

Вычисление аддитивной границы вероятности ошибки декодирования с использованием характеристических функций

А. Н. Трофимов^а, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0003-1233-5222, andrei.trofimov@k36.org
Ф. А. Таубин^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-8781-9531

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: точное значение вероятности ошибки декодирования обычно не удается вычислить, поэтому стандартный подход при получении верхней границы вероятности ошибки декодирования по максимуму правдоподобия базируется на использовании аддитивной границы и границы Чернова и (или) ее модификаций. Для многих ситуаций этот подход не обеспечивает достаточной точности. **Цель:** разработка метода точного вычисления аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования для широкого класса кодов и моделей каналов без памяти. **Методы:** использование характеристических функций логарифма отношения правдоподобия для произвольной пары кодовых слов, решетчатого представления кодов и численного интегрирования. **Результаты:** полученная точная аддитивная граница вероятности ошибочного декодирования основана на сочетании использования характеристических функций и произведения решетчатых диаграмм для рассматриваемого кода, благодаря чему можно получить итоговое выражение в интегральной форме, удобной для численного интегрирования. Важной особенностью предложенной процедуры является то, что она позволяет точно вычислить аддитивную границу с помощью подхода, основанного на использовании передаточных (производящих) функций. При таком подходе метки ветвей в произведении решетчатых диаграмм для рассматриваемого кода заменяются соответствующими характеристическими функциями. Полученное итоговое выражение позволяет с использованием стандартных методов численного интегрирования вычислять значения аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования с требуемой точностью. **Практическая значимость:** по итогам проведенной работы можно заметно улучшить качество оценивания вероятности ошибочного декодирования и тем самым повысить эффективность решений, связанных с применением конкретных схем кодирования для широкого класса каналов связи.

Ключевые слова – декодирование по максимуму правдоподобия, аддитивная граница вероятности ошибки, попарная вероятность ошибки, характеристическая функция, канал с ID-AGN-шумом, канал с аддитивным лапласовым шумом.

Для цитирования: Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Вычисление аддитивной границы вероятности ошибки декодирования с использованием характеристических функций. *Информационно-управляющие системы*, 2021, № 4, с. 71–85. doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85

For citation: Trofimov A. N., Taubin F. A. Evaluation of the union bound for the decoding error probability using characteristic functions. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 4, pp. 71–85 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85

Введение

Широкое использование кодов с исправлением ошибок для хранения, обработки и передачи данных диктует интерес к разработке новых, более точных методов оценки вероятности ошибки, достигаемой при введении помехоустойчивого кодирования. Эффективный метод вычисления вероятности ошибки декодирования может значительно снизить затраты, связанные с анализом и реализацией процедуры кодирования, как за счет рационального выбора параметров схемы кодирования, так и благодаря тому, что не требуется прибегать к компьютерному моделированию.

Поскольку точное значение вероятности ошибки декодирования обычно не удается вычислить, стандартный подход при получении верхней границы вероятности ошибки как для декодирования по максимуму правдоподобия (МП), так и для декодирования по максимуму апостериорной

вероятности (МАН) базируется на использовании аддитивной границы [1, 2]. Хотя эти процедуры декодирования, как правило, являются чрезмерно сложными для длинных кодов, получение подобного рода верхних границ для вероятности ошибки декодирования представляет интерес для коротких и умеренно длинных кодов. При использовании аддитивной границы точная вероятность ошибки декодирования ограничивается суммой попарных вероятностей. Попарная вероятность ошибки представляет собой вероятность такого события для пары кодовых слов, при котором значение правдоподобия (или апостериорная вероятность) для правильного (переданного) кодового слова меньше, чем для неправильного кодового слова. Для канала без памяти и двоичного кода эта вероятность представляет собой вероятность того, что сумма некоторых случайных величин превосходит определенный порог. В ряде ситуаций аддитивная граница позволяет достаточно

точно оценить истинное значение вероятности ошибочного декодирования.

Наряду с аддитивной границей, для оценки вероятности ошибки декодирования могут быть использованы и другие, более точные верхние границы (см., например, обзор [3]), которые обычно подразделяют на две категории (хотя между ними существует весьма тесная связь). К первой категории относятся граница Галлагера — Фано и ее вариации, такие как граница Думана — Салехи (Duman — Salehi bound) и граница Шульмана — Федера (Shulman — Feder bound), а ко второй — так называемые тангенциальные границы (tangential bounds), восходящие к тангенциальной границе Берлекемпа и включающие, в частности, тангенциальную сферическую границу (tangential-sphere bound — TSB) Полтырева, границу Дивсалара (Divsalar bound) и границу Энгдала — Зигангирова (Engdahl — Zigangirov bound) для сверточных кодов. Однако сфера применения указанных границ довольно ограничена, что связано со следующими факторами. Во-первых, улучшенные верхние границы получены, как правило, для простейших моделей канала (в частности, для канала с аддитивным белым гауссовым шумом) и частных вариантов сигнальных созвездий. Во-вторых, для коротких и умеренно длинных кодов (длиной до 100) улучшенные верхние границы практически совпадают с аддитивной границей при вероятности ошибки декодирования порядка 10^{-6} и меньше. Заметный же выигрыш в точности наблюдается для турбокодов (с большой величиной перемежения) и длинных низкоплотностных кодов, имеющих достаточно большую сложность декодирования. И, наконец, вычисление улучшенных верхних границ оказывается существенно более сложным, чем аддитивной границы. Поэтому аддитивная граница остается доминирующим инструментом, особенно в плане прикладных исследований для практически значимых моделей каналов, при анализе помехоустойчивости конкретных кодовых схем на основе коротких и умеренно длинных кодов.

Для произвольных кодов и каналов без памяти вычисление как попарных вероятностей, так и аддитивной границы в целом оказывается весьма сложным, поэтому обычно используется следующий подход. Попарная вероятность вначале оценивается сверху с использованием границы Чернова, позволяющей представить ее в виде произведения ряда сомножителей, а затем с помощью передаточной (производящей) функции кода учитываются и суммируются все возможные попарные вероятности, обеспечивая окончательный результат для аддитивной границы в замкнутой форме. Некоторые результаты по уточнению границы Чернова для ряда моделей каналов без памяти можно найти в работе [4].

Точное вычисление попарных вероятностей в замкнутой форме возможно только для относительно простых моделей каналов без памяти. Среди известных подходов к получению в замкнутой форме выражений для попарных вероятностей [5–9] следует выделить подход, предложенный в работе W. Turin: Union Bound on Viterbi Algorithm Performance, *AT&T Tech. Journal*, 1985, основанный на использовании аппарата характеристических функций. Модификация этого подхода с ориентацией на произвольные модели каналов без памяти и использование компьютерных методов, таких как квадратурные формулы Гаусса — Чебышева и численное интегрирование, оказывается более предпочтительным подходом по сравнению с подходами, основанными на получении аппроксимации аддитивной границы в замкнутой форме.

Также важно, что численное интегрирование, а также квадратурные формулы Гаусса — Чебышева могут применяться для вычисления аддитивной границы, даже если передаточная функция не задана аналитически.

В данной работе предоставлен метод точного вычисления аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования для широкого класса кодов и произвольных моделей каналов без памяти. Предложенный метод включает получение точного выражения для попарной вероятности, используемой при получении аддитивной границы. Получение точного выражения для попарной вероятности достигается благодаря использованию характеристических функций (х.ф.) логарифма отношения правдоподобия для рассматриваемой пары кодовых слов.

Представление аддитивной границы с использованием характеристических функций

Решение при декодировании некоторого кода по МП принимается по правилу $\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} p_{y|\mathbf{x}}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$, где $p_{y|\mathbf{x}}(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ — условная вероятность (для канала с дискретным выходом), или n -мерная условная функция плотности вероятности (ф.п.в.), задающая распределение выходных значений $\mathbf{y} = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ канала с непрерывным выходом; \mathbf{x} — переданное кодовое слово длиной n . Для канала без памяти

$$p_{y|\mathbf{x}}(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{l=1}^n p_{y^{(l)}|x^{(l)}}(y^{(l)} | x^{(l)}), \quad (1)$$

где $p_{y^{(l)}|x^{(l)}}(y | x)$ — одномерная условная вероятность или условная ф.п.в. для канала с дискретным и непрерывным выходом соответственно. Вероятность ошибки при передаче слова \mathbf{x} может быть

ограничена сверху с использованием аддитивного неравенства как

$$P_e(\mathbf{x}) \leq \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}), \quad (2)$$

где

$$P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \Pr[p(\mathbf{y} | \mathbf{x}') > p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) | \mathbf{x}] \quad (3)$$

— вероятность ошибки декодирования для кода из двух слов \mathbf{x} и \mathbf{x}' при условии, что было передано слово \mathbf{x} , а суммирование по \mathbf{x}' здесь и далее понимается как суммирование по словам кода. Вероятность (3) с использованием равенства (1) может быть записана в эквивалентной форме $P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \Pr[Z(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{x}') > 0 | \mathbf{x}]$, где $Z(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{l=1}^n z(y^{(l)} | x^{(l)}, x'^{(l)})$ и

$$z(y | x, x') = \ln \frac{p_{y|x}(y | x')}{p_{y|x}(y | x)}. \quad (4)$$

Вычисление аддитивной границы для вероятности ошибки декодирования p_e базируется на использовании следующего результата [10]:

«Утверждение. Пусть Z — вещественная случайная величина и $w_Z(\cdot)$ — ее ф.п.в. Пусть $C(\omega)$ — х.ф. случайной величины Z , т. е.

$$C_Z(\omega) = \overline{e^{j\omega Z}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega Z} w_Z(x) dx, \quad (5)$$

черта сверху здесь и далее обозначает усреднение. Тогда

$$\Pr[Z > 0] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{C_Z(\alpha - j\beta)}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad 0 < \beta < \beta_0,$$

где β_0 — максимальное значение $\operatorname{Im}\omega$, при котором сходится интеграл (5), который может быть записан в виде

$$\begin{aligned} C_Z(\omega) \Big|_{\omega=\alpha-j\beta} &= C_Z(\alpha - j\beta) = \\ &= \overline{e^{j(\alpha-j\beta)Z}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\alpha x} e^{\beta x} w_Z(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x} \cos(\alpha x) w_Z(x) dx + j \int_{-\infty}^{\infty} e^{\beta x} \sin(\alpha x) w_Z(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что обычно х.ф. определяется как функция вещественного аргумента, но здесь рассмотрено ее обобщение как функции комплексного аргумента ω .

