

## Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий

А. А. Батенков<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-7515-5774](https://orcid.org/0000-0002-7515-5774)

К. А. Батенков<sup>б</sup>, доктор техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0001-6083-1242](https://orcid.org/0000-0001-6083-1242), [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru)

А. Б. Фокин<sup>б</sup>, сотрудник, [orcid.org/0000-0002-2187-7325](https://orcid.org/0000-0002-2187-7325)

<sup>а</sup>Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева, Комсомольская ул., 95, Орел, 302026, РФ

<sup>б</sup>Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, Приборостроительная ул., 35, Орел, 302015, РФ

**Введение:** для больших и сложных по структуре телекоммуникационных сетей расчет вероятности связности оказывается весьма громоздким и трудоемким процессом вследствие огромного числа элементов в результирующем выражении. Наиболее целесообразным выходом из подобной ситуации является метод, основанный на представлении события связности сети в виде сумм произведений несовместных событий. Однако и этот метод также требует выполнения в ряде случаев дополнительных операций над множествами. **Цель:** устранить основные недостатки метода, использующего многопеременную инверсию. **Результаты:** показано, что событие связности графа следует трактовать как объединение событий связности всех его подграфов, что приводит к справедливости выражения для события связности сети в форме объединения событий связности типовых подграфов (пути, остового, а в общем случае многополюсного, дерева) исходного случайного графа. Предложена итерационная процедура приведения заданного числа событий связности к объединению независимых событий путем последовательного добавления событий несвязности подграфов. Доказана возможность устранения повторяющихся рутинных процедур, свойственных методам, использующим многопеременную инверсию, путем рассмотрения не объединения событий связности (несвязности), вырождающегося в сумму несовместных произведений, а пересечения противоположных событий, приводящего также к подобной сумме, но для получения которой нет необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проанализированными. **Практическая значимость:** полученные аналитические соотношения могут быть применены при анализе надежности, живучести или устойчивости сложноразветвленных телекоммуникационных сетей.

**Ключевые слова** — вероятность связности, граф, телекоммуникационная сеть, многопеременная инверсия, форма перехода к замещению.

**Для цитирования:** Батенков А. А., Батенков К. А., Фокин А. Б. Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий. *Информационно-управляющие системы*, 2021, № 6, с. 53–63. doi:10.31799/1684-8853-2021-6-53-63

**For citation:** Batentkov A. A., Batentkov K. A., Fokin A. B. Analysis of the probability of connectivity of a telecommunications network based on the reduction of several non-connectivity events to a union of independent events. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 6, pp. 53–63 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2021-6-53-63

### Введение

Хорошо известно, что для больших и сложных по структуре телекоммуникационных сетей расчет вероятности связности оказывается весьма громоздким и трудоемким процессом вследствие огромного числа элементов в результирующем выражении. Например, даже задачи перечисления событий связности оцениваются вычислительной сложностью  $O(v + s)$  [1] для простых цепей и  $O[v + e + v(s + n)]$  [2] для остовых деревьев, где  $v$  — число вершин в эквивалентном графе;  $e$  — число ребер в эквивалентном графе;  $s$  — число событий связности (простых цепей или остовых деревьев);  $n$  — число событий несвязности.

В целом задача расчета показателей произвольной связности оказывается NP-трудной [3, 4], а значит, их точные значения вычисляются

алгоритмами экспоненциальной трудоемкости. В то же время широко известными являются точные методы факторизации Шеннона — Мура [5] и логико-вероятностные методы, использующие бинарную диаграмму решения [6]. Особняком стоят, по сути, частные случаи метода редукции — «последовательно-параллельные» [7], «многоугольник — цепь» [8] и «треугольник — звезда» [9], которые приводят к анализу графов меньшей размерности.

Существуют методы приближенной оценки вероятности связности графов, основанные чаще всего на методах статистического моделирования [10] или анализе структур графа, имеющих заданные ограничения. Подобным образом вычисляются асимптотические константы вероятности несвязности планарного взвешенного графа [11]. Асимптотика вероятности связности графов

с низконадежными ребрами использует в качестве основы количество подграфов (остовых деревьев, кратчайших путей) и позволяет отказаться от их перечисления [12, 13]. Оценка связности планарного графа с высоконадежными ребрами предполагает использование минимального числа ребер в разрезах и числа разрезов с заданным количеством ребер, а также рассмотрение двойственных графов, в которых разрезы исходного графа порождают циклы [14].

Разработаны методы, использующие разложения по остовому дереву, производительность которых при определенных условиях оказывается выше метода ветвления [15, 16]. Продолжается развитие метода факторизации, направленное на его применение для путей произвольной длины [17]. Для ограниченного класса графов, отличающихся небольшой размерностью, разработаны модификации метода факторизации, значительно увеличивающие скорость расчета [18].

В работе [19] доказана взаимосвязь всеполюсной и многополюсной связностей на основе применения решетки разбиения множества вершин неориентированного графа, а также аналитические соотношения для вероятности связности графа с использованием функции Мебиуса.

Метод кумулятивного оценивания вероятности связности графов берет свое начало еще с работ [20, 21], где описаны общие подходы к приближенному расчету. В основу данного метода могут быть положены все известные методы точного анализа: метод факторизации, логико-вероятностные методы, метод разложения по остовному дереву [22–25].

Одним из первых алгоритмов вычисления суммы событий связности является подход, изложенный в [26]. Данный алгоритм значительно сократил объем вычислений, необходимых для получения сумм произведений несовместных событий, по сравнению с более ранними подходами. Применение алфавитно-цифрового упорядочивания переменных состояния приводит к сокращению размеров пересекающихся сумм [27]. Более эффективен подход [28], в котором используется модификация правил упорядочивания списка произведений. Усовершенствована компоновка минимальных простых цепей [29, 30]. В работе [31] предложен алгоритм инверсии произведений переменных взамен применяемого ранее инвертирования отдельных переменных. Альтернативой выступает способ, предполагающий рекурсивную процедуру расчета вероятности объединенного события, изначально разработанный для анализа вероятности блокировки в сетях с вариативной маршрутизацией [32].

Таким образом, наиболее подходящим оказывается подход, основанный на представлении события связности сети в виде сумм произведений

несовместных событий [33], представляющих собой форму перехода к замещению [34–36], допускающую непосредственный переход к вероятностной функции заменой логических переменных (множеств) вероятностями, а логических операций (операций над множествами) — соответствующими арифметическими операциями [37–39]. Данное представление приводит к достаточно компактной форме записи результирующего уравнения связности и, как следствие, к снижению вычислительной сложности и уменьшению результирующей ошибки округления [40–43]. Отметим, что данный подход рекомендован отечественным ГОСТом для расчета устойчивости функционирования сетей [44] и в отечественной научной литературе получил название метода объединения с учетом эффекта поглощения [34].

Основным вкладом настоящей работы в развитие существующих методов точного расчета вероятности связности для графов произвольной структуры является введение и формализация рекурсивной процедуры, использующей операции поглощения и расщепления над событиями несвязности. Предполагается, что устранение повторяющихся процедур сравнения существенно упростит алгоритмы расчета показателей связности.

### Общий подход к расчету вероятности связности на основе инверсий состояний сети

Даже наиболее совершенным модификациям метода, использующим многопеременную инверсию, свойственен существенный недостаток, связанный с необходимостью сравнительного анализа каждого слагаемого со всеми ранее рассмотренными на предмет уникальности содержащихся ребер, а также необходимость выполнения в ряде случаев дополнительных операций над множествами [33, 45, 46]. Для устранения подобных повторяющихся рутинных процедур целесообразно рассматривать не объединение событий связности (несвязности), вырождающееся в сумму несовместных произведений, а пересечение противоположных событий [47], приводящее также к подобной сумме, но для получения которой нет необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проанализированными [48–50].

