



Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов

А. А. Ефремов^а, канд. физ.-мат. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-0224-2412

В. Н. Козлов^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-1552-8097, kozlov_vn@spbstu.ru

^аСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, РФ

Введение: синтез систем стабилизации программных движений объектов является актуальной задачей теории управления. Проекционно-операторные методы математического программирования служат адекватными методами синтеза управлений для указанного класса задач. **Цель:** развитие методов синтеза локально допустимых управлений для стабилизации программных движений нелинейных динамических объектов при ограничениях на фазовые координаты и управления. **Результаты:** предложен проекционный оператор управления для систем стабилизации программных движений или положений равновесия, использующий граничные значения пары множителей Лагранжа для ограничения типа неравенства и счетного числа задач конечномерного математического программирования. Для нелинейных локально управляемых разностных операторов объекта синтезированы допустимые управления, стабилизирующие программные движения при ограничениях на фазовые координаты и управления. В результате получен оператор динамической системы с проекционно-операторной обратной связью для задач стабилизации программных движений с ограничениями на векторы фазовых координат и управлений. В качестве динамического объекта для вычислительного эксперимента с синтезированным оператором использована математическая модель синхронного генератора, состоящая из системы билинейных дифференциальных уравнений с параметрами, соответствующими уравнениям в форме В. А. Веникова. Вычислительный эксперимент подтвердил теоретические обобщения, полученные в работе. **Практическая значимость:** разрабатываемые методы обобщают формулировки задач синтеза управлений для стабилизации программных движений или положений равновесия нелинейных систем управления с ограничениями на фазовые координаты и управления. Развитие проекционно-операторного метода конечномерной оптимизации имеет важное практическое значение для синтеза управлений сложными динамическими системами, включая управление совместной динамикой электромеханических и электромагнитных процессов в крупных энергетических объединениях типа Единой электроэнергетической системы Российской Федерации.

Ключевые слова – динамические системы, проекционные операторы, оптимизация, стабилизация программных движений, нелинейный разностный оператор, локально допустимые управления, ограничения на фазовые координаты и управления, синхронный генератор, математическая модель, SimInTech.

Для цитирования: Ефремов А. А., Козлов В. Н. Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 4, с. 47–55. doi:10.31799/1684-8853-2023-4-47-55, EDN: DYULZH

For citation: Efremov A. A., Kozlov V. N. Method of synthesis of locally permissible limited controls for the stabilization of program motions of dynamic objects. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 4, pp. 47–55 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-4-47-55, EDN: DYULZH

Введение

Методы стабилизации заданных программных движений динамических объектов определяют решения важных задач современной теории управления [1–3]. Для их решения широко используются барьерные функции Ляпунова [4–6], методы обратных задач динамики [7], операторные методы математического программирования [8, 9] и др. [10–12].

Операторные методы математического программирования представляются перспективными для синтеза ограниченных управлений и координат. Проекционные операторные методы позволяют обобщить формулировки задач син-

теза стабилизации программных движений или положений равновесия при ограничениях с учетом нелинейностей систем по координатам и управлениям. При этом могут быть учтены требования к локальной или интервальной условной оптимизации динамики систем.

Проекционные операторы, определенные в конечномерных или функциональных пространствах, отображают параметры и модели объектов управления, а также функционалы качества в оптимальные управления с обратной связью. Основу структуры операторов составляют проекторы на линейные многообразия и ортогональные дополнения к ним в конечномерных и бесконечномерных пространствах [13].

Операторы допустимых решений для систем стабилизации программных движений

Указанный класс проекционных операторов оптимизации разработан для задач конечно-мерного математического программирования, соответствующих целям стабилизации программных движений, имеет вид: вычислить вектор [13]

$$\mathbf{x}_* = \arg \min \left\{ \varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}, \right. \\ \left. (\mathbf{x} - \mathbf{C})^T (\mathbf{x} - \mathbf{C}) \leq r^2 \right\} \in \mathbf{R}^n, \quad (1)$$

где $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^n$ – программный вектор для стабилизируемых допустимых фазовых координат.

В работе [13] на основе принципа оптимальности, следующего из лагранжевых (граничных) элементов, получено решение задачи конечно-мерной оптимизации в виде оператора

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}^+ \mathbf{b} + \lambda (1 + \lambda)^{-1} \mathbf{P}^0 \mathbf{C}, \quad (2)$$

где $\mathbf{P}^0 = \mathbf{E}_n - \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}$ – ортогональный проектор на линейное многообразие $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$; $\mathbf{P}^+ = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$ – проектор на ортогональное дополнение к линейному многообразию. В равенстве (2) скалярный параметр λ является множителем Лагранжа для ограничения типа неравенства в задаче (1). В лемме 1 приведен аналитический вывод квадратного уравнения, определяющего пару множителей Лагранжа λ .