Используя это утверждение, а также то обстоятельство, что канал описывается моделью без памяти [см. (1)], можно записать, что

$$P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\prod_{l=1}^n c_z(\alpha - j\beta; x^{(l)}, x'^{(l)})}{\beta + j\alpha} d\alpha$$

при $0 < \beta < \beta_0$, (7)

где

$$c_z(\omega; x, x') = \overline{\exp(j\omega z(y | x, x'))} \quad (8)$$

— х.ф. случайной величины $z(y | x, x')$, определенной равенством (4), а верхняя граница β_0 следует из условия сходимости интеграла (6).

Вероятность ошибки декодирования p_e оценивается сверху с использованием аддитивного неравенства (2)

$$\begin{aligned} p_e &\leq \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) P(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{1}{\pi M} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\prod_{l=1}^n c_z(\alpha - j\beta; x^{(l)}, x'^{(l)})}{\beta + j\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi M} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_z(\alpha - j\beta; x^{(l)}, x'^{(l)})}{\beta + j\alpha} d\alpha, \end{aligned} \quad (9)$$

где $P(\mathbf{x})$ — вероятность использования последовательности \mathbf{x} . При записи равенства в выражении (9) учтено предположение о равновероятном использовании последовательностей \mathbf{x} , т. е. что $P(\mathbf{x}) = 1/M$, где M — объем кода.

Поскольку $c_z(\omega; x, x) = 1$ для любого значения аргумента ω , то

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; x^{(l)}, x'^{(l)}) &= \\ &= \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; x^{(l)}, x'^{(l)}) - \sum_{\mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; x^{(l)}, x^{(l)}) = \\ &= \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; x^{(l)}, x'^{(l)}) - M. \end{aligned}$$

Поэтому можно записать, что

$$p_e \leq \frac{1}{\pi M} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{D(\alpha - j\beta) - M}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad (10)$$

где

$$D(\omega) = \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; x^{(l)}, x'^{(l)}). \quad (11)$$

Задача вычисления границы (10) состоит из трех этапов: получение выражения для функции $D(\omega)$, получение выражений для х.ф. $c_z(\omega; x, x')$

и вычисление интеграла (10). Первые две задачи могут быть решены аналитически, а для решения последней задачи обычно требуется численное интегрирование.

Вывод выражения для функции $D(\omega)$

Функция $D(\omega)$, определенная равенством (11), зависит от структуры кода (включающей канальный алфавит) и от вида х.ф. и их значений, определяемых моделью рассматриваемого канала без памяти. В частном случае — для геометрически равномерных кодов (geometrically uniform codes) — функция $D(\omega)$ может быть вычислена с использованием спектра кода. Основным примером геометрически равномерных кодов являются линейные коды в совокупности с равномерной фазовой модуляцией. В общем же случае для произвольных кодов (как блочных, так и сверточных) и произвольных канальных алфавитов функция $D(\omega)$ может быть вычислена с использованием подходящей решетчатой диаграммы. Рассмотрим сначала случай блочного кодирования. Для описания структуры кода воспользуемся понятием решетчатой диаграммы, или кодовой решетки блочного кода. При этом описании используются терминология и определения из работы [11].

Решетчатая диаграмма представляет собой размеченный направленный граф $\Omega = (V, E, A)$, где V, E, A — множество вершин, множество ребер и множество меток ребер (алфавит) соответственно. Множество ребер E состоит из троек $e = (v, v', a)$, $v, v' \in V, a \in A$. Множество вершин V решетчатой диаграммы (кодовой решетки) разделяется на непересекающиеся подмножества как

$$V = V^{(0)} \cup V^{(1)} \cup \dots \cup V^{(n-1)} \cup V^{(n)}, \quad (12)$$

где каждое множество $V^{(i)}$ образует вершины i -го уровня диаграммы, $i = 0, 1, \dots, n-1$. При этом каждое ребро $e \in E$ начинается в вершине из $V^{(i)}$ и заканчивается в вершине из $V^{(i+1)}$, и каждая вершина $v \in V$ лежит хотя бы на одном из путей от вершины из множества начальных вершин $V^{(0)}$ до вершины из множества конечных вершин $V^{(n)}$. Представление (12) множества вершин V приводит к тому, что множество ребер может быть задано как $E = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots \cup E^{(n-1)} \cup E^{(n)}$, где $E^{(i)}$ — непересекающиеся подмножества, содержащие ребра, которые завершаются в вершинах из $V^{(i)}$. Аналогично можно записать, что $A = A^{(1)} \cup A^{(2)} \cup \dots \cup A^{(n-1)} \cup A^{(n)}$, где подмножества $A^{(i)}$ образуют множества меток ребер из $E^{(i)}$. Множества $A^{(i)}$ не обязательно должны быть дизъюнктивными, т. е. не имеющими общих элементов, и во многих случаях $A^{(1)} = A^{(2)} = \dots = A^{(n)} = A$. Последовательность меток вдоль пути

в диаграмме, начинающегося в вершине из $V^{(0)}$ и приходящего в вершину из $V^{(n)}$, представляет собой кодовое слово блочного кода. Очевидно, что номер последнего уровня n равен длине блочного кода. В решетчатых диаграммах многих блочных кодов $|V^{(0)}| = |V^{(n)}| = 1$. Примерами блочных кодов, в решетках которых $|V^{(0)}| > 1, |V^{(n)}| > 1$, могут служить циклически усеченные сверточные коды (tail-biting convolutional codes). Обозначим $\Sigma^{(i)} = \{0, 1, \dots, |V^{(i)}| - 1\}$. Будем считать, что зафиксировано некоторое взаимно-однозначное соответствие $V^{(i)} \leftrightarrow \Sigma^{(i)}$, обозначаемое как $\Sigma(v) = k, v \in V^{(i)}, 0 \leq k \leq |V^{(i)}| - 1$. Тогда элементы множества $\Sigma^{(i)}$ могут рассматриваться как индексы вершин i -го уровня. Множество $\Sigma = \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)} \cup \dots \cup \Sigma^{(n-1)} \cup \Sigma^{(n)}$ образует множество состояний решетчатой диаграммы и $S_\Omega = \max_i |\Sigma^{(i)}| = \max_i |V^{(i)}|$ представляет собой максимальное число состояний диаграммы, которое некоторым образом характеризует ее сложность.

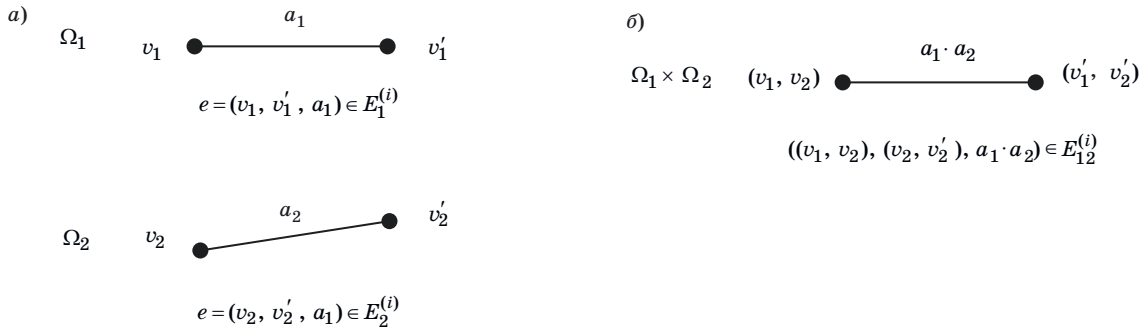
Отметим, что в литературе представлены формализованные процедуры построения кодовых решеток для различных блочных кодов [11]. В частности, для любого линейного двоичного блочного кода кодовая решетка с максимальным числом состояний диаграммы $S_\Omega \leq \min(M, 2^n/M)$ легко строится по проверочной матрице кода. Также легко могут быть построены кодовые решетки для каскадных кодов над не двоичным алфавитом, состоящие из двоичных компонентных кодов (некоторые примеры приведены в работах [10, 12]).