Событие  $S$  связности графа  $G$  следует трактовать как объединение событий связности всех его подграфов, что приводит к справедливости следующего выражения для события  $S$  связности сети:

$$S = \bigcup_{i=1}^s S_i,$$

где  $S_i, i = 1, \dots, s$  — событие связности  $i$ -го типового подграфа (пути, остового, а в общем случае многополюсного, дерева) случайного графа  $G$ .

Отметим, что здесь и далее событие связности типового подграфа трактуется как событие для одного из трех типов связности: для двухполюсной связности — путь или простая цепь, для всеполюсной связности — остовое дерево, для многополюсной связности — многополюсное дерево.

Каждое событие  $S_i$  связности типового подграфа является сложным и происходит только при условии связности (работоспособности) содержащихся в этом подграфе ребер, т. е.

$$S_i = \bigcap_{l_j \in S_i} l_j,$$

где  $l_j, j = 1, \dots, l$  — событие связности (работоспособности)  $j$ -го ребра графа  $G$ .

По условию формулировки обобщенной модели Эрдеша — Реньи все данные события независимы, а следовательно, вероятность связности подграфа [50]

$$P(S_i) = \prod_{l_j \in S_i} P(l_j).$$

Отметим, что для события  $S$  связности графа  $G$  данная мультипликативная формула в общем случае несправедлива, поскольку события  $S_i$  связности типовых подграфов могут быть зависимы вследствие присутствия одинаковых ребер в данных подграфах [51]. Именно в этом и заключается основная проблема расчета вероятности связности, так как отдельные подграфы оказываются взаимозависимыми, а получаемые выражения не являются формами перехода к замещению.

Хорошо известный принцип двойственности [34] позволяет записать событие  $\bar{S}$  несвязности графа  $G$  как пересечение событий  $\bar{S}_i$  несвязности типовых подграфов:

$$\bar{S} = \bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i.$$

В результате на основе формулы полной вероятности вероятность  $P(S)$  связности графа выражается на основе вероятностей событий несвязности

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i\right).$$

Главным достоинством данного выражения является то, что дальнейший переход к вероятностной форме не потребует рассмотрения во всех суммах инверсии всех ранее учтенных подграфов.

Подобное выражение, в принципе, не является чем-то новым с точки зрения описания события связности отдельно взятого графа, однако с позиции дальнейшего получения формы перехода к замещению его использование имеет существенные преимущества в совокупности с рекурсивной процедурой, о которой будет сказано далее.

Достаточно просто на основе принципа двойственности формализуется выражение для события  $\bar{S}$  несвязности графа на основе событий  $l_j$  работоспособности ребер

$$\bar{S}_i = \bigcap_{l_j \in S_i} \bar{l}_j = \bigcup_{l_j \in S_i} \bar{l}_j.$$

### Рекурсивная процедура приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий

Процедуру приведения заданного числа событий связности к объединению независимых событий можно рассматривать как итерационную, добавляя последовательно события несвязности подграфов. Несмотря на кажущуюся громоздкость, подобная процедура использует всего два различных преобразования. Первое из них, расщепление (рис. 1), используется наиболее часто:

$$\overline{abac} = \bar{a} \cup (a\bar{b}\bar{c}), \quad (1)$$

где  $a, b, c$  — некоторые взаимонезависимые события.

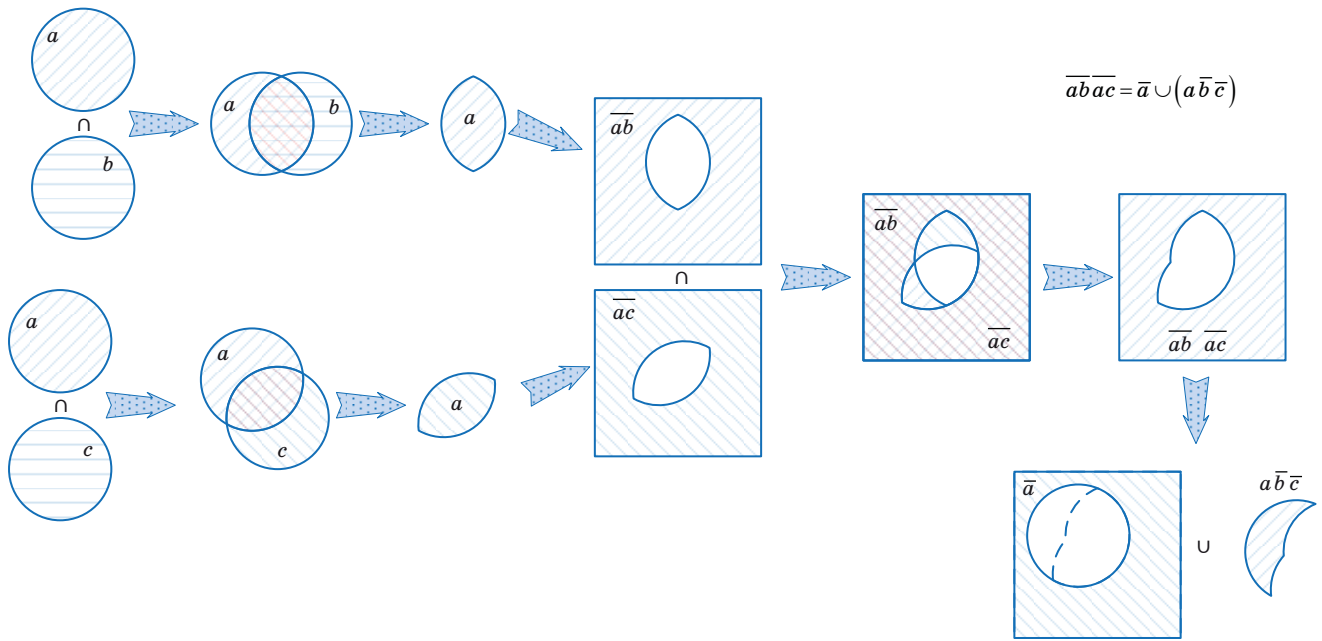
В частном случае, когда одно из отрицаний включает другое расщепление, (1) вырождается в сокращение

$$\overline{a\bar{a}c} = \bar{a}.$$

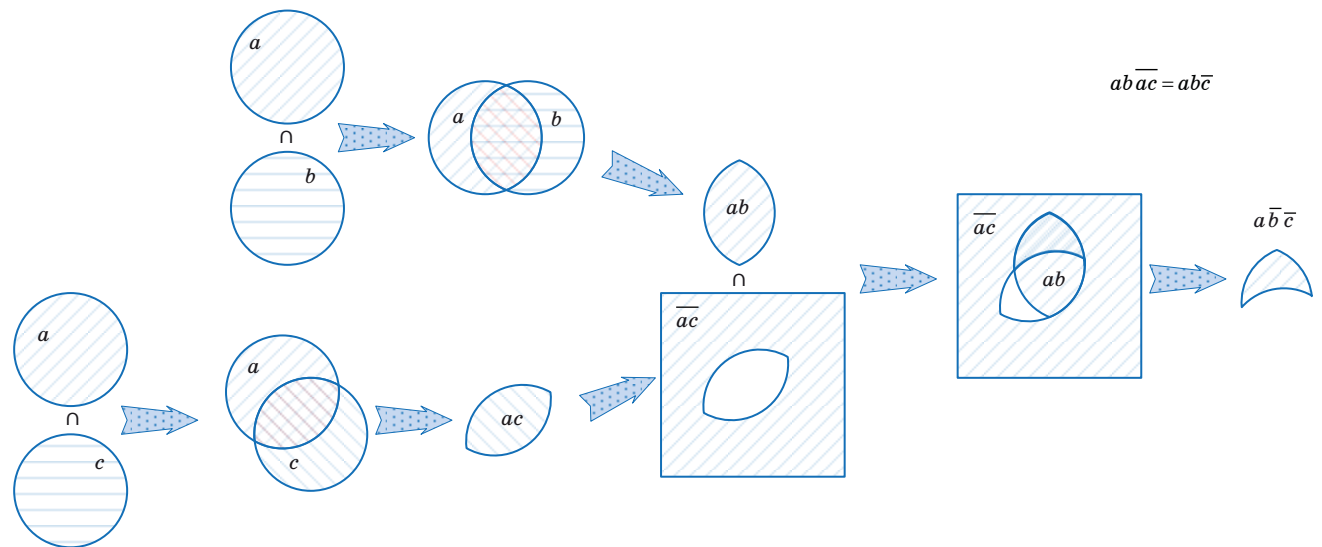
Второе, поглощение (рис. 2), применяется при условии присутствия события связности

