

УДК 681.314

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ АЛГОРИТМЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ АНАЛОГО-ЦИФРОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ¹

Часть 3: Нейроподобные и другие варианты алгоритмов

Э. П. Тихонов,

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Предложено аналитическое описание различных модификаций алгоритмов аналого-цифровых преобразователей, включая мажоритарный и нейроподобный принцип обработки информации, на базе которых выполнен сравнительный анализ их свойств, доведенных до численных результатов, и разработана классификационная схема аналого-цифровых преобразователей.

Ключевые слова — аналого-цифровой преобразователь, функция активации, квант, помеха, погрешность, нейронный алгоритм, измерение.

Алгоритмы (10) (см. ч. 2) используют индикаторную и знаковую функции сравнения входного сигнала с уравнивающей величиной. Возникают вопросы: можно ли применять другие виды функции сравнения, например такие, которые используются в нейронных сетях со специфическим названием «функции активации» [8], и сохранится ли при этом основное предназначение алгоритма для преобразования аналоговой величины в цифровой код, а если сохранится, то в каком виде? Уместен также вопрос о возникновении подобной ситуации в реальных АЦП.

Для поиска ответов на поставленные вопросы необходимо кратко ознакомиться с основными свойствами функций активации. Функции активации должны обладать монотонностью и дифференцируемостью в области определения, соответствующей интервалу (1, -1) либо (0, 1), — общими свойствами, присущими этим функциям.

По аналогии с биологическими нейронами наибольшее распространение в известных математических моделях нейронов получили следующие виды функции активации [8, 11]:

— экспоненциальные функции $\psi_s\{\gamma\} = \exp(-\gamma\alpha)$, $\alpha = \text{const}$;

— функция гиперболического тангенса $\psi_s\{\gamma\} = (\exp(\alpha\gamma) - \exp(-\alpha\gamma)) / (\exp(\alpha\gamma) + \exp(-\alpha\gamma))$;

— сигмоидные функции вида $\psi_s\{\gamma\} = (1 - \exp \times (-\alpha\gamma)) / (1 + \exp(-\alpha\gamma))$, в том числе используемые

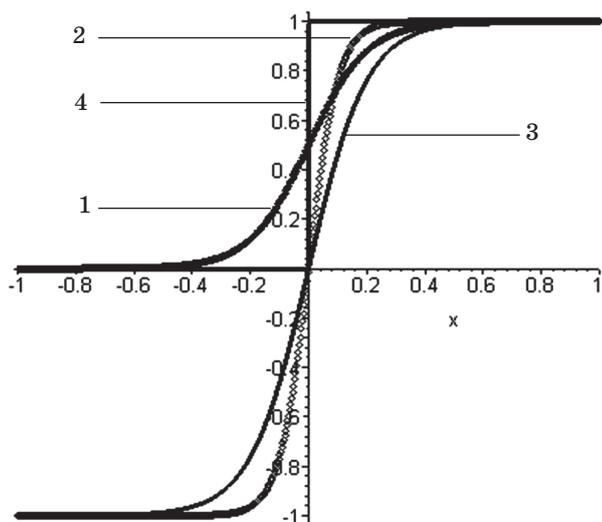
для описания идеальной функции сравнения — знаковые функции;

— несимметричные относительно нуля сигмоидные функции вида $\psi_h\{\gamma\} = 1 / (1 + \exp(-\alpha\gamma))$;

— для описания идеальной функции сравнения — индикаторные функции.

Переменная γ определяется разностью между уравнивающей величиной и входным сигналом, а параметр α характеризует степень «крутизны» функции активации. Чем больше значение параметра α , тем выше крутизна функции активации (рис. 12). Из анализа формул, описывающих функции активации, следует, что с увеличением параметра α соответствующие функции активации стремятся к знаковой или индикаторной функции. Идеальная реализация этих функций сравнения электронными техническими средствами в виде знаковой или индикаторной функции, какими бы они хорошими частотными характеристиками не обладали, практически невозможна. Именно поэтому в силу инерционности реальных сравнивающих устройств в них реализуются функции сравнения в той или иной степени близости к указанным функциям активации. При этом единица приписывается положительному, а ноль — отрицательному или нулевому значению функции сравнения. С этой точки зрения все рассмотренные выше алгоритмы аналого-цифрового преобразования с идеальными функциями сравнения (индикаторной или знаковой) являются предельным случаем алго-

¹ Окончание. Начало в № 1 и 2, 2009 г.



■ Рис. 12. Графики функций активации: 1 — сигмоидной; 2 — гиперболического тангенса; 3 — симметричной; 4 — индикаторной

ритмов аналого-цифрового преобразования с соответствующей функцией активации. Следует также иметь в виду степень влияния на результаты сравнения инерционности ключей, через которые подключаются в зависимости от веса разряда значения образцовой уравнивающей величины [12].