Лемма 1. Множители Лагранжа λ для ограничения-неравенства в операторе (2) определяются решением квадратного уравнения

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (3)$$

где коэффициенты определены равенствами

$$a = \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} - \\ - \mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - r^2, \\ b = 2a, \quad c = a + g, \quad g = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}.$$

Доказательство: Функция Лагранжа для задачи (1) имеет вид

$$L = \|\mathbf{x}\|^2 + \lambda_0^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \lambda \left((\mathbf{x} - \mathbf{C})^T (\mathbf{x} - \mathbf{C}) - r^2 \right). \quad (4)$$

Необходимые условия для функции (4) имеют вид приравненных к нулю производных функции Лагранжа по всем аргументам:

$$L'_x = 2\mathbf{x} + \mathbf{A}^T \lambda_0 + 2\lambda (\mathbf{x} - \mathbf{C}) = \mathbf{0}_n; \quad (5)$$

$$L'_{\lambda_0} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}_m; \quad (6)$$

$$L'_\lambda = (\mathbf{x} - \mathbf{C})^T (\mathbf{x} - \mathbf{C}) - r^2 = 0. \quad (7)$$

Для вычисления множителя Лагранжа λ выполнена подстановка равенства (2) в условие Лагранжа (7). После преобразований указанного условия можно получить квадратное уравнение

$$\left(\mathbf{P}^+ \mathbf{b} + \lambda (1 + \lambda)^{-1} \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - \mathbf{C} \right)^T \times \\ \times \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{b} + \lambda (1 + \lambda)^{-1} \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - \mathbf{C} \right) - r^2 = 0. \quad (8)$$

Умножив (8) на $(1 + \lambda)^2$ и выполнив поэлементное умножение, можно получить равенство

$$\mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} + 2\lambda \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} + \\ + \lambda^2 \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} - 2\lambda \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} - \\ - \lambda^2 \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} + \lambda^2 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - \\ - \lambda^2 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - 2\lambda \mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - \lambda^2 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - \\ - \lambda \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - \lambda^2 \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} + 2\lambda \mathbf{C}^T \mathbf{C} + \lambda^2 \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \\ - r^2 - 2\lambda r^2 - \lambda^2 r^2 = 0. \quad (9)$$

Преобразование (9) определяет квадратное уравнение

$$\lambda^2 \left(\mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} + \right. \\ \left. + \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - r^2 \right) + \lambda \left(2\mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - \right. \\ \left. - 2\mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} - 2\mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} + 2\mathbf{C}^T \mathbf{C} - 2\mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - 2r^2 \right) + \\ + \left(\mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} - \right. \\ \left. - \mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} - r^2 \right) = 0. \quad (10)$$

Выполнив замену переменных, можно получить значения коэффициентов

$$a = \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} - \mathbf{b}^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b} + \\ + \mathbf{C}^T \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - r^2, \\ b = 2a, \quad c = a + g, \quad g = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}.$$

С учетом полученных коэффициентов уравнение (10) принимает вид

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Лемма доказана.

Решение квадратного уравнения определяет пару множителей Лагранжа для ограничения типа неравенства $\lambda_i, i = 1, 2$, которые в силу утверждения теоремы Куна – Таккера являются положительными ($\lambda_i > 0$) для задачи максимизации и отрицательными ($\lambda_i < 0$) для задачи минимизации:

$$\lambda_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right) / 2a = \left(-1 \pm \sqrt{g/\alpha} \right).$$

Подстановка множителей Лагранжа λ_i в решение задачи (2) определяет аналитическое решение задачи программной стабилизации динамической системы (1).

Метод синтеза локально допустимых управлений для динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления

Метод синтеза указанных управлений для задачи стабилизации единственного стационарного положения равновесия или допустимого программного движения $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k, k \in N$ определен для объекта, заданного разностным оператором с ограничениями на фазовые координаты и управления.

В результате задача синтеза управлений имеет вид: вычислить обобщенный вектор фазовых координат и управлений как вектор «состояний-управлений»

$$\mathbf{z}_k^* \triangleq (\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{u}_k)^T \in \mathbf{R}^{n+m}$$

для гарантированной стабилизации программного движения объекта, заданного вектор-функцией дискретного времени \mathbf{C}_k . При этом предполагается, что для линейного объекта выполнено ранговое условие управляемости по Р. Калману

$$\text{rang } \mathbf{S} = \text{rang} \left[\mathbf{F} | \mathbf{H}\mathbf{F} | \mathbf{H}^2\mathbf{F} | \dots | \mathbf{H}^{n-1}\mathbf{F} \right] = n, n = \dim \mathbf{R}^n.$$

Для нелинейного разностного объекта, локально управляемого по Н. Н. Петрову, требуется существование такой окрестности начала координат в пространстве \mathbf{R}^n , из каждой точки которой можно перевести объект в положение $\mathbf{x} = 0$ с помощью измеримого управления за конечное время [14–17].