$$ab\bar{a}c = ab\bar{c}. \quad (2)$$

В результате процедуру приведения выражения события связности графа к объединению независимых событий можно представить в форме рекурсии, каждый этап которой ассоциируется с добавлением нового события  $\bar{S}_i$  несвязности подграфа (рис. 3). Этап включает две итерации: на первой выполняется при необходимости операция поглощения (2), а на второй осуществляется последовательная процедура расщепления (1), — до того момента, пока события не окажутся независимыми. На рис. 3 римскими цифрами обозначены номера этапов, а в квадратных скобках указано количество выражений сначала для событий связности, а затем через дефис —



■ **Рис. 1.** Расщепление отрицаний двух зависимых событий  
 ■ **Fig. 1.** Splitting the negatives of two dependent events



■ **Рис. 2.** Поглощение двух зависимых событий  
 ■ **Fig. 2.** Absorption of two dependent events

для противоположных событий. Отметим, что операция поглощения (2) не приводит к увеличению числа объединений, а последовательная процедура расщепления (1) увеличивает число объединений на единицу, причем в результирующих выражениях все объединения имеют одно и то же количество отрицаний, за исключением последнего, где оно увеличено на единицу.

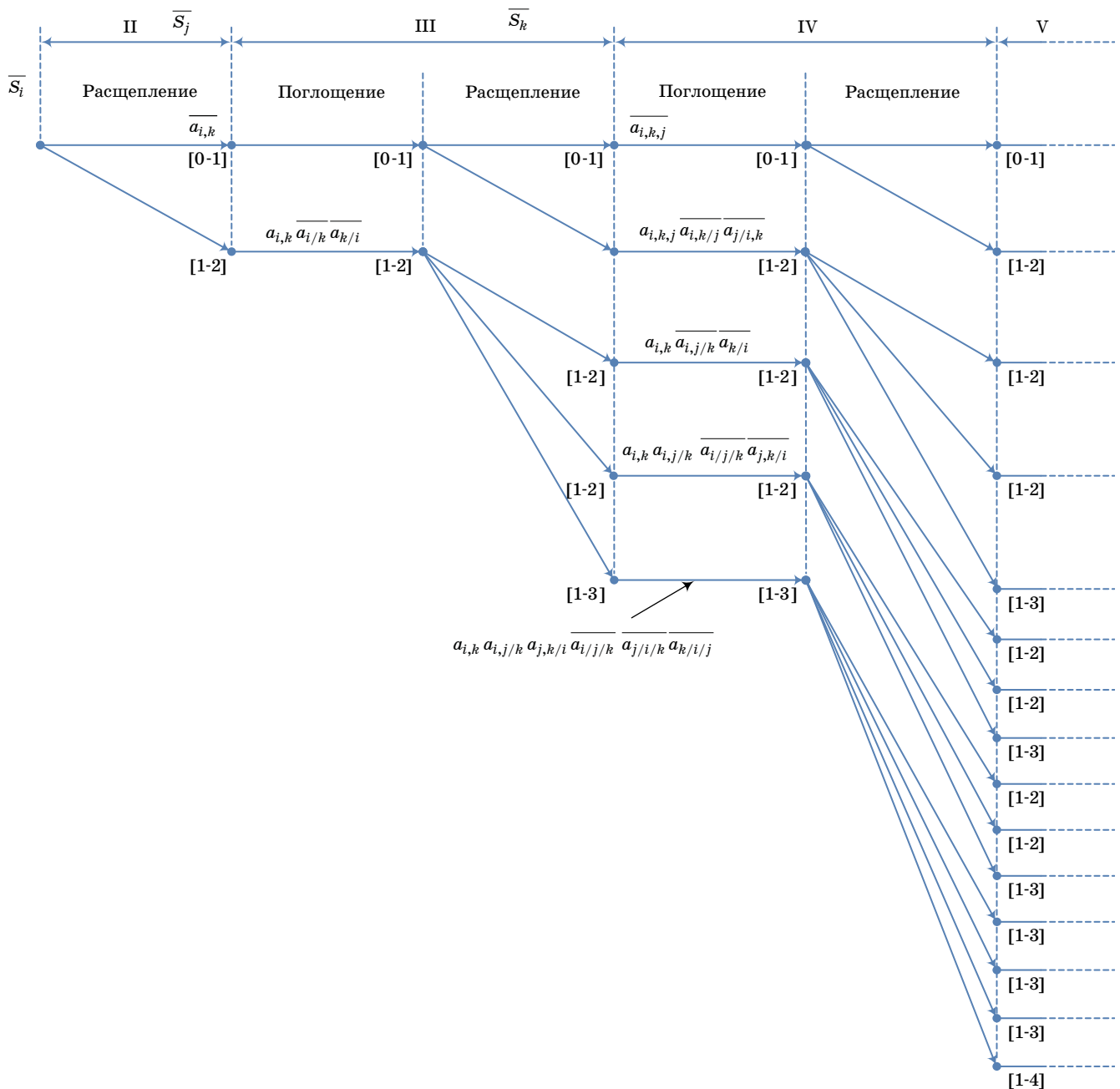
Например, процедура упрощения для двух произвольных подграфов основывается на операции расщепления (1)

$$\overline{S_i S_k} = \overline{a_{i,k} a_{i/k} a_{i,k} a_{k/i}} = \overline{a_{i,k}} \cup (a_{i,k} \overline{a_{i/k} a_{k/i}}),$$

где  $a_{i,k}$  — событие связности ребер, входящих одновременно в  $i$ -й и  $k$ -й подграфы;  $a_{i/k}$  — событие связности ребер, входящих в  $i$ -й и не входящих в  $k$ -й подграфы;  $a_{k/i}$  — событие связности ребер, входящих в  $k$ -й и не входящих в  $i$ -й подграфы.

При этом в результате получается форма перехода к замещению, т. е.

$$P(\overline{S_i S_k}) = P(\overline{a_{i,k}}) + P(a_{i,k})P(\overline{a_{i/k} a_{k/i}}).$$



■ **Рис. 3.** Иллюстрация рекурсивной процедуры приведения выражения события связности графа к объединению независимых событий

■ **Fig. 3.** Illustration of a recursive procedure for reducing the expression of a graph connectivity event to a union of independent events

Для трех произвольных подграфов пересечение событий несвязности представимо в форме объединения тоже двух, но зависимых событий

$$\overline{S_i S_k S_j} = \overline{a_{i,k} S_j} \cup \left( \overline{a_{i,k} a_{i/k} a_{k/i} S_j} \right).$$

Тогда операция расщепления (1) для первого слагаемого приводит к

$$\begin{aligned} \overline{a_{i,k} S_j} &= \overline{a_{i,k,j} a_{i,k/j} a_{i,k,j} a_{j/i,k}} = \\ &= \overline{a_{i,k,j}} \cup \left( \overline{a_{i,k,j} a_{i,k/j} a_{j/i,k}} \right), \end{aligned}$$

где  $a_{i,k,j}$  — событие связности ребер, входящих одновременно в  $i$ -й,  $k$ -й и  $j$ -й подграфы;  $a_{i,k/j}$  — событие связности ребер, входящих в  $i$ -й и  $k$ -й и не входящих в  $j$ -й подграфы;  $a_{j/i,k}$  — событие связ-