Для того чтобы установить связь между алгоритмами, имеющими разные виды функции сравнения, рассмотрим сначала алгоритм поразрядного уравнивания с функцией активации вида $\psi_h\{\gamma\}$, или кратко индикаторные нейронные алгоритмы

$$E[(n + 1)\Delta t] = E(n\Delta t) + E_0 2^{-n} \psi_h \times [x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}], n = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Представим функцию активации $\psi_h[\dots]$, описывающую операцию сравнения, в следующем эквивалентном виде:

$$\psi_h[x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}] = \psi_h[x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}] h\{\psi_h[x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}]\}.$$

Тогда исходный алгоритм (11) можно переписать в форме

$$E[(n + 1)\Delta t] = E(n\Delta t) + E_0 \psi_h \times [x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}] 2^{-n} h\{\psi_h[x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}]\}, n = 1, \dots, N$$

или

$$E[(n + 1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \Delta q \psi_h [x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}] 2^{N-n} h\{\psi_h[x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}]\}, n = 1, \dots, N.$$

Сравнение полученного выражения с исходным индикаторным алгоритмом поразрядного уравнивания показывает, что алгоритм (11) несколько меняет свои свойства, так как в зависимости от разности $\gamma_h(n\Delta t) = [x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}]$ нелинейно меняется величина кванта Δq перед индикаторной функцией, причем изменение происходит от максимального значения Δq до нуля (см. рис. 12).

Для знакового алгоритма поразрядного уравнивания с функцией активации вида $\psi_s[x - E(n\Delta t)] = \gamma_s(n\Delta t)$, или кратко знакового нейронного алгоритма, имеем

$$E[(n + 1)\Delta t] = E(n\Delta t) + E_0 2^{-n} \psi_s [x - E(n\Delta t)], n = 1, \dots, N$$

или

$$E[(n + 1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \Delta q(n) 2^{N-n} \text{sign} \times \{\psi_s [x - E(n\Delta t)]\}, n = 1, \dots, N, \quad (12)$$

где величина кванта меняется в соответствии с равенством

$$\Delta q(n) = \Delta q |\gamma_s(n\Delta t)|.$$

При этом возникает вопрос: как влияет это изменение кванта на результат преобразования? С учетом описанных выше свойств функции активации анализ алгоритмов (11) и (12) показывает, что входной сигнал x можно выразить через кодовый эквивалент результата преобразования для функции активации $\psi_h[x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}]$:

$$x = \sum_{n=1}^N \Delta q(n) a_n 2^{N-n} + \gamma_h, \quad (13)$$

а для функции активации $\psi_s[[\gamma(n\Delta t) - E(n\Delta t)]]$ — в виде

$$x = 0,5 \left[1 - \sum_{n=1}^N \Delta q(n) a_n 2^{N-n} + \gamma_s \right], \quad (14)$$

где

$$\Delta q(n) = \begin{cases} \Delta q & \text{при } \phi_n(\theta) = 1 \\ \Delta q |\phi_n(\gamma)| & \text{при } \phi_n(\theta) < 1 \end{cases}$$

здесь

$$\phi_n(\gamma) = \begin{cases} \psi_h [x - E(n\Delta t) - E_0 2^{-n}] \\ \psi_s [x - E(n\Delta t)] \end{cases}$$

— величина кванта для индикаторной и знаковой функций активации; γ_h и γ_s — погрешности усечения соответственно для индикаторного и знакового нейронных алгоритмов (погрешность преобразования).

Таким образом, в отличие от индикаторных и знаковых алгоритмов поразрядного уравнивания, в которых результатом преобразования является двоичный код с постоянным значением кванта Δq , для алгоритмов (11) и (12) получаем результат преобразования с дробным значением кванта, зависящим от номера разряда. Величина кванта совместно с общим числом разрядов определяет диапазон преобразования и выполняет функцию масштабирования [13] относительно единичного диапазона преобразования. В рассматриваемом случае изменяющийся квант приводит к изменению масштаба от разряда к разряду, что и определяет механизм возникновения известных дифференциальной и интегральной нелинейностей в градуировочных характеристиках реальных АЦП. В этом случае для получения результата измерения входной величины необходимо запоминать для каждого разряда его значение кванта, или, что то же самое, значение масштаба. Если предположить, что эту операцию удастся выполнить, то вместо единицы на определенных двоичных разрядах придется запоминать при необходимости совсем другие числа, меньшие единицы.

Отличие алгоритмов (10) и (11) от обычных алгоритмов поразрядного уравнивания хорошо заметно при сравнении графиков, описывающих динамику их работы в виде фрактальных структур при входном сигнале, случайно изменяющемся с равномерным законом распределения вероятностей (рис. 13, а–в).