Пусть нелинейный стационарный локально управляемый объект определен разностным оператором

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k + \mathbf{F} \mathbf{u}_k; \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{c}_y \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{D} \in \mathbf{R}^n$ – область притяжения как множество начальных состояний, из которых система возвращается в положение равновесия. Векторы и матрицы оператора (11) имеют вид $\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{x}_k \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n, \mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^j, \mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^m, \mathbf{F} \in \mathbf{R}^{n \times m}, \mathbf{c} \in \mathbf{R}^{j \times n}; \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – матричный билинейный оператор размера $(n \times n), \mathbf{H}(0) \neq 0$.

С учетом оператора (11) линейное многообразие для задачи конечномерной операторной оптимизации запишется в виде

$$\mathbf{A} \mathbf{z}_k = \left[\mathbf{E} | -\mathbf{F} \right] \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k, \quad (12)$$

где матрица линейного многообразия в (1) с учетом оператора объекта примет вид

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{E} | -\mathbf{F} \right] \in \mathbf{R}^{n \times (n+m)},$$

вектор «состояний-управлений» определен равенством

$$\mathbf{z}_k = \left[\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{u}_k \right]^T \in \mathbf{R}^{(n+m)},$$

вектор правой части линейного многообразия

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n.$$

Таким образом, представление разностного оператора объекта в виде линейного многообразия (12) позволяет синтезировать локально допустимые управления путем сведения задачи вычисления управлений к счетному числу задач проекционной операторной оптимизации.

Задача вычисления локально допустимых управлений для дискретного объекта задана конечномерной задачей операторной оптимизации, что позволяет вычислить счетное число векторов «состояний-управлений» с обратной связью. В силу сказанного структура оператора допустимых управлений определена проекционным оператором конечномерной оптимизации (2). С учетом (12) задача конечномерного математического программирования (1) преобразуется к задаче вида: вычислить «обобщенный» вектор «состояний-управлений»

$$\mathbf{z}_k^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^* \\ \mathbf{u}_k^* \end{bmatrix} = \arg \min \left\{ \varphi(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}_k\|^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{z}_{k+1} = [\mathbf{E} \mid -\mathbf{F}] \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k = \right. \\ \left. = \mathbf{b}_k, [\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k]^T \times [\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k] \leq r^2 \right\} \in \mathbf{R}^{m+n}, k \in \mathbf{N}. \quad (13)$$

В результате из (13) определяется счетное множество решений задач математического программирования

$$\mathbf{z}_k^* = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^* \\ \mathbf{u}_k^* \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{n+m}, k \in \mathbf{N}, \quad (14)$$

которое определяет векторы «состояний-управлений»

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta)$$

как образы выпуклой линейной комбинации двух «граничных операторов»

$$\hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta) = \theta \mathbf{z}_k^*(\sigma_1) + (1 - \theta) \mathbf{z}_k^*(\sigma_2), \theta \in [0; 1] \subset \mathbf{R}, \mathbf{z}_k^*(\sigma_i) = \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \sigma_i \mathbf{P}^0 \mathbf{C} \quad (15)$$

с «параметром допустимости» $\theta \in [0; 1]$ и значениями коэффициентов

$$\alpha_k = \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C} - \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C} - \mathbf{C}^T \mathbf{C} + r^2, \quad g = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}, \quad \sigma_1 = 1 - \sqrt{\alpha/g}, \quad \sigma_2 = 1 + \sqrt{\alpha/g}.$$

Векторы $\hat{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta)$ проекционного оператора (15) включают «фильтруемые» с помощью матриц

$$\mathbf{T}_u = [0_{m \times n} \mid \mathbf{E}_{m \times m}], \quad \mathbf{T}_x = [\mathbf{E}_{n \times n} \mid 0_{n \times m}]$$

векторы управлений \mathbf{u}_k и векторы прогнозов координат \mathbf{x}_{k+1} , которые являются решениями счетного числа задач математического программирования (13), (14).