Вычисление функции $D(\omega)$ базируется на использовании произведения кодовых решеток. Произведение решеток $\Omega_1 = (V_1, E_1, A_1)$ и $\Omega_2 = (V_2, E_2, A_2)$, где $V_1 = V_1^{(0)} \cup V_1^{(1)} \cup \dots \cup V_1^{(n-1)} \cup V_1^{(n)}$ и $V_2 = V_2^{(0)} \cup V_2^{(1)} \cup \dots \cup V_2^{(n-1)} \cup V_2^{(n)}$, обозначается как $\Omega_1 \times \Omega_2$ и представляет собой решетку вида $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{V_{12}, E_{12}, A_{12}\}$, где

$$V_{12} = (V_1^{(0)} \times V_2^{(0)}) \cup (V_1^{(1)} \times V_2^{(1)}) \cup \dots \cup (V_1^{(n)} \times V_2^{(n)}).$$

Ребро $e = ((v_1, v_2), (v'_1, v'_2), (a_1 \cdot a_2)) \in E_{12}$ для вершин $(v_1, v_2) \in V_1^{(i)} \times V_2^{(i)}$ и $(v'_1, v'_2) \in V_1^{(i+1)} \times V_2^{(i+1)}$ существует в решетке $\Omega_1 \times \Omega_2$, если существуют ребра $e_1 = (v_1, v'_1, a_1)$ и $e_2 = (v_2, v'_2, a_2)$ в решетках Ω_1 и Ω_2 соответственно для пар вершин $v_1 \in V_1^{(i)}, v'_1 \in V_1^{(i+1)}$ и $v_2 \in V_2^{(i)}, v'_2 \in V_2^{(i+1)}$. Символ « \cdot » обозначает здесь некоторую композицию символов a_1 и a_2 , а алфавит произведения решеток определяется как $A_{12} = \{a_1 \cdot a_2 | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$. На рис. 1 приведена поясняющая иллюстрация.

Для получения выражения для функции $D(\omega)$, определенной равенством (11), применяется ранее использовавшийся подход [10, 12]. Чтобы построить функцию $D(\omega)$, необходимо рассмотреть все пары кодовых слов x, x' или все



■ **Рис. 1.** Вид ребер в исходных решетках (а) и в произведении $\Omega_1 \times \Omega_2$ (б)
 ■ **Fig. 1.** The form of edges in the original trellises (а) and in the product $\Omega_1 \times \Omega_2$ (б)

возможные пары путей в решетчатой диаграмме кода $\Omega = (V, E, X)$, $E = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots \cup E^{(n)}$, X — кодовый алфавит. Суммирование по x и x' в (11) соответствует суммированию по всем путям в решетке $\Omega^2 = \Omega \times \Omega = \{V \times V, E_2, \{c_z(\omega; x, x')\}\}$, в которой любое ребро имеет вид $((v_1, v_2), (v_1', v_2'), c_z(\omega; x, x'))$, если в решетке Ω соответствующие ребра на одном уровне решетки имеют вид $(v_1, v_2, x) \in E^{(i)}$ и $(v_1', v_2', x') \in E^{(i)}$, $x, x' \in X$. Иными словами, здесь композиция меток ребер задается как $x \cdot x' = c_z(\omega; x, x')$.

Рассмотрим сначала простой случай, когда кодовая решетка Ω имеет одну начальную и одну конечную вершину. В этом случае и решетка Ω^2 имеет одну начальную и одну конечную вершину. Пусть $E_2^{(i)}$ — множество ребер решетки Ω^2 на i -м уровне, $i = 1, 2, \dots, n$. Для уровня i определим величины

$$P_{kl}^{(i)}(\omega) = \sum_{e(v,v',c_z(\omega;x,x')) \in E_2^{(i)}} c_z(\omega; x, x'),$$

где $k = \Sigma(v)$, $l = \Sigma(v')$ — индексы вершин v и v' , или состояния решетки Ω^2 , т. е. $P_{kl}^{(i)}(\omega)$ вычисляется как сумма меток параллельных ребер, связывающих состояния k и l в решетке Ω^2 . Определим матрицы

$$P^{(i)}(\omega) = [P_{kl}^{(i)}(\omega)], \tag{13}$$

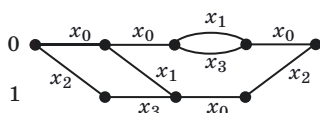
$k = 0, 1, \dots, |V^{(i-1)}|^2 - 1$, $l = 0, 1, 2, \dots, |V^{(i)}|^2 - 1$. Тогда нетрудно заметить, что

$$D(\omega) = P^{(1)}(\omega)P^{(2)}(\omega)\dots P^{(n)}(\omega). \tag{14}$$

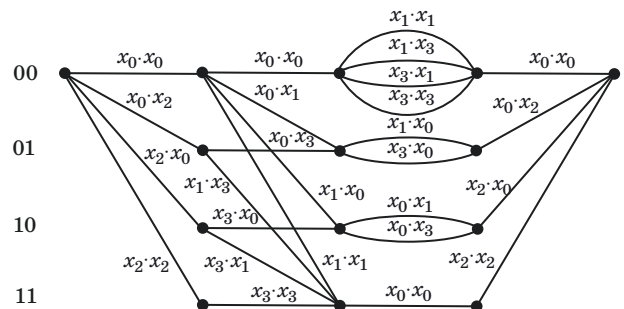
Следующий пример иллюстрирует процесс получения выражения для функции $D(\omega)$ для простого нелинейного недвоичного блочного кода.

Пример. Пусть решетка $\Omega = (V, E, A)$, задающая некоторый блочный код, имеет вид, показанный на рис. 2.

Этот код, очевидно, имеет длину $n = 4$, построен над алфавитом $A = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ и содержит четыре кодовых слова: $(x_0 x_0 x_1 x_0)$, $(x_0 x_0 x_3 x_0)$, $(x_0 x_1 x_0 x_2)$, $(x_2 x_3 x_0 x_2)$, т. е. для него $M = 4$. На рис. 3 показана решетка $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$.



■ **Рис. 2.** Пример решетки $\Omega = (V, E, A)$
 ■ **Fig. 2.** Example of trellis $\Omega = (V, E, A)$



■ **Рис. 3.** Решетка $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$
 ■ **Fig. 3.** Trellis $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$

Далее под композицией $x \cdot x'$, представляющей собой метку ребра в решетке Ω^2 , будем понимать х.ф. $c_z(\omega; x, x')$. Поэтому для матриц $\mathbf{P}^{(1)}(\omega)$, $\mathbf{P}^{(2)}(\omega)$, $\mathbf{P}^{(3)}(\omega)$ и $\mathbf{P}^{(4)}(\omega)$ с учетом того, что $c_z(\omega; x, x) = 1$, можно записать следующие выражения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(1)}(\omega) &= [1 \quad c_z(\omega; x_0, x_2) \quad c_z(\omega; x_2, x_0) \quad 1]; \\ \mathbf{P}^{(2)}(\omega) &= \begin{bmatrix} 1 & c_z(\omega; x_0, x_1) & c_z(\omega; x_1, x_0) & 1 \\ 0 & c_z(\omega; x_0, x_3) & 0 & c_z(\omega; x_1, x_3) \\ 0 & 0 & c_z(\omega; x_3, x_0) & c_z(\omega; x_3, x_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{P}^{(3)}(\omega) &= \begin{bmatrix} 2+c_z(\omega; x_1, x_3)+c_z(\omega; x_3, x_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_z(\omega; x_1, x_0)+c_z(\omega; x_3, x_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_z(\omega; x_0, x_1)+c_z(\omega; x_0, x_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{P}^{(4)}(\omega) &= [1 \quad c_z(\omega; x_0, x_2) \quad c_z(\omega; x_2, x_0) \quad 1]^T. \end{aligned}$$

Вычисляя выражение для $D(\omega)$, получаем, что

$$\begin{aligned} D(\omega) &= \mathbf{P}^{(1)}(\omega)\mathbf{P}^{(2)}(\omega)\mathbf{P}^{(3)}(\omega)\mathbf{P}^{(4)}(\omega) = \\ &= c_z(\omega; x_1, x_3) + c_z(\omega; x_3, x_1) + c_z(\omega; x_0, x_2)c_z(\omega; x_1, x_3) + c_z(\omega; x_2, x_0)c_z(\omega; x_3, x_1) + \\ &+ c_z(\omega; x_0, x_1)c_z(\omega; x_0, x_2)c_z(\omega; x_1, x_0) + c_z(\omega; x_0, x_1)c_z(\omega; x_1, x_0)c_z(\omega; x_2, x_0) + \\ &+ c_z(\omega; x_0, x_1)c_z(\omega; x_0, x_2)c_z(\omega; x_3, x_0) + c_z(\omega; x_0, x_3)c_z(\omega; x_1, x_0)c_z(\omega; x_2, x_0) + \\ &+ c_z(\omega; x_0, x_2)^2 c_z(\omega; x_0, x_3)c_z(\omega; x_1, x_0) + c_z(\omega; x_0, x_2)^2 c_z(\omega; x_0, x_3)c_z(\omega; x_3, x_0) + \\ &+ c_z(\omega; x_0, x_1)c_z(\omega; x_2, x_0)^2 c_z(\omega; x_3, x_0) + c_z(\omega; x_0, x_3)c_z(\omega; x_2, x_0)^2 c_z(\omega; x_3, x_0) + 4. \end{aligned}$$

Это выражение содержит $M^2 = 16$ слагаемых вида $\prod_{l=1}^4 c(\omega; x^{(l)}, x'^{(l)})$ по числу пар кодовых слов $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, из них $M(M - 1) = 12$ нетривиальных слагаемых по числу пар $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ и $M = 4$ тривиальных слагаемых, равных единице, по числу пар $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

