42.
5. **Шаталов А. А., Авдеев А. Г.** Многомерные адаптивные предпроцессоры и их статистические характеристики // Радиотехника. 2004. № 11. С. 12–19.