Из анализа этих графиков следует, что при одинаковом числе разрядов уравнивания, отложенном на осях абсцисс, и независимо от отличия фрактальных структур для алгоритмов поразрядного уравнивания с различными функциями сравнения, конечные результаты для одного и того же значения входного сигнала совпадают с допустимой погрешностью. Оценка погрешности совпадения результатов сходимости требует отдельного анализа, для чего вычтем справа и слева значения сигнала и его эквивалентное представление при аналого-цифровом преобразовании обычными индикаторным и знаковым алгоритмами. В результате получим

$$0 = \Delta q \sum_{n=1}^N a_n 2^{N-n} + \gamma - \sum_{n=1}^N \Delta q(n) a_n^* 2^{N-n} - \gamma_h$$

и

$$0 = 0,5 \left[\left[1 - \Delta q \sum_{n=1}^N a_n 2^{N-n} - \gamma \right] - \left[1 - \sum_{n=1}^N \Delta q(n) a_n^* 2^{N-n} - \gamma_s \right] \right]$$

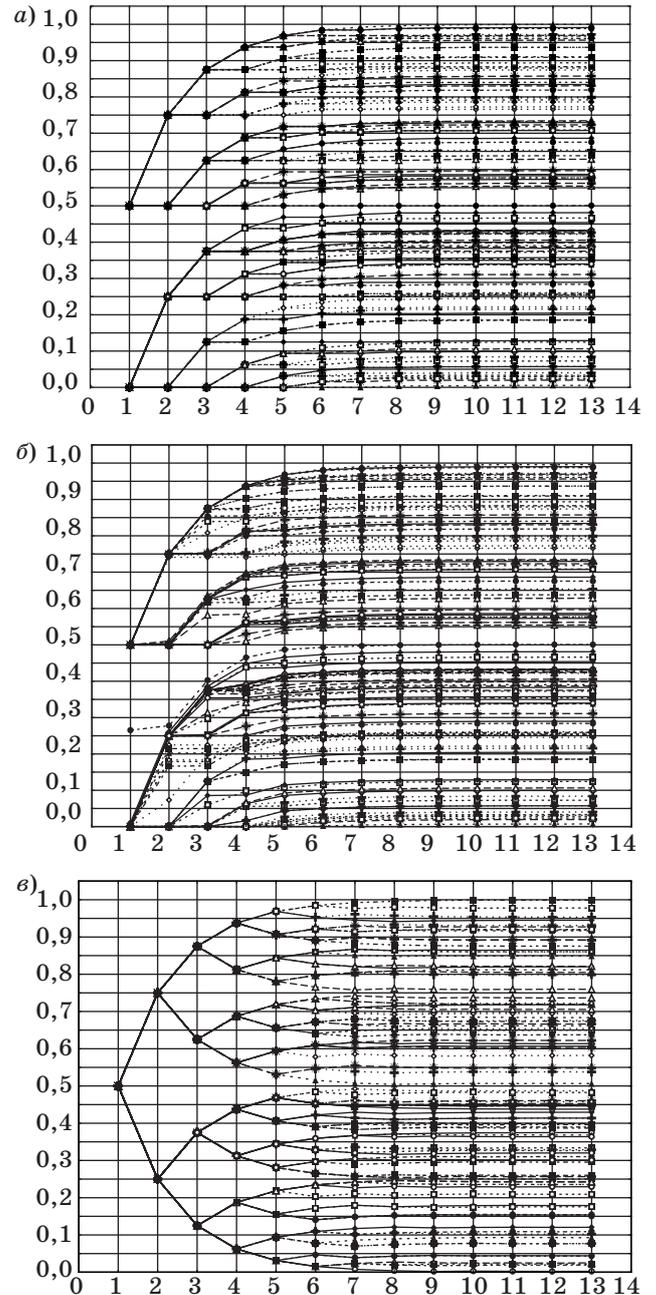


Рис. 13. Графики, характеризующие работу алгоритмов поразрядного уравнивания: а — индикаторного (в виде фрактальной структуры); б — с функцией активации $\psi\{\gamma\} = 1 / (1 + \exp(-\alpha\gamma))$ (в виде фрактальной структуры); в — знакового (в виде древовидной фрактальной структуры)