Если решетка Ω имеет несколько начальных и столько же конечных состояний, т. е. $|V^{(0)}| = |V^{(n)}| = S$, то вычисление функции $D(\omega)$ становится чуть сложнее. Обозначим через Ω_s подрешетку в решетчатой диаграмме $\Omega = (V, E, X)$, в которой есть только одно начальное состояние $s = \Sigma(v_s)$, $v_s \in V^{(0)}$, и только одно конечное состояние $s = \Sigma(v_s)$, $v_s \in V^{(n)}$, $s = 0, 1, \dots, S - 1$, т. е. $\Omega_s = (V_s, E_s, X_s)$, где $V_s = \{v_s\} \cup V^{(1)} \cup \dots \cup V^{(n-1)} \cup \{v_s\}$. Очевидно, решетчатая диаграмма Ω может быть представлена как набор из S таких подрешеток Ω_s (малых решеток) с идентичными начальными и конечными состояниями. Обозначим $\Omega_s \times \Omega_{s'} = \{V_s \times V_{s'}, E_{2_{ss'}}, \{c_z(\omega; x, x')\}\}$ решетку, в которой каждое ребро имеет вид $((v_1, v_2), (v'_1, v'_2), c_z(\omega; x, x'))$, если в решетках Ω_s и $\Omega_{s'}$ соответствующие ребра на одном уровне решетки имеют вид $(v_1, v_2, x) \in E_s^{(i)}$ и $(v'_1, v'_2, x') \in E_{s'}^{(i)}$, $x, x' \in X$, $s, s' = 0, 1, \dots, S - 1$. С учетом такого представления функция $D(\omega)$ может быть построена как

$$D(\omega) = \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{s'=0}^{S-1} D_{ss'}(\omega), \tag{15}$$

где

$$D_{ss'}(\omega) = \mathbf{P}_{ss'}^{(1)}(\omega)\mathbf{P}_{ss'}^{(2)}(\omega)\dots\mathbf{P}_{ss'}^{(n)}(\omega), \tag{16}$$

а матрицы $\mathbf{P}_{ss'}^{(i)}(\omega)$ строятся для решеток $\Omega_s \times \Omega_{s'}$ по той же процедуре, по какой были построены матрицы $\mathbf{P}^{(i)}(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, для решетки $\Omega \times \Omega$ для случая с одной начальной и одной конечной вершинами. Очевидно, что выражение (14) — это частный случай формул (15) и (16) для случая $S = |V^{(0)}| = |V^{(n)}| = 1$.

Можно показать, что при $\beta = 1/2$, т. е. когда $\omega = \alpha - j/2$, выполняется равенство $D_{ss'}(\omega) = D_{s's}(\omega)$. Поэтому равенство (15) может быть представлено как

$$D(\alpha - j/2) = \sum_{s=0}^{S-1} D_{ss}(\alpha - j/2) + 2 \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{s'=s+1}^{S-1} D_{ss'}(\alpha - j/2).$$

Это свойство используется для уменьшения сложности вычисления верхней границы вероятности p_e . Окончательное выражение для вероятности ошибки декодирования, в котором используются функции (16), имеет вид

$$p_e \leq \frac{1}{\pi M} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{\sum_{s=0}^{S-1} D_{ss}(\alpha - j/2) + 2 \sum_{s=0}^{S-1} \sum_{s'=s+1}^{S-1} D_{ss'}(\alpha - j/2) - M}{1/2 + j\alpha} d\alpha. \quad (17)$$

Отметим, что для вычисления правой части (17) нужно вычислить $S(S+1)/2$ функций $D_{ss'}(\cdot)$, а не S^2 , как это следует из формулы (15).

Упрощение для линейных кодов и аддитивных каналов

Для линейных кодов и для каналов, для которых выполняется следующее свойство для х.ф.:

$$c_z(\omega; x, x') = c_z(\omega; 0, x' - x), \quad (18)$$

вычисление границы (9) может быть упрощено. Заметим, что определение разности $x' - x$ в этом выражении зависит от модели канала и может вычисляться по-разному для различных случаев. Примерами каналов, для которых выполняется это равенство, могут служить дискретные и непрерывные каналы с аддитивным шумом, в частности, двоичный симметричный канал и двоичный канал с аддитивным белым гауссовым шумом. Для двоичного симметричного канала разность $x' - x$ понимается как разность в $GF(2)$, т. е. $x' \oplus x$. Для канала с аддитивным белым гауссовым шумом и модуляционного отображения $s: GF(2) \rightarrow \{A_0, A_1\}$, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}$, эта разность также понимается как $x' \oplus x$, а при вычислении значений х.ф. используются условные гауссовы ф.п.в. со средними $s(0)$ и $s(x' \oplus x)$. В этом случае двойная сумма по словам кода в выражении (9) может быть представлена как

$$\sum_x \sum_{x' \neq x} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; x^{(l)}, x'^{(l)}) = \sum_x \sum_{x' \neq x} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; 0, x^{(l)} - x'^{(l)}) =$$

$$= \sum_x \sum_{x' \neq x} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; 0, x^{(l)} - x'^{(l)}) = \quad (19)$$

$$= M \sum_{x \neq 0} \prod_{l=1}^n c_z(\omega; 0, x^{(l)}) = M \left(\sum_x \prod_{l=1}^n c_z(\omega; 0, x^{(l)}) - 1 \right), \quad (20)$$

где в переходе от (19) к (20) использовано свойство линейности кода. Для представления суммы по x в (20) рассмотрим решетку вида $\Omega_* \times \Omega$, где $\Omega_* = \{\{v_0\} \cup \{v_0\} \cup \dots \cup \{v_0\}, E, \{0\}\}$ — решетка, содержащая лишь одну вершину на каждом уровне и только один путь из начальной вершины в конечную, отмеченный нулевыми символами. Тогда сумму по кодовым словам x в (20) можно представить как

$$D_1(\omega) = \sum_x \prod_{l=1}^n c_z(\omega; 0, x^{(l)}) = P_1^{(1)}(\omega) P_1^{(2)}(\omega) \dots P_1^{(n)}(\omega), \quad (21)$$

где матрицы $P_1^{(i)}(\omega)$ строятся на основе решетки $\Omega_* \times \Omega$ аналогично тому, как были построены матрицы (13) на основе решетки $\Omega \times \Omega$. То есть $P_1^{(i)}(\omega) = [P_{1\ kl}^{(i)}(\omega)]$, где

$$P_{1\ kl}^{(i)}(\omega) = \sum_{(v, v', c_z(\omega; 0, x)) \in E^{(i)}} c_z(\omega; 0, x),$$

$k = \Sigma(v)$, $l = \Sigma(v')$ — индексы вершин v и v' , или состояния решетки $\Omega_* \times \Omega$, а $E^{(i)}$ — множество ребер i -го уровня в решетке $\Omega_* \times \Omega$. Иными словами, $P_{1\ kl}^{(i)}(\omega)$ вычисляется как сумма меток параллельных ребер, связывающих состояния k и l в решетке $\Omega_* \times \Omega$. Граница для p_e в окончательном виде выглядит следующим образом:

$$p_e \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \frac{D_1(\alpha - j\beta) - 1}{\beta + j\alpha} d\alpha. \quad (22)$$

Граница (22), в которой используется функция $D_1(\omega)$, вычисляемая по формуле (21), совпадает с обычной аддитивной границей ошибки декодирования для линейного кода и канала с аддитивным шумом (дискретным или непрерывным). При этом сложность ее вычисления определяется сложностью решетки Ω , а не решетки $\Omega \times \Omega$, как в общем случае.

Предложенный подход с использованием стандартной техники [2] может быть легко распространен на случай решетчатых и сверточных кодов. Тогда нетрудно показать, что, например, для двоичного сверточного кода со скоростью

$R = k/n$ с функцией нумератора весов $T(D, N)$ [2] границы для вероятности ошибочного события P_E и вероятности ошибки на бит P_B принимают вид

$$P_E \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{T(c_z(\alpha - j\beta; 0, 1), 1)}{\beta + j\alpha} d\alpha;$$

$$P_B \leq \frac{1}{\pi k} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\beta + j\alpha} \frac{dT(c_z(\alpha - j\beta; 0, 1), N)}{dN} \Big|_{N=1} \right) d\alpha. \quad (23)$$

Заметим, что обычная граница вероятностей P_E и P_B для сверточных кодов имеет вид $P_E \leq T(D_0, 1)$, $P_B \leq (1/k)dT(D_0, N)/dN|_{N=1}$, где $D_0 = \min_{\beta > 0} e^{\beta z(y|x, x')}$ — показатель границы Чернова. В некоторых случаях эти границы могут быть улучшены за счет введения коэффициента $K(d) \sim 1/\sqrt{d}$; конкретный вид функции $K(d)$ зависит от модели канала [2, 4]. Границы в этом случае принимают вид $P_E \leq K(d_f)T(D_0, 1)$, $P_B \leq K(d_f)(1/k)dT(D_0, N)/dN|_{N=1}$, где d_f — свободное расстояние сверточного кода.

Примеры применения

В этом разделе приведены примеры применения границы (10) для некоторых каналов. Для простых случаев — двоичный симметричный канал и гауссов канал с дискретным временем — предложенный подход приводит, как и ожидалось, к известным результатам. Для более сложных моделей канала, рассмотренных в примерах 3–5, использование границы (10) позволяет получить новые результаты.