ности ребер, входящих в  $j$ -й и не входящих в  $i$ -й и  $k$ -й подграфы, а операция поглощения (2) для второго слагаемого — к

$$a_{i,k} \overline{S_j} = a_{i,k,j} a_{i,k/j} \overline{a_{i,k,j} a_{j/i,k}} = a_{i,k} \overline{a_{j/i,k}}.$$

В результате пересечение событий несвязности имеет вид двух независимых объединений и одного зависимого

$$\overline{S_i S_k S_j} = \overline{a_{i,k,j}} \cup \left( \overline{a_{i,k,j} a_{i,k/j} a_{j/i,k}} \right) \cup \left( a_{i,k} \overline{a_{j/i,k} a_{i/k} a_{k/i}} \right).$$

Использование операции расщепления (1) для последнего слагаемого приводит к

$$\begin{aligned} \overline{a_{j/i,k} a_{i/k}} &= \overline{a_{i,j/k} a_{j/i} a_{i,j/k} a_{i/j/k}} = \\ &= \overline{a_{i,j/k}} \cup \left( \overline{a_{i,j/k} a_{j/i} a_{i/j/k}} \right), \\ \overline{S_i S_k S_j} &= \overline{a_{i,k,j}} \cup \left( \overline{a_{i,k,j} a_{i,k/j} a_{j/i,k}} \right) \cup \\ &\cup \left( a_{i,k} \overline{a_{i,j/k} a_{k/i}} \right) \cup \left( a_{i,k} a_{i,j/k} \overline{a_{j/i} a_{i/j/k} a_{k/i}} \right). \end{aligned}$$

Дальнейшее применение операции расщепления (1) к последнему слагаемому формирует конечный результат

$$\begin{aligned} \overline{a_{j/i,k} a_{k/i}} &= \overline{a_{j,k/i} a_{j/i,k} a_{j,k/i} a_{k/i/j}} = \\ &= \overline{a_{j,k/i}} \cup \left( \overline{a_{j,k/i} a_{j/i,k} a_{k/i/j}} \right), \\ \overline{S_i S_k S_j} &= \overline{a_{i,k,j}} \cup \left( \overline{a_{i,k,j} a_{i,k/j} a_{j/i,k}} \right) \cup \\ &\cup \left( a_{i,k} \overline{a_{i,j/k} a_{k/i}} \right) \cup \left( a_{i,k} a_{i,j/k} \overline{a_{i/j/k} a_{j,k/i}} \right) \cup \\ &\cup \left( a_{i,k} a_{i,j/k} a_{j,k/i} \overline{a_{i/j/k} a_{j/i,k} a_{k/i/j}} \right), \end{aligned}$$

который является формой перехода к замещению, т. е.

$$\begin{aligned} P(\overline{S_i S_k S_j}) &= P(\overline{a_{i,k,j}}) + P(a_{i,k,j}) P(\overline{a_{i,k/j}}) P(\overline{a_{j/i,k}}) + \\ &+ P(a_{i,k}) P(\overline{a_{i,j/k}}) P(\overline{a_{k/i}}) + \\ &+ P(a_{i,k}) P(a_{i,j/k}) P(\overline{a_{i/j/k}}) P(\overline{a_{j,k/i}}) + \\ &+ P(a_{i,k}) P(a_{i,j/k}) P(a_{j,k/i}) \times \\ &\times P(\overline{a_{i/j/k}}) P(\overline{a_{j/i,k}}) P(\overline{a_{k/i/j}}). \end{aligned}$$

Стоит отметить, что данную процедуру при необходимости следует продолжать и дальше, добавляя последовательно события несвязности подграфов.

Несмотря в общем случае на очевидное катастрофическое увеличение количества объединений в результирующем выражении для события

связности графа, при реализации предложенной схемы это число оказывается существенно меньше вследствие того, что при выполнении большинства операций расщепления (1) образуются события, содержащие пересечения только независимых событий. Данная процедура основывается на хорошо известных операциях над булевыми переменными, однако сами операции поглощения и расщепления в совокупности с последовательностью их применения позволяют получить форму перехода к замещению и по сути представляют собой модификацию логико-вероятностного метода.

### Пример анализа структуры графа сети связи

Рассмотрим реализацию предложенных процедур на примере и определим аналитический вид события  $\overline{S}$  несвязности графа  $G$ .

Структура сети представлена на рис. 4 [52]. Источник и сток на рисунке отмечены квадратами:  $v_s = 1, v_t = 5$ . Матрица смежностей графа данной сети задается формулой

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

а матрица путей (простых цепей) — выражением

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

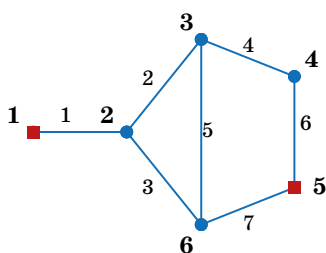
На основе матрицы путей (4) образуется аналитический вид событий их связности

$$S_1 = l_1 l_3 l_7, S_2 = l_1 l_2 l_4 l_6, S_3 = l_1 l_2 l_5 l_7, S_4 = l_1 l_3 l_4 l_5 l_6.$$

Отметим, что допустимы и эквивалентные записи в формах номеров ребер

$$S_1 = 1 \cdot 3 \cdot 7, S_2 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6, S_3 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7, S_4 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6,$$

и инцидентных им вершин



■ *Рис. 4.* Двухполюсный граф исследуемой сети связи  
 ■ *Fig. 4.* Two-terminal graph of the studied communication network

$$S_1 = 12 \cdot 26 \cdot 56, S_2 = 12 \cdot 23 \cdot 34 \cdot 45,$$

$$S_3 = 12 \cdot 23 \cdot 36 \cdot 56, S_4 = 12 \cdot 26 \cdot 34 \cdot 36 \cdot 45,$$

где  $\cdot$  — упрощенная запись операции  $\cap$  пересечения событий, а все номера вершин и ребер упорядочены в порядке невозрастания.

Пересечение событий несвязности первых двух путей

$$\overline{S_1 S_2} = \overline{l_1 l_3 l_7 l_2 l_4 l_6}.$$

Использование процедуры расщепления (1) позволяет получить следующее объединение независимых событий:

$$\overline{S_1 S_2} = \overline{l_1} \cup \overline{l_1 l_3 l_7 l_2 l_4 l_6}.$$

Пересечение событий несвязности первых трех путей

$$\begin{aligned} \overline{S_1 S_2 S_3} &= \overline{(l_1 \cup l_1 l_3 l_7 l_2 l_4 l_6) l_1 l_2 l_5 l_7} = \\ &= \overline{l_1 l_2 l_5 l_7} \cup \overline{l_1 l_3 l_7 l_2 l_4 l_6 l_1 l_2 l_5 l_7}. \end{aligned}$$

Применение поглощения (2) ко второму члену в объединении

$$\overline{S_1 S_2 S_3} = \overline{l_1 l_2 l_5 l_7} \cup \overline{l_1 l_3 l_7 l_2 l_4 l_6 l_2 l_5 l_7}$$

с последующим однократным расщеплением (1) первого члена и двукратным вторым делает справедливым объединение независимых событий

$$\begin{aligned} \overline{S_1 S_2 S_3} &= \overline{l_1} \cup \overline{l_1 l_3 l_7} (\overline{l_2} \cup \overline{l_2 l_4 l_6 l_5 l_7}) = \\ &= \overline{l_1} \cup \overline{l_1 l_2 l_3 l_7} \cup \overline{l_1 l_2 l_3 l_7 l_4 l_6 l_5 l_7} = \\ &= \overline{l_1} \cup \overline{l_1 l_2 l_3 l_7} \cup \overline{l_1 l_2 l_4 l_6} (\overline{l_7} \cup \overline{l_7 l_3 l_5}) = \\ &= \overline{l_1} \cup \overline{l_1 l_2 l_3 l_7} \cup \overline{l_1 l_2 l_4 l_6 l_7} \cup \overline{l_1 l_2 l_7 l_3 l_4 l_6 l_5}. \end{aligned}$$