Поскольку $\Delta q(n) \leq \Delta q$, положим $\Delta q(n) = \alpha(n)\Delta q$, где $\alpha(n) \leq 1$, тогда для индикаторной функции сравнения получаем

$$\gamma_h - \gamma = \Delta q \sum_{n=1}^N [a_n - \alpha(n)a_n^*] 2^{N-n}$$

■ Таблица 1

Вид алгоритма АЦП	Помеха отсутствует			Помеха Normal (ξ), $\xi = 0,01$		
	Параметр α	МО	СКО	Параметр α	МО	СКО
Индикаторный	–	$-5,8E-05$	$3,57E-05$	–	$-0,00051$	0,006803
Нейронный	100	$-0,00013$	0,000948	100	$5,29E-05$	0,00458
Индикаторный	–	$-6,1E-05$	$3,61E-05$	–	0,000268	0,006815
Нейронный	200	$-7,1E-05$	0,000394	200	$-0,00016$	0,004951
Индикаторный	–	$-6,2E-05$	$3,48E-05$	–	$-0,00027$	0,007071
Нейронный	400	$-6,1E-05$	0,000114	400	$-0,00011$	0,005341
Индикаторный	–	$-6,1E-05$	$3,53E-05$	–	$-0,0002$	0,00675
Нейронный	500	$-5,9E-05$	$8,38E-05$	500	0,000482	0,005758
Индикаторный	–	$-6E-05$	$3,45E-05$	–	$5,8E-06$	0,006674
Нейронный	600	$-6,2E-05$	$2,2E-05$	600	$9,11E-06$	0,005842
Индикаторный	–	$-6E-05$	$3,53E-05$	–	$-0,00027$	0,007071
Нейронный	700	$-6E-05$	$6,27E-05$	700	$-0,00015$	0,005731
Индикаторный	–	$-6,2E-05$,0000328	–	,0000283	,0063382
Нейронный	1000	$-6,1E-05$,0000350	1000	$-0,000263$,0067700

Значения коэффициентов a_n и a_n^* равны либо 0, либо 1, поэтому при одинаковых значениях этих коэффициентов разность $\gamma_h - \gamma > 0$. В остальных вариантах, как можно предположить, будут превалировать случаи, когда разность $a_n - \alpha(n)a_n^* < 0$, что подтверждается нижеприведенными результатами моделирования. Таким образом, в отсутствие помех нейронные алгоритмы существенно хуже по сравнению с обычными алгоритмами аналого-цифрового преобразования, так как в этом случае выполняются условия оптимальности дихотомического алгоритма поиска постоянной величины на ограниченном отрезке числовой оси. Иная картина должна наблюдаться при воздействии помехи.

Прежде чем продолжить некоторые теоретические выводы по оценке и интерпретации ре-

зультатов сходимости исследуемых алгоритмов, рассмотрим итоги их имитационного моделирования в отсутствие и при воздействии аддитивной помехи для анализируемых функций сравнения и различных значений параметра α установивших функций активации. В качестве входного постоянного сигнала, изменяющегося случайно от преобразования к преобразованию, использовались случайные числа с равномерным законом распределения вероятностей в диапазоне [0, 1], а для непрерывно изменяющегося сигнала — гармонический сигнал с единичной амплитудой. Значения математического ожидания (МО) и СКО погрешности результатов преобразования *индикаторным* и *нейронным индикаторным* (табл. 1), а также *знаковым* и *нейронным знаковым* (табл. 2) 14-разрядными алгоритмами преобразования

■ Таблица 2

Вид алгоритма АЦП	Помеха отсутствует			Помеха Normal (ξ), $\xi = 0,01$		
	Параметр α	МО	СКО	Параметр α	МО	СКО
Знаковый	–	$-1,8E-06$	$7,06E-05$	–	$-8E-05$	0,00697
Нейронный	100	$-0,0001$	0,000751	100	$-0,00017$	0,004726
Знаковый	–	$-3,1E-06$	$7,05E-05$	–	0,000186	0,007078
Нейронный	200	$-2,1E-05$	0,000264	200	$4,28E-05$	0,005084
Знаковый	–	$-3,2E-06$	$7,05E-05$	–	$-0,00042$	0,00704
Нейронный	400	$-3E-06$	0,00011	400	$-0,00013$	0,005485
Знаковый	–	$3,48E-06$	$7,18E-05$	–	$-0,00015$	0,007249
Нейронный	500	$-3,9E-06$	$6,71E-05$	500	$-0,00021$	0,005954
Знаковый	–	$-2,4E-06$	$6,91E-05$	–	0,000423	0,007267
Нейронный	600	$-1,9E-06$	$4,15E-05$	600	0,000318	0,006066
Знаковый	–	$-2,9E-06$	$7,2E-05$	–	$-0,00051$	0,007055
Нейронный	700	$-1,7E-06$	$4,31E-05$	700	$-0,00034$	0,005947
Знаковый	–	,000003	,0000710	–	,0004444	,0071644
Нейронный	1000	$-0,00002$,0000307	1000	,0003914	,0063740

при случайно изменяющемся с равномерным законом распределения вероятностей входном сигнале приведены для объемов выборки $N = 500$ и 1000 соответственно. Функция сравнения индикаторного нейронного алгоритма: для табл. 1 $\phi_h\{\gamma\} = 1 / (1 + \exp(-\alpha\gamma))$; для табл. 2 $\phi_s\{\gamma\} = (1 - \exp(-\alpha\gamma)) / (1 + \exp(-\alpha\gamma))$.