Пример 1. Двоичный симметричный канал (ДСК). В этом случае $x, y = 0, 1$ и $p_{x|y}(x|y) = 1 - \varepsilon$, если $y = x$, и $p_{x|y}(x|y) = \varepsilon$, если $y \neq x$, где ε — вероятность ошибки в ДСК, $\varepsilon < 1/2$. Характеристическая функция (8) имеет в этом случае вид

$$c_z(\omega; x, x') = \begin{cases} (1 - \varepsilon)^{1-j\omega} \varepsilon^{j\omega} + \varepsilon^{1-j\omega} (1 - \varepsilon)^{j\omega}, & x \neq x', \\ 1, & x = x'. \end{cases} \quad (24)$$

Граница для вероятности p_e вычисляется в общем виде согласно выражению (10). Если выделить и рассмотреть одно слагаемое в сумме по x в (11), то получим выражение для вероятности $P_e(x \rightarrow x' | x)$ [см. (3)] следующего вида:

$$P_e(x \rightarrow x' | x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{\prod_{l=1}^n c_z(\alpha - j\beta; x^{(l)}, x'^{(l)})}{\beta + j\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{f(\varepsilon, \alpha - j\beta)^{d_H(x, x')}}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad (25)$$

где $f(\varepsilon, \omega) = (1 - \varepsilon)^{1-j\omega} \varepsilon^{j\omega} + \varepsilon^{1-j\omega} (1 - \varepsilon)^{j\omega}$; $d_H(x, x')$ — расстояние Хэмминга между словами x и x' . Обозначим $d = d_H(x, x')$ и $u = \ln((1 - \varepsilon)/\varepsilon)$; тогда можно записать, что $f(\varepsilon, \omega) = (1 - \varepsilon)e^{-j\omega u} + \varepsilon e^{j\omega u}$ и далее легко показать, что

$$f(\varepsilon, \alpha - j\beta)^{d_H(x, x')} = \sum_{l=0}^d C_d^l \varepsilon^{d-l} (1 - \varepsilon)^l e^{ju(d-2l)\alpha} e^{\beta u(d-2l)}.$$

Отсюда и из (25) следует, что

$$P_e(x \rightarrow x' | x) = \sum_{l=0}^d C_d^l \varepsilon^{d-l} (1 - \varepsilon)^l e^{\beta u(d-2l)} I(d-2l),$$

где обозначение $I(m)$ используется для следующего интеграла:

$$I(m) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{e^{jma}}{\beta - j\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\beta \cos m\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha \sin m\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha.$$

Для вычисления этих величин используем табличные тождества

$$\int_0^\infty \frac{\cos m\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2\beta} e^{-m\beta}, & m \geq 0, \\ \frac{\pi}{2\beta} e^{m\beta}, & m < 0; \end{cases}$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha \sin m\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-m\beta}, & m > 0, \\ 0, & m = 0, \\ -\frac{\pi}{2} e^{m\beta}, & m < 0, \end{cases}$$

где $\beta > 0$, и тогда получим, что

$$I(d-2l) = \begin{cases} e^{-\beta(d-2l)}, & d > 2l, \\ \frac{1}{2}, & d = 2l, \\ 0, & d < 2l, \end{cases}$$

и поэтому

$$P_e(x \rightarrow x' | x) = \begin{cases} \sum_{l=(d+1)/2}^d C_d^l \varepsilon^l (1 - \varepsilon)^{d-l}, & d \text{ — нечетное,} \\ \frac{1}{2} C_d^{d/2} \varepsilon^{d/2} (1 - \varepsilon)^{d/2} + \\ + \sum_{l=d/2+1}^d C_d^l \varepsilon^l (1 - \varepsilon)^{d-l}, & d \text{ — четное.} \end{cases}$$

Последнее равенство означает, что граница (10) для этого случая совпадает с аддитивной границей, в которой каждое слагаемое вычисляется точно.

Для х.ф. (24) выполняется условие (18). Поэтому граница для вероятности P_e для линейного кода, которая может быть найдена согласно выражению (22), дает в точности тот же результат, что и граница (10), но вычисляется значительно проще.

Пример 2. Гауссов канал с дискретным временем. Для этого примера выход канала имеет вид $y^{(i)} = s(x^{(i)}) + \xi^{(i)}$, где $s(x^{(i)})$ — переданная сигнальная точка, $s(x^{(i)})$, $y^{(i)}$, $\xi^{(i)} \in \mathbb{R}^m$, где m — размерность сигнального пространства, $\xi^{(i)}$ — m -мерный гауссов случайный вектор с независимыми одинаково распределенными компонентами с параметрами $(0, \sigma^2)$. Условная ф.п.в., определяющая канал, задается поэтому следующим образом:

$$P_{y|x}(y|s(x)) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-m} \exp(-\|y - s(x)\|^2 / 2\sigma^2).$$

Нетрудно показать, что х.ф. (8) имеет в этом случае вид

$$c_z(\omega; x, x') = \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)\|s(x) - s(x')\|^2}{2\sigma^2}\right). \quad (26)$$

Тогда для двух кодовых слов $\mathbf{x} = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, $\mathbf{x}' = (x'^{(1)}, \dots, x'^{(n)})$ и их модуляционных отображений $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = (s(x^{(1)}), \dots, s(x^{(n)}))$ и $\mathbf{s}(\mathbf{x}') = (s(x'^{(1)}), \dots, s(x'^{(n)}))$ можно записать, что

$$\prod_{l=1}^n c_z(\omega; x^{(l)}, x'^{(l)}) = \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)d^2}{2\sigma^2}\right)_{\omega=\alpha-j\beta} = e^{-\frac{\alpha^2 d^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{j\alpha(1-2\beta)d^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{\beta(1-\beta)d^2}{2\sigma^2}},$$

где

$$d^2 = d_E^2(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}')) = \sum_{l=1}^n \|s(x^{(l)}) - s(x'^{(l)})\|^2.$$

Если выделить и рассмотреть одно слагаемое в сумме по \mathbf{x} в (11), то получим выражение для вероятности $P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x})$ [см. (3)] вида

$$P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{\beta(1-\beta)d^2}{2\sigma^2}} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{\exp(-(\alpha^2 + j\alpha(1-\beta))d^2 / 2\sigma^2)}{\beta + j\alpha} d\alpha.$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$a = d^2 / 2\sigma^2, \quad u = (1-2\beta)d^2 / 2\sigma^2. \quad (27)$$

Тогда для вероятности $P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x})$ можно записать выражение

$$P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) = e^{-a\beta(1-\beta)} I(\alpha, u), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} I(\alpha, u) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{e^{-\alpha a^2 + j\alpha u}}{\beta + j\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{e^{-\alpha a^2} (\cos u\alpha - j \sin u\alpha)}{\beta + j\alpha} d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \beta \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha a^2} \cos u\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha a^2} \sin u\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2} e^{a\beta^2 + \beta u} \operatorname{erfc}(\sqrt{a}\beta + u / (2\sqrt{a})). \end{aligned} \quad (29)$$

Последнее выражение в (29) получено с использованием табличных интегралов для условий $a > 0, \beta > 0, u > 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} \cos xy}{\beta^2 + x^2} dx &= \frac{\pi}{4\beta} e^{\beta y} \left(e^{-\beta y} \operatorname{erfc}(t_1) + e^{\beta y} \operatorname{erfc}(t_2) \right); \\ \int_0^\infty \frac{x e^{-ax^2} \sin xy}{\beta^2 + x^2} dx &= \frac{\pi}{4} e^{\beta y} \left(e^{-\beta y} \operatorname{erfc}(t_1) - e^{\beta y} \operatorname{erfc}(t_2) \right), \end{aligned}$$

где $t_1 = \sqrt{a}\beta - y / (2\sqrt{a})$; $t_2 = \sqrt{a}\beta + y / (2\sqrt{a})$. Собирая вместе выражения (28), (29) и (27), получаем в итоге, что

$$\begin{aligned} P_e(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' | \mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_E(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}'))}{2\sqrt{2}\sigma}\right) = \\ &= Q\left(\frac{d_E(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{s}(\mathbf{x}'))}{2\sigma}\right). \end{aligned}$$

Это значит, что граница (10) для этого случая совпадает с аддитивной границей, в которой каждое слагаемое вычисляется точно.

Если для модуляционного отображения $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ выполняется свойство $\|\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{x}')\|^2 = \|\mathbf{s}(\mathbf{0}) - \mathbf{s}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\|^2$, а код обладает свойством линейности, т. е. $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ принадлежит коду, то граница для вероятности P_e , которая может быть найдена согласно выражению (22), дает в точности тот же результат, что и граница (10), но вычисляется гораздо проще.

Далее рассматриваются примеры, которые не сводятся к ранее известным аддитивным границам.

Пример 3. Канал с гауссовым шумом, дисперсия которого зависит от переданного значения (Input dependent additive Gaussian noise — ID-AGN). Эта модель используется при анализе систем записи/считывания данных в многоуров-

невой флеш-памяти, беспроводных систем связи в видимом оптическом диапазоне, волоконно-оптических систем связи, систем связи с неортогональным множественным доступом [13–21].

Первым среди далее приводимых вариантов мы рассматриваем тот, который использовался для описания модели ячейки многоуровневой флеш-памяти (гауссова аппроксимация [13, 14]).

Входные уровни каждой ячейки принимают некоторые фиксированные значения x_0, x_1, \dots, x_{q-1} , а выходные значения представляют собой случайные величины. Распределения этих случайных величин описываются условными ф.п.в. $p_{y|x}(y|x), -\infty < y < \infty, x = x_0, x_1, \dots, x_{q-1}$.