Пересечение событий несвязности всех четырех путей

$$\begin{aligned} \overline{S_1 S_2 S_3 S_4} &= (\overline{l_1} \cup \overline{l_1 l_2 l_3 l_7} \cup \overline{l_1 l_2 l_4 l_6 l_7} \cup \\ &\cup \overline{l_1 l_2 l_7 l_3 l_4 l_6 l_5}) \overline{l_1 l_3 l_4 l_5 l_6} = \\ &= \overline{l_1 l_3 l_4 l_5 l_6} \cup \overline{l_1 l_2 l_3 l_7 l_1 l_3 l_4 l_5 l_6} \cup \\ &\cup \overline{l_1 l_2 l_4 l_6 l_7 l_1 l_3 l_4 l_5 l_6} \cup \overline{l_1 l_2 l_7 l_3 l_4 l_6 l_5 l_1 l_3 l_4 l_5 l_6}. \end{aligned}$$

Применение поглощения (2) ко второму, третьему и четвертому членам в объединении

$$\begin{aligned} \overline{S_1 S_2 S_3 S_4} &= \overline{l_1 l_3 l_4 l_5 l_6} \cup \overline{l_1 l_2 l_3 l_7 l_3 l_4 l_5 l_6} \cup \\ &\cup \overline{l_1 l_2 l_4 l_6 l_7 l_3 l_4 l_5 l_6} \cup \overline{l_1 l_2 l_7 l_3 l_4 l_6 l_5 l_3 l_4 l_5 l_6} \end{aligned}$$

с последующим однократным расщеплением (1) всех членов делает справедливым объединение независимых событий

$$\begin{aligned} \overline{S} &= \overline{S_1 S_2 S_3 S_4} = \overline{l_1} \cup \overline{l_1 l_2} (\overline{l_3} \cup \overline{l_3 l_7 l_4 l_5 l_6}) \cup \\ &\cup \overline{l_1 l_2 l_4 l_6 l_7} \cup \overline{l_1 l_2 l_7 l_3 l_4 l_6 l_5} = \overline{l_1} \cup \overline{l_1 l_2 l_3} \cup \\ &\cup \overline{l_1 l_2 l_4 l_5 l_6 l_7} \cup \overline{l_1 l_2 l_4 l_6 l_7} \cup \overline{l_1 l_2 l_7 l_3 l_4 l_6 l_5}, \quad (5) \end{aligned}$$

которое, по сути, и является аналитическим видом события  $\overline{S}$  несвязности графа  $G$ .

Отметим, что в результирующем выражении оказалось всего пять членов в объединении, что существенно ниже количества для общего случая (см. рис. 3).

### Заключение

Таким образом, в работе доказана возможность устранения повторяющихся рутинных процедур, свойственных методам, использующим многопеременную инверсию, путем рассмотрения не объединения событий связности (несвязности), вырождающегося в сумму несовместных произведений, а пересечения противоположных событий, приводящего также к подобной сумме, но для получения которой нет необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проанализированными [33, 43, 47, 53, 54]. Полученные аналитические соотношения могут быть применены при анализе надежности, живучести или устойчивости сложноразветвленных телекоммуникационных сетей [25, 45, 46].

### Литература

1. Mateti P., Deo N. On algorithms for enumerating all circuits of a graph. *SIAM J. Comput.*, 1976, vol. 5, no. 1, pp. 90–99. doi:https://doi.org/10.1137/0205007

2. Char J. Generation of trees, two-trees, and storage of master forests. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1968, vol. 15, iss. 3, pp. 228–238. doi:https://doi.org/10.1109/TCT.1968.1082817
3. Мигов Д. А. Декомпозиция сети по сечениям при расчете ее надежности. *Прикладная дискретная математика*, 2020, № 47, с. 62–86. doi:https://doi.org/10.17223/20710410/47/6
4. Valiant L. The complexity of enumeration and reliability problems. *SIAM J. Comput.*, 1979, vol. 8, no. 3, pp. 410–421. doi:https://doi.org/10.1137/0208032
5. Page L. V., Perry J. E. A practical implementation of the factoring theorem for network reliability. *IEEE Trans. Reliability*, 1988, vol. 37, no. 3, pp. 259–267. doi:https://doi.org/10.1109/24.3752
6. Рябинин И. А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем. *Автоматика и телемеханика*, 2003, т. 7, с. 178–186. doi:https://doi.org/10.1023/A:1024798521540
7. Satyanarayana A., Wood R. K. A linear-time algorithm for computing k-terminal reliability in series-parallel networks. *SIAM J. Comput.*, 1985, vol. 18, pp. 818–883. doi:https://doi.org/10.1137/0214057
8. Shooman A. M., Kershenbaum A. Methods for communication-network reliability analysis: probabilistic graph reduction. *IEEE Proc. Reliability and Maintainability Symp.*, 1992, Las Vegas, USA, N.Y., IEEE Press, 1992, pp. 441–448. doi:https://doi.org/10.1109/ARMS.1992.187862
9. Wood R. K. A factoring algorithm using polygon-to-chain reductions for computing k-terminal network reliability. *Networks*, 1985, vol. 15, no. 2, pp. 173–190. doi:https://doi.org/10.1002/net.3230150204
10. Levendovszky J., Jereb L., Elek Zs., and Vesztergombi Gy. Adaptive statistical algorithms in network reliability analysis. *Performance Evaluation*, 2002, vol. 48, no. 1–4, pp. 225–236. doi:https://10.1016/s0166-5316(02)00038-x
11. Цицашвили Г. Ш., Осипова М. А., Лосев А. С. Вывод асимптотических констант для вероятности несвязности планарного взвешенного графа. *Прикладная дискретная математика*, 2014, № 2(24), с. 97–100.
12. Цицашвили Г. Ш., Осипова М. А., Лосев А. С. Асимптотика вероятности связности графа с низконадёжными ребрами. *Прикладная дискретная математика*, 2013, № 1(19), с. 93–98.
13. Цицашвили Г. Ш., Осипова М. А., Лосев А. С. Асимптотики вероятностей связности пар вершин графа. *Прикладная дискретная математика*, Прилож., 2013, № 6, с. 90–92.
14. Цицашвили Г. Ш., Лосев А. С. Связность планарного графа с высоконадёжными ребрами. *Прикладная дискретная математика*, 2012, № 3(17), с. 103–107.
15. Chen Y., Li J., and Chen J. A new algorithm for network probabilistic connectivity. *Proc. IEEE Military Communications Conf.*, N.Y., IEEE Press, 1999, vol. 2, pp. 920–923. doi:https://10.1109/MILCOM.1999.821337
16. Reichelt D., Rothlauf F. Reliable communication network design with evolutionary algorithms. *International Journal of Computational Intelligence and Applications*, 2005, vol. 5, pp. 251–266. doi:10.1142/S146902680500160X
17. Родионов А. С., Родионова О. К. Некоторые методы ускорения расчета надежности информационных сетей. *Тр. 30-й Междунар. конф. «Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе» (IT+SF'2003)*, Гурзуф, Украина, 2003; Запорожье, Изд-во Запорож. ун-та, 2003, с. 215–217.
18. Мигов Д. А. Формулы для быстрого расчета вероятности связности подмножества вершин в графах небольшой размерности. *Проблемы информатики*, 2010, № 2(6), с. 10–17.
19. Tittmann P. Partitions and network reliability. *Discr. Appl. Math.*, 1999, vol. 95, no. 1–3, pp. 445–453.
20. Филин Б. П. *Методы анализа структурной надежности сетей связи*. М., Радио и связь, 1988. 208 с.
21. Филин Б. П. Об аналитическом методе приближенного вычисления надежности сложных систем. *Автоматика и телемеханика*, 1982, № 11, с. 159–170.
22. Won J.-M., Karray F. Cumulative update of all-terminal reliability for faster feasibility decision. *IEEE Trans. Reliability*, 2010, vol. 59, no. 3, pp. 551–562. doi:https://doi.org/10.1109/TR.2010.2055924
23. Rodionov A., Migov D., and Rodionov O. Improvements in the efficiency of cumulative updating of all terminal network reliability. *IEEE Trans. Reliability*, 2012, vol. 61, no. 2, pp. 460–465. doi:https://doi.org/10.1109/TR.2012.2196172
24. Martinez S. P., Calvino B. O., Rocco S. C. M. All-terminal reliability evaluation through a Monte Carlo simulation based on an MPI implementation. *European Safety and Reliability Conference: Advances in Safety, Reliability and Risk Management (PSAM 2011/ESREL 2012)*, Helsinki, 2012, pp. 1–6.
25. Silva J., Gomes T., Tipper D., Martins L., Kounev V. An effective algorithm for computing all-terminal reliability bounds. *Networks*, vol. 66, iss. 4, pp. 282–295. doi:10.1002/net.21634
26. Abraham J. A. An improved algorithm for network reliability. *IEEE Trans Reliab*, 1979, vol. R-28, pp. 58–61. doi:https://doi.org/10.1109/TR.1979.5220476
27. Locks M. O. A minimizing algorithm for sum of disjoint products. *IEEE Trans Reliab*, 1987, vol. R-36, pp. 445–453. doi:https://doi.org/10.1109/TR.1987.5222436
28. Wilson J. M. An improved minimizing algorithm for sum of disjoint products. *IEEE Trans Reliab*, 1990, vol. 39, pp. 42–45. doi:https://doi.org/10.1109/24.52639