Анализ полученных результатов (см. табл. 1) позволяет в пределах статистической погрешности сделать следующие выводы.

1. В отсутствие помехи для постоянного сигнала:

- при определенных, меньших значениях параметра α характеристики погрешности (МО и СКО) для нейронного индикаторного алгоритма хуже, чем для обычного индикаторного алгоритма;

- с ростом параметра α , как следовало ожидать, характеристики погрешности обоих алгоритмов уравниваются.

2. При воздействии аддитивной гауссовой помехи:

- при определенных, меньших значениях параметра α характеристики погрешности для нейронного алгоритма лучше аналогичных характеристик обычного индикаторного алгоритма: по СКО — в 1,4 раза, а по среднему значению — в 9,6 раз;

- с ростом параметра α характеристики погрешности обоих алгоритмов несколько уравниваются, но преимущество для нейронного алгоритма сохраняется.

Анализ изменения основных характеристик погрешности преобразования для знаковой функции сравнения (см. табл. 2) в зависимости от изменения числа разрядов при фиксированном значении α показывает следующее.

1. В отсутствие помехи:

- при определенных меньших значениях параметра α среднее значение и СКО погрешности преобразования для нейронного алгоритма значительно хуже соответствующих значений характеристик погрешности, полученных для обычного знакового алгоритма;

- с ростом значения параметра α , влияющего на увеличение крутизны функции активации, при фиксированном числе разрядов характеристики погрешности у нейронного алгоритма ста-

новятся несколько лучше обычного знакового алгоритма.

2. При воздействии аддитивной гауссовой помехи соотношения между характеристиками погрешности сохраняются примерно такими же, как и для индикаторного алгоритма. При меньших значениях параметра α (за исключением первой позиции, для которой значение параметра слишком мало) нейронный знаковый алгоритм более помехоустойчив, однако по мере приближения функции активации (с ростом параметра α) к идеальной знаковой функции указанные характеристики погрешности уравниваются.

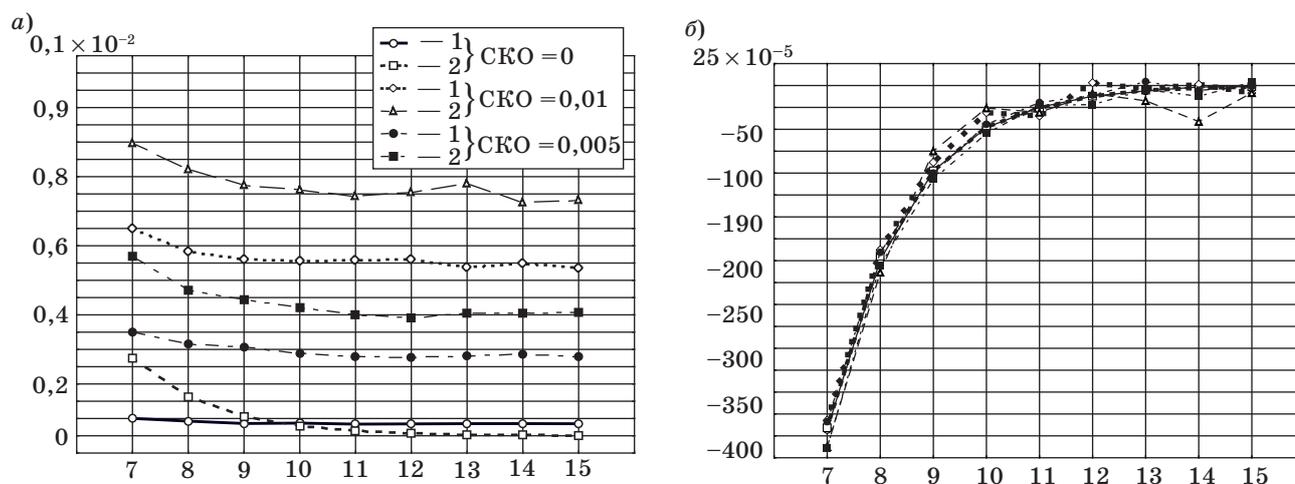
При преобразовании гармонического входного сигнала при фиксированной амплитуде и частоте характеристики погрешности преобразования имеют значения (табл. 3, столбец 1), существенно отличающиеся от аналогичных характеристик погрешностей при случайно изменяющейся амплитуде во всем диапазоне преобразования $[0, 1]$ и фиксированной частоте гармонического сигнала (табл. 3, столбец 2).