В публикациях [13–15] перечисляются факторы, определяющие конкретный вид условных ф.п.в. $p_{y|x}(y|x), -\infty < y < \infty, x = x_0, x_1, \dots, x_{q-1}$. Будем полагать далее, что модель ячейки определяется ф.п.в. $p_{y|x}(y|x_i), i = 0, 1, \dots, q-1$, которые могут быть аппроксимированы гауссовыми плотностями, т. е. будем считать, что

$$p_{y|x}(y|x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x_i)} \exp\left(-\frac{(y-x_i)^2}{2\sigma^2(x_i)}\right).$$

Эта модель известна также как ID-AGN-модель [22]. Пример с $q = 4$ часто используется для описания канала записи флеш-памяти, который в этом случае представлен как набор одиночных многоуровневых ячеек памяти. Эта модель допускает обобщение на большее число входных уровней, в частности на шесть, восемь и двенадцать уровней [22]. С возрастанием числа циклов перезаписи и увеличением времени хранения записанных данных значения уровней записи x_i (кроме x_0) уменьшаются, тогда как значения стандартного отклонения $\sigma(x_i)$ (кроме $\sigma(x_0)$) увеличиваются. Такое изменение параметров x_i и $\sigma(x_i)$, задающих канал, описывает процесс его постепенного ухудшения (деградации) в зависимости от времени и условий эксплуатации. Детали описания зависимости величин x_i и $\sigma(x_i), i = 0, 1, \dots, q-1$, от числа циклов перезаписи и времени хранения записанных данных могут быть найдены в работах [13, 14, 23].

В этом случае можно показать, что при $\sigma(x) \neq \sigma(x')$

$$c_z(\omega; x, x') = \frac{\sigma(x)^{j\omega} \sigma(x')^{1-j\omega}}{\sqrt{j\omega\sigma^2(x) + (1-j\omega)\sigma^2(x')}} \times \exp\left(-\frac{j\omega(1-j\omega)(x-x')^2}{2(j\omega\sigma^2(x) + (1-j\omega)\sigma^2(x'))}\right) \quad (30)$$

при условиях $\text{Im}\omega < \sigma^2(x')/(\sigma^2(x) - \sigma^2(x'))$, если $\sigma(x) > \sigma(x')$, и $-\text{Im}\omega < \sigma^2(x')/(\sigma^2(x) - \sigma^2(x'))$, если $\sigma(x) < \sigma(x')$. Граница для вероятности p_e вычис-

ляется для этой модели с использованием общего выражения (10). Ряд результатов, относящихся к каналу записи флеш-памяти и полученных на основе описанного здесь подхода, может быть найден в работах [10, 12].

Модель с ID-AGN, используемая для описания взаимосвязи входного сигнала x и выходного сигнала y в беспроводной системе связи в видимом оптическом диапазоне и волоконно-оптической системе связи, имеет следующий вид [16, 17]:

$$y = gx + \sqrt{k_0 + k_1 x} \xi_I + \xi, \quad (31)$$

где g — коэффициент передачи канала; $k_0, k_1 > 0$ — коэффициенты, учитывающие вклад ID-AGN; ξ_I и ξ — независимые гауссовы случайные величины с нулевым средним и дисперсиями σ_I^2 и σ соответственно. Первая составляющая $\sqrt{k_0 + k_1 x} \xi_I$ аддитивного шума возникает вследствие случайности механизма эмиссии фотонов светодиоидом. Вторая составляющая ξ аддитивного шума представляет собой обычный тепловой шум. Передаваемый сигнал x в (31) представляет собой случайную величину, которая в АМ, простейшем варианте модуляции, характеризует интенсивность излучаемого оптического сигнала. Очевидно, при использовании АМ x является неотрицательной случайной величиной, ограниченной сверху максимальной интенсивностью светодиода. Значения х.ф. $c_z(\omega; x, x')$ для этой модели вычисляются по формуле (30), в которой зависимость $\sigma(x)$ имеет вид $\sigma(x) = \sqrt{(k_0 + k_1 x)\sigma_I^2 + \sigma^2}$.

Пример 4. Канал с релейскими замираниями и непрерывным выходом. В этой модели входные величины $x \in \{x_0, x_1\}$, а выход канала (выходное значение демодулятора с мягкими решениями) может быть представлен как $y = y_0 - y_1$, где

$$y_0 = \begin{cases} (\zeta_c \sqrt{2\gamma} + \xi_{c0})^2 + (\zeta_s \sqrt{2\gamma} + \xi_{s0})^2, & \text{если } x = x_0, \\ \xi_{c0}^2 + \xi_{s0}^2, & \text{если } x = x_1; \end{cases}$$

$$y_1 = \begin{cases} \xi_{c1}^2 + \xi_{s1}^2, & \text{если } x = x_0, \\ (\zeta_c \sqrt{2\gamma} + \xi_{c1})^2 + (\zeta_s \sqrt{2\gamma} + \xi_{s1})^2, & \text{если } x = x_1, \end{cases}$$

и $\zeta_c, \zeta_s, \xi_{c0}, \xi_{s0}, \xi_{c1}, \xi_{s1}$ — независимые гауссовы случайные величины с нулевыми средними. Величины $\xi_{c0}, \xi_{s0}, \xi_{c1}, \xi_{s1}$ возникают из-за влияния аддитивного белого гауссова шума, а ζ_c и ζ_s представляют собой квадратурные компоненты релейского коэффициента передачи канала.

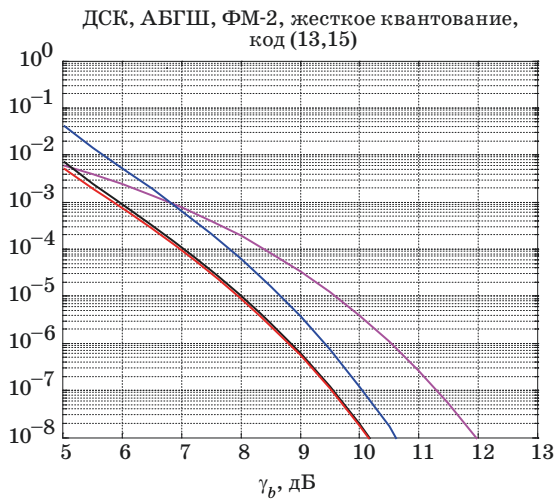
При соответствующей нормировке $\zeta_c^2 = \zeta_s^2 = 1/2$, $\xi_{c0}^2 = \xi_{s0}^2 = \xi_{c1}^2 = \xi_{s1}^2 = 1$, а величина γ имеет смысл среднего значения отношения сигнал/шум. Такая модель возникает при рассмотрении некоге-

рентного приема ортогональных сигналов ЧМ-2, переданных по каналу с релеевскими замираниями. Для условных ф.п.в. в этом случае справедливости выражения

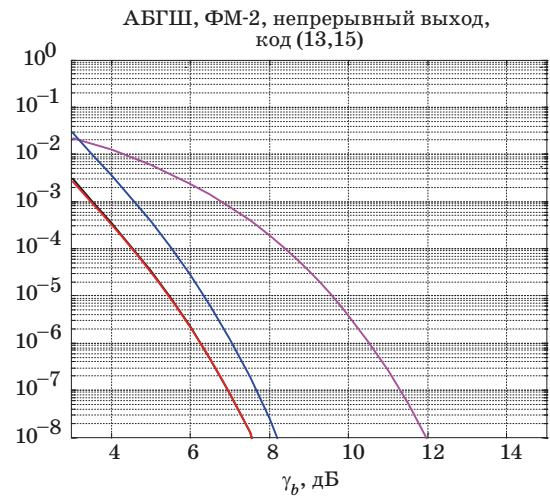
$$P_{y|x}(y|x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2(\gamma+2)} \exp\left(-\frac{y}{2(\gamma+1)}\right), & \text{если } y > 0, \\ \frac{1}{2(\gamma+2)} \exp\left(\frac{y}{2}\right), & \text{если } y \leq 0; \end{cases} \quad (32)$$

$$P_{y|x}(y|x_1) = P_{y|x}(-y|x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2(\gamma+2)} \exp\left(-\frac{y}{2}\right), & \text{если } y \geq 0, \\ \frac{1}{2(\gamma+2)} \exp\left(\frac{y}{2(\gamma+1)}\right), & \text{если } y < 0. \end{cases} \quad (33)$$

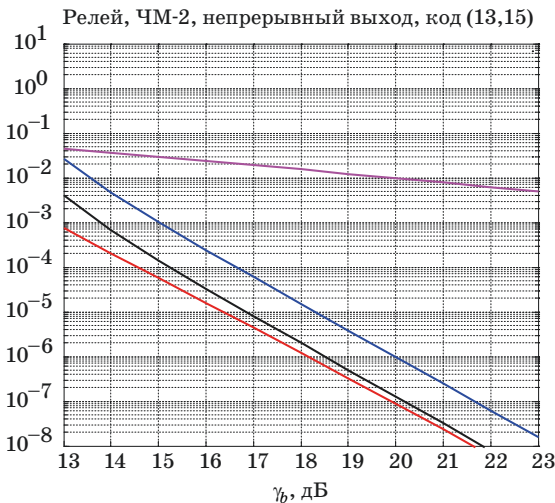
Подстановка выражений (32) и (33) в (8) приводит в итоге к выражению



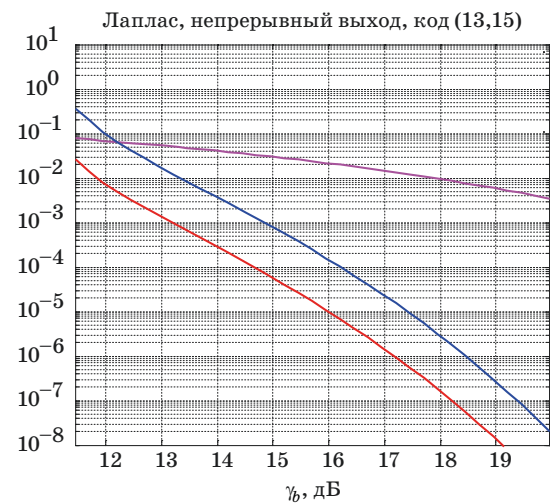
— без кода, $P_B = Q(\sqrt{2\gamma_b})$
 — P_B , гр. Чернова + аддитивная граница
 — P_B , гр. Чернова (уточненная) + аддитивная граница
 — P_B , х.ф. + численное интегрирование