29. **Beichelt F., Spross L.** An improved Abraham-method for generating disjoint sums. *IEEE Trans Reliab*, 1987, vol. R-36, pp. 70–74. doi:<https://doi.org/10.1109/TR.1987.5222298>
30. **Beichelt F., Spross L.** Comment on “An improved Abraham-method for generating disjoint sums”. *IEEE Trans Reliab*, 1989, vol. 38, pp. 422–424. doi:<https://doi.org/10.1109/24.46454>
31. **Heidtmann K. D.** Smaller sums of disjoint products by subproduct inversion. *IEEE Trans Reliab*, 1989, vol. 38, pp. 305–311. doi:<https://doi.org/10.1109/24.44172>
32. **Gomes T., Craveirinha J.** An alternative method for calculating the probability of an union of events. *European Conference on System Dependability and Safety (ESRA 2002/lambda-Mu13)*, Lyon, France, March 19–21, 2002, vol. 2, pp. 426–430.
33. **Chaturvedi S. K.** *Network Reliability Measures and Evaluation*. Scrivener Publishing LLC, 2016. 237 p. doi:<https://doi.org/10.1002/9781119224006>
34. **Рябинин И. А., Черкесов Г. Н.** *Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем*. М., Радио и связь, 1981. 264 с.
35. **Батенков К. А.** Числовые характеристики структур сетей связи. *Труды СПИИРАН*, 2017, № 4 (53), с. 5–28. <https://doi.org/10.15622/sp.53.1>
36. **Батенков К. А., Батенков А. А.** Анализ и синтез структур сетей связи по детерминированным показателям устойчивости. *Труды СПИИРАН*, 2018, № 3 (58), с. 128–159. <https://doi.org/10.15622/sp.58.6>
37. **Shengjie Xu, Yi Qian, Rose Qingyang Hu.** Reliable and resilient access network design for advanced metering infrastructures in smart grid. *IET Smart Grid*, 2018, vol. 1, iss. 1, p. 24–30. doi:[10.1049/iet-stg.2018.0008](https://doi.org/10.1049/iet-stg.2018.0008)
38. **Xu S., Qian Y., Hu R. Q.** A data-driven preprocessing scheme on anomaly detection in big data applications. *Proc. in 2017 IEEE Conf. on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPS)*, Atlanta, GA, USA, May 2017, pp. 814–819. <https://doi.org/10.1109/INFOCOMW.2017.8116481>
39. **Ye F., Qian Y., Hu R. Q., et al.** Reliable energy-efficient uplink transmission for neighborhood area networks in smart grid. *IEEE Trans. Smart Grid*, 2015, vol. 6, iss. 5, pp. 2179–2188. <https://doi.org/10.1109/TSG.2015.2392130>
40. **Ye F., Qian Y., Hu R. Q.** Energy efficient self-sustaining wireless neighborhood area network design for smart grid. *IEEE Trans. Smart Grid*, 2015, vol. 6, iss. 1, pp. 220–229. <https://doi.org/10.1109/TSG.2014.2344659>
41. **Ye F., Liang Y., Zhang H., et al.** Design and analysis of a wireless sensor based monitoring network for transmission lines in smart grid. *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, 2016, vol. 16, iss. 10, pp. 1209–1220.
42. **Xu S., Qian Y.** Quantitative study of reliable communication infrastructure in smart grid NAN. *Proc. in Design of Reliable Communication Networks*, Kansas City, MO, USA, 2015, pp. 93–94. <https://doi.org/10.1109/DRCN.2015.7148994>
43. **Zuev K. M., Wu S. & Beck J. L.** Network reliability problem and its efficient solution by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2015, vol. 40, pp. 25–35. doi:[10.1016/J.PROBENGMECH.2015.02.002](https://doi.org/10.1016/J.PROBENGMECH.2015.02.002)
44. **ГОСТ Р 53111–2008.** *Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки*. М., Стандартинформ, 2009. 16 с.
45. **Zhang H. C., Xu D. L., Lu C., Qi E. R., Tian C., Wu Y. S.** Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport. *Ocean Eng.*, 2017, vol. 129, pp. 46–56. doi:[10.1016/j.oceaneng.2016.11.011](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.11.011)
46. **Pino W., Gomes T., Kooij R.** A comparison between two all-terminal reliability algorithms. *Journal of Advances in Computer Networks*, 2015, vol. 3, no. 4, pp. 284–290. <https://doi.org/10.18178/JACN.2015.3.4.183>
47. **Paredes R., Duenas-Osorio L., Meel K. S., Vardi M. Y.** *Network Reliability Estimation in Theory and Practice*. Preprint submitted to Reliability Engineering & System Safety, 2018. 26 p.
48. **Батенков А. А., Батенков К. А., Фокин А. Б.** Методы формирования множеств состояний телекоммуникационных сетей для различных мер связности. *Труды СПИИРАН*, 2020, т. 19, № 3, с. 644–673. <https://doi.org/10.15622/sp.2020.19.3.7>
49. **Батенков К. А.** Точные и граничные оценки вероятностей связности сетей связи на основе метода полного перебора типовых состояний. *Труды СПИИРАН*, 2019, т. 18, № 5, с. 1093–1118. <https://doi.org/10.15622/sp.2019.18.5.1093-1118>
50. **Райгородский А. М.** Модели случайных графов и их применения. *Труды МФТИ*, 2010, т. 2, № 4, с. 130–140.
51. **Lin M., Ting C.** A polynomial-time algorithm for computing K-terminal residual reliability of d-trapezoid graphs. *Inf. Process. Lett.*, 2015, vol. 115, iss. 2, pp. 371–376. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2014.10.013>
52. **Батенков А. А., Батенков К. А., Фокин А. Б.** Формирование сечений телекоммуникационных сетей для анализа их устойчивости с различными мерами связности. *Информатика и автоматизация*, 2021, № 2 (20), с. 371–406. <https://doi.org/10.15622/ia.2021.20.2.5>
53. **Housni K.** An efficient algorithm for enumerating all minimal paths of a graph. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, pp. 450–460. doi:[10.14569/IJACSA.2019.0100159](https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100159)
54. **Bai G. H., Tian Z. G., Zuo M. J.** An improved algorithm for finding all minimal paths in a network. *Reliability Engineering and System Safety*, 2016, vol. 150, pp. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.res.2016.01.011>