Для обоих нейронных алгоритмов установлено значение параметра $\alpha = 400$. Полученные результаты показывают, что при преобразовании непрерывно изменяющегося во времени входного сигнала, как и следовало ожидать, знаковые алгоритмы обладают лучшими следящими свойствами по сравнению с индикаторными алгоритмами.

Из анализа графиков (рис. 14, а, б) с учетом значений характеристик погрешностей следует, что наилучшим алгоритмом является нейронный знаковый алгоритм, который при заданных значениях параметра α и соответствующем числе разрядов имеет определенный выигрыш. Этот выигрыш, соответствующий помехоустойчивости алгоритма, можно оценить при фиксированных параметрах алгоритмов отношением соответствующих СКО погрешностей. Он находится в зависимости от алгоритма в пределах от 13 до 37 %, причем с уменьшением параметра α увеличивается незначительно (для $\alpha = 200$ имеем 14 и 39 % соответственно, тогда как для $\alpha = 800$ — 7 и 30 %). Отметим, что при воздействии гауссовой аддитивной помехи на входной сигнал указанная помехоустойчивость увеличивается и зависит от

■ Таблица 3

Алгоритм преобразования	Среднее значение		Среднеквадратическое отклонение	
	1	2	1	2
Нейронный знаковый	0	0,000056	0,02082	0,028639
Знаковый	0	-0,000172	0,02345	0,037050
Нейронный индикаторный	0,000244	-0,000014	0,02602	0,030773
Индикаторный	0,000244	-0,000023	0,02855	0,035069



■ Рис. 14. Изменение СКО (а) и средних значений (б) погрешности преобразования для индикаторного нейронного «1» (при $\alpha = 700$) и индикаторного «2» алгоритмов аналого-цифрового преобразования в отсутствие и при воздействии гауссовой аддитивной помехи в зависимости от изменения числа разрядов преобразования

уровня воздействия помехи. Если помеха по уровню превышает погрешность квантования примерно в 10 раз, то при $\alpha = 400$ помехоустойчивость составляет 18 и 36 % соответственно, причем с уменьшением уровня помех она понижается и в пределе достигает уровня, получаемого в отсутствие помехи.

Являются ли приведенные в статье результаты анализа посредством имитационного моделирования неожиданными с теоретической точки зрения? Прямой ответ на этот вопрос по итогам изучения существующей литературы не найти ввиду отсутствия рассмотрения в ней самих анализируемых алгоритмов. Однако достигнутые в последние десятилетия математиками результаты в области математической статистики, в частности в направлении исследования так называемой робастности в статистике [14] и в соответствующих приложениях [11], позволяют получить определенную, достаточно полную теоретическую интерпретацию численных результатов имитационного моделирования. Действительно, в работе [1] было показано, что алгоритмы аналого-цифрового преобразования минимизируют функцию качества, описывающую степень отклонения двоичного эквивалента входного сигнала от его точного значения. Причем в виде функции качества используется равномерная мера приближения входного сигнала к результату преобразования. При воздействии помехи выбранную функцию качества можно рассматривать как критерий приближения искомой оценки, т. е. двоичного кода сигнала, к истинному значению сигнала в условиях воздействия помехи в статистическом смысле [11]. Развитый в ра-

ботах по робастности в статистике подход [14] устанавливает, что любая оценка, минимизирующая указанный критерий, относится к так называемым М-оценкам. Для этих оценок в зависимости от вида плотности распределения вероятностей помехи существует такой критерий качества, для которого сходимость оценки (в нашем случае в виде двоичного кода) к действительному значению входного сигнала будет наилучшей. Теоретически оптимальная сходимость для М-оценок доказана в асимптотическом случае, т. е. когда число тактов преобразования стремится к бесконечности. Однако для практически применяемых оценок, ввиду монотонности убывания дисперсии оценки с ростом объема выборки, такое преимущество сохраняется для конечного объема выборки или для конечного числа тактов преобразования. В этих условиях знаковый и, следовательно, индикаторный алгоритмы при воздействии помехи на сигнал теряют свою оптимальность, тогда как функции активации оказываются близкими по виду к оптимальным критериям для М-оценок. При этом следует учесть, что в алгоритмах аналого-цифрового преобразования помимо гауссовой помехи имеется также случайная составляющая погрешности округления с равномерным законом распределения. В связи с этим оптимальный вид функции активации будет зависеть также от числа разрядов и определяться плотностью распределения вероятностей, равной суперпозиции плотности распределения вероятностей помехи с равномерной плотностью распределения вероятностей погрешности усечения. По мере увеличения числа разрядов при фиксированной мощности помехи плотность рас-

пределения вероятностей суммарной помехи будет сходиться к гауссовой плотности, а функции активации, рассмотренные выше, будут становиться оптимальными. Как отмечалось в ч. 2 статьи, в алгоритмах с нейронными функциями активации можно реализовать и мажоритарную обработку входного сигнала как по пространству, так и по времени.