— без кода, $P_B = Q(\sqrt{2\gamma_b})$
 — P_B , гр. Чернова + аддитивная граница
 — P_B , гр. Чернова (уточненная) + аддитивная граница
 — P_B , х.ф. + численное интегрирование



— без кода, $P_B = 1/(2 + \gamma_b)$
 — P_B , гр. Чернова + аддитивная граница
 — P_B , гр. Чернова (уточненная) + аддитивная граница
 — P_B , х.ф. + численное интегрирование



— без кода, $P_B = \exp(-\sqrt{2\gamma_b}/2)$
 — P_B , гр. Чернова + аддитивная граница
 — P_B , х.ф. + численное интегрирование

■ **Рис. 4.** Границы вероятности ошибки на бит P_B в зависимости от отношения сигнал/шум на бит γ_b для рассмотренных моделей каналов

■ **Fig. 4.** Bounds on the bit error probability P_B vs signal-to-noise ratio per bit γ_b for the considered channel models

$$c_z(\omega; x_0, x_1) = \frac{\gamma+1}{\gamma+2} \left(\frac{1}{1+(1-j\omega)\gamma} + \frac{1}{1+j\omega\gamma} \right), \quad (34)$$

при этом должны выполняться условия $1/\gamma > \text{Im}\omega > -(1+\gamma)/\gamma$. В дальнейшем потребуется значение правой части (34) при $\omega = \alpha - j\beta$. Из условий для $\text{Im}\omega$ следует, что $-1/\gamma < \beta < (1+\gamma)/\gamma$. Кроме того, имеется ограничение $\beta > 0$. Поэтому окончательно имеем границы для параметра β : $0 < \beta < (1+\gamma)/\gamma$. Тогда для $\beta = 1/2$ получаем

$$c_z(\alpha - j/2; x_0, x_1) = \frac{4(\gamma+1)}{(\gamma+2)^2 + 4\alpha^2\gamma^2}. \quad (35)$$

Пример 5. Канал с аддитивным шумом с распределением Лапласа. Эта модель является частным случаем модели канала с аддитивным шумом, имеющим обобщенное гауссово распределение. Аддитивный шум, имеющий распределение Лапласа, широко используется как а) модель интерференционного шума в системах связи миллиметрового диапазона; б) модель интерференционного шума в дуплексных радиосетях при наличии замираний; в) модель шума в оптических линиях [19–21]. В этой модели предполагается, что $x \in \{x_0, x_1\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, и условные ф.п.в. задаются равенствами $p_{y|x}(y|x_0) = \exp(-|y-x_0|/b)/(2b)$ и $p_{y|x}(y|x_1) = \exp(-|y-x_1|/b)/(2b)$, где $b = \sigma/\sqrt{2}$, σ — среднеквадратическое отклонение. Подстановка этих выражений для ф.п.в. приводит после ряда преобразований к следующему выражению для х.ф.:

$$c_z(\omega; x_0, x_1) = \left((1-j\omega)e^{-j\omega|x_0-x_1|/b} - j\omega e^{-(1-j\omega)|x_0-x_1|/b} \right) / (1-2j\omega).$$

Более удобным для практических вычислений оказывается функция $c_z(\omega; x, x')|_{\omega=\alpha-j/2}$, которая может быть приведена к виду

$$c_z(\alpha - j/2; x_0, x_1) = e^{-\frac{|x_0-x_1|}{2b}} \left(\frac{\sin(\alpha|x_0-x_1|/b)}{2\alpha} + \cos(\alpha(x_0-x_1)/b) \right). \quad (36)$$

В приведенных ниже численных примерах под значением отношения сигнал/шум понимается величина $|x_0 - x_1|/b$.

Численные результаты. В качестве иллюстративного примера рассмотрим применение разработанного подхода для двоичного сверточного кода с $R = 1/2$ с многочленной порождающей матрицей $\mathbf{G}(z) = [1 + z + z^3 \quad 1 + z^2 + z^3]$, или в восьмеричной компактной записи $\mathbf{G}(z) = [13, 15]$. Этот код имеет кодовое ограничение $v = 3$,

свободное расстояние $d_f = 6$ и функцию нумератора весов

$$T(D, N) = \frac{D^6 N^3 - D^{10} N^3 + D^6 N}{1 - 2D^2 N^3 - 3D^2 N + 2D^6 N^3}.$$

На рис. 4 представлены графики границы вероятности P_B , вычисленные согласно выражению (23) для рассмотренных примеров каналов, исключая модель с ID-AGN [см. (24), (26), (34) и (36)]. Результаты, относящиеся к модели с ID-AGN, полученные с использованием описанного здесь подхода, могут быть найдены в работах [10, 12].

Из приведенных графиков следует, что предложенный универсальный подход (красная линия) дает существенное улучшение границы вероятности ошибки для конкретных кодов по сравнению с обычной аддитивной границей в комбинации с границей Чернова (синяя линия): так, при вероятности ошибки 10^{-5} оценка требуемых энергетических затрат снижается на величину от 0,7 до 2,0 дБ в зависимости от модели канала. Что касается уточненных вариантов границы Чернова [4] (черная линия), то предложенный подход тоже улучшает известные границы для этих моделей, хотя и очень незначительно. Заметим, что важнейшая положительная черта предложенного подхода состоит в его универсальности, что позволяет применить его к любому каналу без памяти и обеспечить при этом высокую точность оценивания при малых вычислительных затратах.

Заключение

В данной работе представлен метод точного вычисления аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования для широкого класса кодов и моделей каналов без памяти. Разработанный метод базируется на получении точного выражения для попарной вероятности ошибки с использованием аппарата характеристических функций. Получение аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования основано на использовании произведения решетчатых диаграмм для рассматриваемого кода, позволяющего получить итоговое выражение в интегральной форме, удобной для численного интегрирования. Важной особенностью предложенной процедуры является то, что она позволяет точно вычислить аддитивную границу с помощью подхода, основанного на использовании передаточных (производящих) функций. При таком подходе метки ветвей в произведении решетчатых диаграмм для рассматриваемого кода заменяются соответствующими характеристическими функциями.

ческими функциями. Удобное для численного интегрирования итоговое выражение позволяет вычислять значения аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования с желаемой точностью. В целом, как показывают конкретные примеры, вычислительные затраты при использовании предложенного подхода к вычислению аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования оказываются вполне приемлемыми для кодов, имеющих сравнительно небольшую длину.

Результаты были частично представлены на XXIV международной конференции «Волновая электроника и инфокоммуникационные систе-

мы (WECONF-2021)», Санкт-Петербург, ГУАП, 2021 г.

Финансовая поддержка

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2020-0004 «Научные основы построения архитектур и систем связи бортовых информационно-вычислительных комплексов нового поколения для авиационных, космических систем и беспилотных транспортных средств».

Литература

1. Proakis J. G., M. Salehi M. *Digital Communications*. Fifth Ed. McGraw-Hill, 2008. 1151 p.
2. Gallager R. G. *Principles of Digital Communications*. Cambridge University Press, 2012. 407 p.
3. I. Sason I., Shamai S. Performance analysis of linear codes under maximum-likelihood decoding: A tutorial. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2006, vol. 3, no. 1–2, pp. 1–225.
4. Trofimov A. N. Modified Chernoff Bound and Some Applications. In: *Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*. Ed. E. Krouk and S. Semenov. Wiley, 2011. Pp. 206–220.
5. Biglieri E. *Coding for Wireless Channels*. Springer US, 2006. 420 p.
6. Goldsmith A. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2012. 644 p.
7. Abedi A., Khandani A. K. An analytical method for approximate performance evaluation of binary linear block codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2004, vol. 52, no. 2, pp. 228–235.
8. Ali S. A., Kambo N. S., Ince E. A. Exact expression and tight bound on pairwise error probability for performance analysis of turbo codes over Nakagami-m fading channels. *IEEE Communications Letters*, 2007, vol. 11, no. 5, pp. 399–401.
9. Gupta B., Saini D. S. Moment generating function-based pairwise error probability analysis of concatenated low density parity check codes with Alamouti coded multiple input multiple output orthogonal frequency division multiplexing systems. *Communications IET*, 2014, vol. 8, no. 3, pp. 399–412.
10. Таубин Ф. А., Трофимов А. Н. Каскадное кодирование на основе многомерных решеток и кодов Рида — Соломона для многоуровневой флэш-памяти. *Труды СПИИРАН*, 2018, вып. 2(57), с. 75–103. doi:10.15622/sp.57.4
11. Vardy A. Trellis Structures of Codes. In: *Handbook of Coding Theory*. Ed. V. S. Pless and W. C. Huffman. Elsevier, Amsterdam, 1998. Vol. 2. 1106 p.
12. Таубин Ф. А., Трофимов А. Н. Каскадное кодирование для многоуровневой флэш-памяти с исправлением ошибок малой кратности во внешней ступени. *Труды СПИИРАН*, 2019, вып. 18(5), с. 1149–1181. doi:10.15622/sp.2019.18.5.1149-1181
13. Wang X., Dong G., Pan L., Zhou R. Error correction codes and signal processing in flash memory. In: *Flash Memories*. Ed. Igor Stievano. <http://www.intechopen.com/books/flash-memories/error-correction-codes-and-signal-processing-in-flash-memory> (дата обращения: 26.10.2014).
14. Dong G., Pan Y., Xie N., Varanasi C., Zhang T. Estimating information-theoretical NAND flash memory storage capacity and its implication to memory system design space exploration. *IEEE Trans. Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, 2012, vol. 20, no. 9, pp. 1705–1714.
15. Huang X., Kavcic A., Ma X., Dong G., Zhang T. Multilevel flash memories: Channel modeling, capacities and optimal coding rates. *International Journal on Advances in Systems and Measurement*, 2013, vol. 6, no. 3, 4, pp. 364–373. http://www.iariajournals.org/systems_and_measurements/ (дата обращения: 26.10.2014).
16. Moser S. M. Capacity results of an optical intensity channel with input-dependent Gaussian noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, vol. 58, no. 1, pp. 207–223.
17. Yuan M., Sha X., Liang X., Jiang M., Wang J., Zhao C. Coding performance for signal dependent channels in visible light communication system. *Signal and Information Processing (GlobalSIP) 2015 IEEE Global Conference*, pp. 1037–1041.
18. Gao Q., Hu S., Gong C., Xu Z. Modulation design for multi-carrier visible light communications with signal-dependent noise. *Communication Systems (ICCS) 2016 IEEE International Conference*, 2016, pp. 1–6.
19. Dytso A., Bustin R., Poor H. V., Shitz S. S. On additive channels with generalized Gaussian noise. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Aachen, Germany, 2017, pp. 426–430.