UDC 004.722

doi:10.31799/1684-8853-2021-6-53-63

**Analysis of the probability of connectivity of a telecommunications network based on the reduction of several non-connectivity events to a union of independent events**A. A. Batenkov<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-7515-5774K. A. Batenkov<sup>b</sup>, Dr. Sc., Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0001-6083-1242, pustur@yandex.ruA. B. Fokin<sup>b</sup>, Researcher, orcid.org/0000-0002-2187-7325<sup>a</sup>Oryol State University named after I. S. Turgenev, 95, Komsomolskaya St., 302026, Oryol, Russian Federation<sup>b</sup>Academy of Federal Guard Service of Russian Federation, 35, Priborostroitelnaya St., 302015, Oryol, Russian Federation

**Introduction:** For large and structurally complex telecommunication networks, calculating the connectivity probability turns out to be a very cumbersome and time-consuming process due to the huge number of elements in the resulting expression. The most expedient way out of this situation is a method based on the representation of a network connectivity event in the form of sums of products of incompatible events. However, this method also requires performing additional operations on sets in some cases. **Purpose:** To eliminate the main disadvantages of the method using multi-variable inversion. **Results:** It is shown that the connectivity event of a graph should be interpreted as a union of connectivity events of all its subgraphs, which leads to the validity of the expression for the connectivity event of the network in the form of a union of connectivity events of typical subgraphs (path, backbone, and in general, a multi-pole tree) of the original random graph. An iterative procedure is proposed for bringing a given number of connectivity events to the union of independent events by sequentially adding subgraph disjoint events. The possibility of eliminating repetitive routine procedures inherent in methods using multi-variable inversion is proved by considering not the union of connectivity events (incoherence) degenerating into the sum of incompatible products, but the intersection of opposite events, which also leads to a similar sum. However, to obtain this sum, there is no need to perform a multi-variable inversion for each of the terms over all those previously analyzed. **Practical relevance:** The obtained analytical relations can be applied in the analysis of reliability, survivability or stability of complex telecommunications networks.

**Keywords** — probability of connectivity, graph, telecommunications network, multi-variable inversion, form of transition to substitution.

**For citation:** Batenkov A. A., Batenkov K. A., Fokin A. B. Analysis of the probability of connectivity of a telecommunications network based on the reduction of several non-connectivity events to a union of independent events. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 6, pp. 53–63 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2021-6-53-63

**References**

- Mateti P., Deo N. On algorithms for enumerating all circuits of a graph. *SIAM J. Comput.*, 1976, vol. 5, no. 1, pp. 90–99. doi:https://doi.org/10.1137/0205007
- Char J. Generation of trees, two-trees, and storage of master forests. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1968, vol. 15, iss. 3, pp. 228–238. doi:https://doi.org/10.1109/TCT.1968.1082817
- Migov D. A. Vertex decomposition to calculate the network probabilistic connectivity. *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2020, no. 47, pp. 62–86 (In Russian). doi:https://doi.org/10.17223/20710410/47/6
- Valiant L. The complexity of enumeration and reliability problems. *SIAM J. Comput.*, 1979, vol. 8, no. 3, pp. 410–421. doi:https://doi.org/10.1137/0208032
- Page L. B., Perry J. E. A practical implementation of the factoring theorem for network reliability. *IEEE Trans. Reliability*, 1988, vol. 37, no. 3, pp. 259–267. doi:https://doi.org/10.1109/24.3752
- Ryabinin I. A. Logical-probabilistic calculus: A tool for studying the reliability and safety of structurally complex systems. *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, no. 7, pp. 1177–1185. doi:https://doi.org/10.1023/A:1024798521540
- Satyanarayana A., Wood R. K. A linear-time algorithm for computing K-terminal reliability in series-parallel networks. *SIAM J. Comput.*, 1985, vol. 18, pp. 818–883. doi:https://doi.org/10.1137/0214057
- Shooman A. M., Kershbaum A. Methods for communication-network reliability analysis: probabilistic graph reduction. *IEEE Proc. Reliability and Maintainability Symp.*, 1992, Las Vegas, USA, N.Y., IEEE Press, 1992, pp. 441–448. doi:https://doi.org/10.1109/ARMS.1992.187862
- Wood R. K. A factoring algorithm using polygon-to-chain reductions for computing k-terminal network reliability. *Networks*, 1985, vol. 15, no. 2, pp. 173–190. doi:https://doi.org/10.1002/net.3230150204
- Levendovszky J., Jereb L., Elek Zs., and Vesztergombi Gy. Adaptive statistical algorithms in network reliability analysis. *Performance Evaluation*, 2002, vol. 48, no. 1–4, pp. 225–236. doi:https://10.1016/s0166-5316(02)00038-x
- Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A., Losev A. S. Proof of asymptotic constants in disconnection probability for weighted planar graph. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2014, no. 2(24), pp. 97–100 (In Russian).
- Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A., Losev A. S. Asymptotics for connectivity probability of graph with low reliable arcs. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2013, no. 1(19), pp. 93–98 (In Russian).
- Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A., Losev A. S. Asymptotics of connectivity probabilities for pairs of graph nodes. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, Suppl., 2013, no. 6, pp. 90–92 (In Russian).
- Tsitsiashvili G. Sh., Losev A. S. Connectivity of the planar graph with highly reliable edges. *Prikladnaya diskretnaya matematika*, 2012, no. 3(17), pp. 103–107 (In Russian).
- Chen Y., Li J., and Chen J. A new algorithm for network probabilistic connectivity. *Proc. IEEE Military Communications Conf.*, N.Y., IEEE Press, 1999, vol. 2, pp. 920–923. doi:https://10.1109/MILCOM.1999.821337
- Reichelt D., Rothlauf F. Reliable communication network design with evolutionary algorithms. *International Journal of Computational Intelligence and Applications*, 2005, vol. 5, pp. 251–266. doi:10.1142/S146902680500160X
- Rodionov A. S. and Rodionova O. K. Some methods for speeding up the calculation of the reliability of information networks. *Proc. 30th Int. Conf. "Information Technologies in Science, Education, Telecommunications and Business" (IT+SE'2003)*, Gurzuf, Ukraine, 2003; Zaporozhye, Zaporozhye State University Publ., 2003, pp. 215–217 (In Russian).
- Migov D. S. Formulas for quickly calculating the probabilistic connectivity of a subset of vertices in graphs of small dimension. *Problemy informatiki*, 2010, no. 2 (6), pp. 10–17 (In Russian).
- Tittmann P. Partitions and network reliability. *Discr. Appl. Math.*, 1999, vol. 95, no. 1–3, pp. 445–453.