При анализе алгоритмов до сих пор предусматривалось, что входной сигнал либо постоянный, либо его изменение во времени было незначительным по сравнению с временным тактом уравнивания Δt . Интересно проанализировать общий вариант, когда входной сигнал описывается моделью случайного стационарного процесса. Рассмотрим его применительно к следящему алгоритму со знаковой функцией сравнения. Для такого входного сигнала на результаты преобразования и сходимость алгоритма оказывает влияние соотношение между временным тактом уравнивания Δt и некоторой характеристикой случайного процесса, определяющей его динамические свойства. В качестве такой характеристики могут быть использованы либо интервал корреляции τ_k [15], либо верхняя граничная частота среза $\omega_{гп}$, либо ширина энергетического спектра сигнала $\Delta\omega$. Рассмотрим простейший предельный случай, когда $\Delta t \geq \tau_k$. Проанализируем условия сходимости в среднем следящего алгоритма

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \Delta q \text{sign}[\xi(n\Delta t) - E(n\Delta t)], \quad (15)$$

где $\Delta t \geq \tau_k$; $\xi(t)$ — значения реализации входного стационарного эргодического процесса при $t = \Delta t n$.

Усредним правую и левую части алгоритма (15), тогда, с учетом неравенства $\Delta t \geq \tau_k$, получим

$$\bar{E}[(n+1)\Delta t] = \bar{E}(n\Delta t) + \Delta q \{1 - 2P[\bar{E}(n\Delta t)]\}, \quad (16)$$

где $P[\dots]$ — вероятность того, что знаковая функция принимает значение, равное -1 .

Для уравнения (16) сходимость при $n \rightarrow \infty$ достигается при равенстве

$$P[\bar{E}(n\Delta t)] = 0,5,$$

и

$$\bar{E}(n\Delta t) = P^{-1}[0,5],$$

т. е. для случая, когда уравнивающая величина равна медиане плотности распределения вероятностей, описывающей входной сигнал. Следовательно, для установленных условий выбора

Δt обеспечивается устойчивая сходимость алгоритма к медиане. Возникает вопрос, можно ли для указанных ограничений на величину Δt обеспечить сходимость не к медиане, а к некоторому заданному значению квантили распределения вероятности ξ . Оказывается, можно, если построить следящий алгоритм следующим образом:

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \Delta q \text{sign}[\xi(n\Delta t) - E(n\Delta t) + |\beta|],$$

где $|\beta| < 1$ — заданная величина:

$$\bar{E}(n\Delta t) = P^{-1}[0,5] - |\beta|.$$

Более того, если в алгоритм (15) ввести некоторую образцовую случайную величину η с заданной функцией распределения вероятностей, то в результате получаем алгоритм для измерения функции распределения вероятностей при $\beta = \Delta\beta_j$, где $j = 1, 2, \dots, m$, в виде

$$E[(n+1)\Delta t] = E(n\Delta t) + \Delta q \{ \text{sign}[\xi(n\Delta t) - E(n\Delta t)] - \text{sign}[\eta(n\Delta t) - \beta] \},$$

где $\eta(n\Delta t)$ — образцовая случайная величина с известной функцией распределения вероятностей. Этот алгоритм был предложен [16] и исследован [17]. Он нашел практические приложения для решения достаточно важных задач как в промышленности [18], так и в других областях [19, 20], в частности при радиоизотопных измерениях.

В качестве уравнивающей можно выбрать любую физическую величину для преобразования ее в цифровой код. Представляет интерес, например, алгоритм вида

$$\begin{aligned} \tau[(n+1)\Delta t] &= \tau(n\Delta t) - \Delta\tau \{ \text{sign}[\xi(n\Delta t) + \alpha] - \\ &- \text{sign}[\xi(n\Delta t) - \alpha] - \text{sign}[\xi(n\Delta t) + \tau(n\Delta t)] + \beta \} + \\ &+ \text{sign}[\xi(n\Delta t) + \tau(n\Delta t)] - \beta \}, \end{aligned}$$

где $\xi(n\Delta t)$ и $\xi[(n\Delta t) + \tau(n\Delta t)]$ — коррелированные или статистически зависимые временные сечения стационарного (квазистационарного) или нестационарного с достаточно медленно меняющейся функцией распределения вероятности преобразуемого случайного процесса на n -м временном такте уравнивания; $\tau[(n+1)\Delta t]$ и $\tau(n\Delta t)$ — временные задержки между временными сечениями рассматриваемого случайного процесса на $(n+1)$ -м и n -м временных тактах уравнивания, причем $\tau_{\min} \leq \tau(n\Delta t) \leq \tau_{\max}$; $0 < \beta < \alpha < 1$ — заданные постоянные величины.