20. Ding Z., Yang Z., Fan P., Poor H. V. On the performance of non-orthogonal multiple access in 5G systems with randomly deployed users. *IEEE Signal Process. Letters*, 2014, vol. 21, no. 12, pp. 1501–1505.
21. Bariah L., Muhaidat S., Sofotasios P. C., Gurugopinath S., Hamouda W., Yanikomeroğlu H. Non-orthogonal multiple access in the presence of additive generalized Gaussian noise. *IEEE Communications Letters*, 2020, vol. 24, no. 10, pp. 2137–2141.
22. Sun F., Rose K., Zhang T. On the use of strong BCH codes for improving multilevel NAND flash memory storage capacity. http://www.researchgate.net/publication/254376882_On_the_Use_of_Strong_BCH_Codes_for_Improving_Multilevel_NAND_Flash_Memory_Storage_Capacity (дата обращения: 26.10.2014).
23. Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Теоретико-информационный анализ многоуровневой flash-памяти. Часть 1: Модель канала и границы случайного кодирования. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 2, с. 56–67. doi.org/10.15217/issn1684-8853.2016.2.56

UDC 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85

Evaluation of the union bound for the decoding error probability using characteristic functionsA. N. Trofimov^a, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org//0000-0003-1233-5222, andrei.trofimov@k36.orgF. A. Taubin^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-8781-9531^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Since the exact value of a decoding error probability cannot usually be calculated, an upper bounding technique is used. The standard approach for obtaining the upper bound on the maximum likelihood decoding error probability is based on the use of the union bound and the Chernoff bound, as well as its modifications. For many situations, this approach is not accurate enough. **Purpose:** Development of a method for exact calculation of the union bound for a decoding error probability, for a wide class of codes and memoryless channels. **Methods:** Use of characteristic functions of logarithm of the likelihood ratio for an arbitrary pair of codewords, trellis representation of codes and numerical integration. **Results:** The resulting exact union bound on the decoding error probability is based on a combination of the use of characteristic functions and the product of trellis diagrams for the code, which allows to obtain the final expression in an integral form convenient for numerical integration. An important feature of the proposed procedure is that it allows one to accurately calculate the union bound using an approach based on the use of transfer (generating) functions. With this approach, the edge labels in the product of trellis diagrams for the code are replaced by their corresponding characteristic functions. The final expression allows, using the standard methods of numerical integration, to calculate the values of the union bound on the decoding error probability with the required accuracy. **Practical relevance:** The results presented in this article make it possible to significantly improve the accuracy of the bound of the error decoding probability, and thereby increase the efficiency of technical solutions in the design of specific coding schemes for a wide class of communication channels.

Keywords — maximum likelihood decoding, union bound on the error probability, pairwise error probability, characteristic function, ID-AGN channel, additive Laplacian noise channel.

For citation: Trofimov A. N., Taubin F. A. Evaluation of the union bound for the decoding error probability using characteristic functions. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 4, pp. 71–85 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85

References

- Proakis J. G., M. Salehi M. *Digital Communications*. Fifth Ed. McGraw-Hill, 2008. 1151 p.
- Gallager R. G. *Principles of Digital Communications*. Cambridge University Press, 2012. 407 p.
- I. Sason I., Shamai S. Performance analysis of linear codes under maximum-likelihood decoding: A tutorial. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, 2006, vol. 3, no. 1–2, pp. 1–225.
- Trofimov A. N. *Modified Chernoff Bound and Some Applications*. In: *Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*. Ed. E. Krouk and S. Semenov. Wiley, 2011. Pp. 206–220.
- Biglieri E. *Coding for Wireless Channels*. Springer US, 2006. 420 p.
- Goldsmith A. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2012. 644 p.
- Abedi A., Khandani A. K. An analytical method for approximate performance evaluation of binary linear block codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2004, vol. 52, no. 2, pp. 228–235.
- Ali S. A., Kambo N. S., Ince E. A Exact expression and tight bound on pairwise error probability for performance analysis of turbo codes over Nakagami-m fading channels. *IEEE Communications Letters*, 2007, vol. 11, no. 5, pp. 399–401.
- Gupta B., Saini D. S. Moment generating function-based pairwise error probability analysis of concatenated low density parity check codes with alamouti coded multiple input multiple output orthogonal frequency division multiplexing systems. *Communications IET*, 2014, vol. 8, no. 3, pp. 399–412.
- Taubin F. A., Trofimov A. N. Concatenated Reed–Solomon/lattice coding for multilevel flash memory. *SPIIRAS Proceedings*, 2018, no. 2(57), pp. 75–101 (In Russian). doi: 10.15622/sp.57.4
- Vardy A. *Trellis Structures of Codes*. In: *Handbook of Coding Theory*. Ed. V. S. Pless and W. C. Huffman. Elsevier, Amsterdam, 1998. Vol. 2. 1106 p.
- Taubin F. A., Trofimov A. N. Concatenated coding for multilevel flash memory with low error correction capabilities in outer stage. *SPIIRAS Proceedings*, 2019, vol. 18, no. 5, pp. 1149–1181 (In Russian). doi:10.15622/sp.2019.18.5.1149-1181
- Wang X., Dong G., Pan L., Zhou R. *Error correction codes and signal processing in flash memor*. In: *Flash Memories*. Ed. Igor Stievano. Available at: <http://www.intechopen.com/books/flash-memories/error-correction-codes-and-signal-processing-in-flash-memory> (accessed 26 October 2014).

14. Dong G., Pan Y., Xie N., Varanasi C., Zhang T. Estimating information-theoretical NAND flash memory storage capacity and its implication to memory system design space exploration. *IEEE Trans. Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, 2012, vol. 20, no. 9, pp. 1705–1714.
15. Huang X., Kavcic A., Ma X., Dong G., Zhang T. Multilevel flash memories: Channel modeling, capacities and optimal coding rates. *International Journal on Advances in Systems and Measurement*, 2013, vol. 6, no. 3, 4, pp. 364–373. Available at: http://www.iariajournals.org/systems_and_measurements/ (accessed 26 October 2014).
16. Moser S. M. Capacity results of an optical intensity channel with input-dependent Gaussian noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, vol. 58, no. 1, pp. 207–223.
17. Yuan M., Sha X., Liang X., Jiang M., Wang J., Zhao C. Coding performance for signal dependent channels in visible light communication system. *Signal and Information Processing (GlobalSIP) 2015 IEEE Global Conference*, pp. 1037–1041.
18. Gao Q., Hu S., Gong C., Xu Z. Modulation design for multi-carrier visible light communications with signal-dependent noise. *Communication Systems (ICCS) 2016 IEEE International Conference*, 2016, pp. 1–6.
19. Dytso A., Bustin R., Poor H. V., Shitz S. S. On additive channels with generalized Gaussian noise. *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Aachen, Germany, 2017, pp. 426–430.
20. Ding Z., Yang Z., Fan P., Poor H. V. On the performance of non-orthogonal multiple access in 5G systems with randomly deployed users. *IEEE Signal Process. Letters*, 2014, vol. 21, no. 12, pp. 1501–1505.
21. Bariah L., Muhaidat S., Sofotasios P. C., Gurugopinath S., Hamouda W., Yanikomeroglu H. Non-orthogonal multiple access in the presence of additive generalized Gaussian noise. *IEEE Communications Letters*, 2020, vol. 24, no. 10, pp. 2137–2141.
22. Sun F., Rose K., Zhang T. On the use of strong BCH codes for improving multilevel NAND flash memory storage capacity. Available at: http://www.researchgate.net/publication/254376882_On_the_Use_of_Strong_BCH_Codes_for_Improving_Multilevel_NAND_Flash_Memory_Storage_Capacity (accessed 26 October 2014).
23. Trofimov A. N., Taubin F. A. Information theory analysis of multilevel flash memory. Part 1: Channel model and random coding bounds. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems]*, 2016, no. 2, pp. 56–67 (In Russian). doi.org/10.15217/issn1684-8853.2016.2.56

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию.

Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.