20. Filin B. P. *Metody analiza strukturnoj nadezhnosti setej svyazi* [Methods for analyzing the structural reliability of communication networks]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1988. 208 p. (In Russian).
21. Filin B. P. On an analytical method for approximate computation of reliability of complex systems. *Automation and Remote Control*, no. 11, pp. 159–170 (In Russian).
22. Won J.-M., Karray F. Cumulative update of all-terminal reliability for faster feasibility decision. *IEEE Trans. Reliability*, 2010, vol. 59, no. 3, pp. 551–562. doi:<https://doi.org/10.1109/TR.2010.2055924>
23. Rodionov A., Migov D., and Rodionov O. Improvements in the efficiency of cumulative updating of all terminal network reliability. *IEEE Trans. Reliability*, 2012, vol. 61, no. 2, pp. 460–465. doi:<https://doi.org/10.1109/TR.2012.2196172>
24. Martinez S. P., Calvino B. O., Rocco S. C. M. All-terminal reliability evaluation through a Monte Carlo simulation based on an MPI implementation. *European Safety and Reliability Conference: Advances in Safety, Reliability and Risk Management (PSAM 2011/ESREL 2012)*, Helsinki, 2012, pp. 1–6.
25. Silva J., Gomes T., Tipper D., Martins L., Kounev V. An effective algorithm for computing all-terminal reliability bounds. *Networks*, vol. 66, iss. 4, pp. 282–295. doi:[10.1002/net.21634](https://doi.org/10.1002/net.21634)
26. Abraham J. A. An improved algorithm for network reliability. *IEEE Trans Reliab*, 1979, vol. R-28, pp. 58–61. doi:<https://doi.org/10.1109/TR.1979.5220476>
27. Locks M. O. A minimizing algorithm for sum of disjoint products. *IEEE Trans Reliab*, 1987, vol. R-36, pp. 445–453. doi:<https://doi.org/10.1109/TR.1987.5222436>
28. Wilson J. M. An improved minimizing algorithm for sum of disjoint products. *IEEE Trans Reliab*, 1990, vol. 39, pp. 42–45. doi:<https://doi.org/10.1109/24.52639>
29. Beichelt F., Spross L. An improved Abraham-method for generating disjoint sums. *IEEE Trans Reliab*, 1987, vol. R-36, pp. 70–74. doi:<https://doi.org/10.1109/TR.1987.5222298>
30. Beichelt F., Spross L. Comment on “An improved Abraham-method for generating disjoint sums”. *IEEE Trans Reliab*, 1989, vol. 38, pp. 422–424. doi:<https://doi.org/10.1109/24.46454>
31. Heidtmann K. D. Smaller sums of disjoint products by sub-product inversion. *IEEE Trans Reliab*, 1989, vol. 38, pp. 305–311. doi:<https://doi.org/10.1109/24.44172>
32. Gomes T., Craveirinha J. An alternative method for calculating the probability of an union of events. *European Conference on System Dependability and Safety (ESRA 2002/lambda-Mu13)*, Lyon, France, March 19–21, 2002, vol. 2, pp. 426–430.
33. Chaturvedi S. K. *Network Reliability Measures and Evaluation*. Scrivener Publishing LLC, 2016. 237 p. doi:<https://doi.org/10.1002/9781119224006>
34. Ryabinin I. A., Cherkesov G. N. *Logiko-veroyatnostnye metody issledovaniya nadezhnosti strukturno-slozhnykh sistem* [Logical-probabilistic methods for studying the reliability of structurally complex systems]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1981. 264 p. (In Russian).
35. Batenkov K. A. Numeric features of networking. *SPIIRAS Proceedings*, 2017, vol. 4(53), pp. 5–28 (In Russian). <https://doi.org/10.15622/sp.53.1>
36. Batenkov K. A., Batenkov A. A. Analysis and synthesis of communication network structures according to the determined stability indicators. *SPIIRAS Proceedings*, 2018, vol. 3(58), pp. 128–159 (In Russian). <https://doi.org/10.15622/sp.58.6>
37. Shengjie Xu, Yi Qian, Rose Qingyang Hu. Reliable and resilient access network design for advanced metering infrastructures in smart grid. *IET Smart Grid*, 2018, vol. 1, iss. 1, p. 24–30. doi:[10.1049/iet-stg.2018.0008](https://doi.org/10.1049/iet-stg.2018.0008)
38. Xu S., Qian Y., Hu R. Q. A data-driven preprocessing scheme on anomaly detection in big data applications. *Proc. in 2017 IEEE Conf. on Computer Communications Workshops (INFOCOM WKSHPs)*, Atlanta, GA, USA, May 2017, pp. 814–819. <https://doi.org/10.1109/INFOCOMW.2017.8116481>
39. Ye F., Qian Y., Hu R. Q., et al. Reliable energy-efficient up-link transmission for neighborhood area networks in smart grid. *IEEE Trans. Smart Grid*, 2015, vol. 6, iss. 5, pp. 2179–2188. <https://doi.org/10.1109/TSG.2015.2392130>
40. Ye F., Qian Y., Hu R. Q. Energy efficient self-sustaining wireless neighborhood area network design for smart grid. *IEEE Trans. Smart Grid*, 2015, vol. 6, iss. 1, pp. 220–229. <https://doi.org/10.1109/TSG.2014.2344659>
41. Ye F., Liang Y., Zhang H., et al. Design and analysis of a wireless sensor based monitoring network for transmission lines in smart grid. *Wirel. Commun. Mob. Comput.*, 2016, vol. 16, iss. 10, pp. 1209–1220.
42. Xu S., Qian Y. Quantitative study of reliable communication infrastructure in smart grid NAN. *Proc. in Design of Reliable Communication Networks*, Kansas City, MO, USA, 2015, pp. 93–94. <https://doi.org/10.1109/DRCN.2015.7148994>
43. Zuev K. M., Wu S., Beck J. L. Network reliability problem and its efficient solution by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2015, vol. 40, pp. 25–35. doi:[10.1016/j.PROBENGMECH.2015.02.002](https://doi.org/10.1016/j.PROBENGMECH.2015.02.002)
44. GOST R 53111–2008. *Stability of the public communication network. Requirements and verification methods*. Moscow, Standardinform Publ., 2009. 16 p.
45. Zhang H. C., Xu D. L., Lu C., Qi E. R., Tian C., Wu Y. S. Connection effect on amplitude death stability of multi-module floating airport. *Ocean Eng.*, 2017, vol. 129, pp. 46–56. doi:[10.1016/j.oceaneng.2016.11.011](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.11.011)
46. Pino W., Gomes T., Kooij R. A comparison between two all-terminal reliability algorithms. *Journal of Advances in Computer Networks*, 2015, vol. 3, no. 4, pp. 284–290. <https://doi.org/10.18178/JACN.2015.3.4.183>
47. Paredes R., Duenas-Osorio L., Meel K. S., Vardi M. Y. *Network Reliability Estimation in Theory and Practice*. Preprint submitted to Reliability Engineering & System Safety, 2018. 26 p.
48. Batenkov K. A., Batenkov A. A., Fokin A. B. Methods for generating sets of telecommunication network states for various connectivity measures. *SPIIRAS Proceedings*, 2020, vol. 19, no. 3, pp. 644–673 (In Russian). doi:[10.15622/sp.2020.19.3.7](https://doi.org/10.15622/sp.2020.19.3.7)
49. Batenkov K. A. Accurate and boundary estimate of communication network connectivity probability based on model state complete enumeration method. *SPIIRAS Proceedings*, 2019, vol. 18, no. 5, pp. 1093–1118 (In Russian). <https://doi.org/10.15622/sp.2019.18.5.1093-1118>
50. Raigorodskiy A. M. Random graph models and their applications. *Trudy MFTI*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 130–140 (In Russian).
51. Lin M., Ting C. A polynomial-time algorithm for computing K-terminal residual reliability of d-trapezoid graphs'. *Inf. Process. Lett.*, 2015, vol. 115, iss. 2, pp. 371–376. <https://doi.org/10.1016/j.ipl.2014.10.013>
52. Batenkov A. A., Batenkov K. A., Fokin A. B. Forming the telecommunication networks' cross-sections to analyze the latter stability with different connectivity measures. *Informatics and Automation*, 2021, vol. 20, no. 2, pp. 371–406 (In Russian). <https://doi.org/10.15622/ia.2021.20.2.5>
53. Housni K. An efficient algorithm for enumerating all minimal paths of a graph. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, pp. 450–460. doi:[10.14569/IJACSA.2019.0100159](https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100159)
54. Bai G. H., Tian Z. G., Zuo M. J. An improved algorithm for finding all minimal paths in a network. *Reliability Engineering and System Safety*, 2016, vol. 150, pp. 1–10. <https://doi.org/10.1016/j.res.2016.01.011>