Для исследования сходимости рассматриваемого алгоритма по первому начальному моменту, т. е. сходимости в среднем, применим к правой и левой частям алгоритма оператор математического ожидания по случайной двумерной величине $\xi(n\Delta t)$ и $\xi[(n\Delta t) + \tau(n\Delta t)]$. В результате перейдем к рассмотрению алгоритма вида

$$\begin{aligned} \bar{\tau}[(n+1)\Delta t] = \\ = \bar{\tau}(n\Delta t) - \Delta\tau[P_{\xi_1}(\alpha) + P_{\xi_2}(\alpha) - P_{\xi_1\tau}(\beta) - P_{\xi_2\tau}(\beta)] \end{aligned}$$

или для симметричных функций распределения вероятности случайного процесса, например гауссовых:

$$\bar{\tau}[(n+1)\Delta t] = \bar{\tau}(n\Delta t) - 2\Delta\tau[P_{\xi}(\alpha) - P_{\xi\tau}(\beta)],$$

где

$$P_{\xi}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} w[\xi(n\Delta t)] d\xi(n\Delta t)$$

и

$$P_{\xi}(\beta) = M_{\xi(n\Delta t)} \times \left\{ \int_{-\infty}^{\beta} w \left[\frac{\xi[n\Delta t + \tau(n\Delta t)]}{\xi(n\Delta t)} \right] d\xi[n\Delta t + \tau(n\Delta t)] \right\},$$

где $w[\xi(n\Delta t)]$ и $w[\xi[(n\Delta t) + \tau(n\Delta t)] / \xi(n\Delta t)]$ — соответственно безусловная и условная плотности распределения вероятностей в указанных временных сечениях случайного процесса; $M_{\xi(n\Delta t)}$ — оператор усреднения по случайной величине $\xi(n\Delta t)$.

Нижний предел интегрирования можно заметить на нижнее значение диапазона изменения случайного процесса, определяемого соответствующим техническим средством — датчиком.

Искомое значение временного сдвига определяется из равенства

$$\tau_0 = r^{-1} \left(\sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha}} \right),$$

где $r^{-1}(\dots)$ — функция, обратная нормированной корреляционной функции; τ_0 — искомая временная задержка между временными сечениями случайного процесса для заданных значений α и β .

Алгоритмы, связанные с измерением временной задержки сечений случайного процесса относительно друг друга, нашли широкое применение для решения некоторых задач в промышленности [21]. Преимущество рассматриваемого алгоритма заключается в простоте его реализации и в совмещении операции измерения с преобразованием в цифровой код. Возможны и другие варианты подобных алгоритмов.

Таким образом, в работе представлены и проанализированы математические модели в виде нелинейных отображений различных модифицированных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Результаты проведенных по данной тематике исследований на математических моделях, включая представленные ранее [см., например, 1, 5, 22], позволяют существенно расширить сферу поиска решения различных прикладных задач на основе использования нелинейных динамических алгоритмов.

Литература

11. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. — М.: Наука. Физматлит, 1995. — 336 с.
12. Островерхов В. В. Динамические погрешности аналого-цифровых преобразователей. — Л.: Энергия, 1975. — 213 с.
13. Цветков Э. И. Основы математической метрологии. — СПб.: Политехника, 2005. — 510 с.
14. Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 512 с.
15. Мирский Г. Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения. — М.: Энергоиздат, 1982. — 320 с.
16. А. с. 235412, Кл. 42m⁴, 7/52, МПК G 06g / Устройство для измерения функции распределения случайных сигналов / Э. П. Тихонов.
17. Тихонов Э. П. Измерения с опорным случайным процессом // Метрология. 1985. № 10. С. 20–29.
18. Тихонов Э. П., Селиванова М. П. Основные принципы, области применения и перспективы развития измерений с опорным случайным процессом // Измерения, контроль, автоматизация. 1990. № 3. С. 3–6.
19. Тихонов Э. П. Алгоритмы обработки сигналов в медицинской диагностике с использованием опорного случайного процесса // Информационно-управляющие системы. 2003. № 4. С. 43–51.
20. А. с. SU 1783304 A1, СССР, МКИ G 01 №47 / Расходомер двухфазных сред / Э. П. Тихонов, М. П. Селиванова.
21. Белоглазов Н. Н., Тарасенко В. П. Корреляционно-экстремальные системы. — М.: Сов. радио, 1974. — 392 с.
22. Тихонов Э. П. Стохастический пространственный аналого-цифровой преобразователь и его связь с нейронными структурами // Информационно-управляющие системы. 2007. № 1. С. 8–18.