В результате из соотношений (11)–(15) следует оператор динамической системы с проекционно-операторной обратной связью для задач стабилизации программных движений с ограничениями на векторы фазовых координат и управлений

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F} \mathbf{T}_u \hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta), \\ \hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta) = \left[\theta (\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \sigma_1 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}) + (1 - \theta) (\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \sigma_2 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}) \right], \theta \in [0; 1] \subset \mathbf{R}, \quad (16)$$

где $\gamma \in \mathbf{R}$ – параметр проекционно-операторной обратной связи; $\sigma_1 = 1 - \sqrt{\alpha/g}$; $\sigma_2 = 1 + \sqrt{\alpha/g}$.

Вычислительный эксперимент

Далее приведены результаты вычислительного эксперимента на основе синтезированного оператора динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления (16).

В качестве примера динамического объекта использована математическая модель синхронного генератора, состоящая из системы билинейных дифференциальных уравнений с параметрами, соответствующими уравнениям в форме В. А. Веникова [18] в фазовом пространстве координат:

- для электромагнитных процессов как подсистемы уравнений объекта на основе дифференциальных уравнений Горева – Парка;
- для электромеханических процессов как подсистемы уравнения моментов.

При вычислении относительных значений функциональной и числовой матриц нелинейного локально управляемого динамического объекта использованы технические параметры синхронного турбогенератора ТВВ-500-2 [19].

Используя результаты, полученные в [20], векторно-матричную модель синхронного генератора в форме Коши представим в виде

$$\begin{bmatrix} i'_d \\ i'_q \\ i'_f \\ i'_{rd} \\ i'_{rq} \\ \omega' \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,59 & 10,58\omega & -0,08 & -1,03 & -4,13\omega & 0 & 0 \\ -6,78\omega & -2,3 & 2,65\omega & 2,65\omega & -2,44 & 0 & 0 \\ -1,39 & 4,09\omega & -1,58 & 3,61 & -1,6\omega & 0 & 0 \\ -6,93 & 20,44\omega & 1,38 & -6,25 & -7,98\omega & 0 & 0 \\ -14,79\omega & -5,01 & 5,78\omega & 5,78\omega & -6,25 & 0 & 0 \\ 128i_q & -128i_d & -50i_q & -50i_q & 50i_d & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,132 & 0 & 0,079 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,647 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,596 & 0 & 1,582 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7,982 & 0 & -1,38 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,777 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \\ 0 \\ 0 \\ M_{mx} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

При проведении вычислительного эксперимента параметр $\theta = 0,5009$, $r = 1$, а параметр проекционно-операторной обратной связи $\gamma = -0,015$. Обобщенный вектор стабилизируемых допустимых программных движений и управлений, задающий ограничения на фазовые координаты и управления, определен равенством

$$\mathbf{C}_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1,001 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,03 \ 0]^T \in \mathbf{R}^{14}$$

и в соответствии со структурой модели синхронного турбогенератора (17) ограничивает частоту ω и механический момент M_{mx} . Для вычисления напряжений u_d и u_q использована приближенная модель нагрузки [21].

В качестве инструментальной платформы для исследования динамической системы (16) и векторно-матричной модели синхронного генератора (17) использована среда динамического моделирования технических систем SimInTech от российского разработчика «ЗВ Сервис» [22].

С учетом структуры линейного многообразия (12) и векторно-матричной модели синхронного турбогенератора ТВВ-500-2 (17) вычисленный проектор на линейное многообразие имеет следующий вид:

$$\mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} 0,25 & 0 & 0,26 & 0,33 & 0 & 0 & 0 & -0,06 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,17 & 0 & 0 & 0,37 & 0 & 0 & 0 & -0,06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,26 & 0 & 0,68 & -0,08 & 0 & 0 & 0 & -0,06 & 0 & 0,38 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,33 & 0 & -0,08 & 0,84 & 0 & 0 & 0 & -0,08 & 0 & -0,13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,37 & 0 & 0 & 0,81 & 0 & 0 & 0 & -0,14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,06 & 0 & -0,06 & -0,08 & 0 & 0 & 0 & 0,014 & 0 & -0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,06 & 0 & 0 & -0,14 & 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0,38 & -0,13 & 0 & 0 & 0 & -0,02 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проектор на ортогональное дополнение к линейному многообразию определен равенством

$$P^+ = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 & -0,26 & -0,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,83 & 0 & 0 & -0,37 & 0 & 0 \\ -0,26 & 0 & 0,32 & 0,08 & 0 & 0 & 0 \\ -0,33 & 0 & 0,08 & 0,16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,37 & 0 & 0 & 0,19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,06 & 0 & 0,06 & 0,08 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,06 & 0 & 0 & 0,14 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & -0,38 & 0,13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

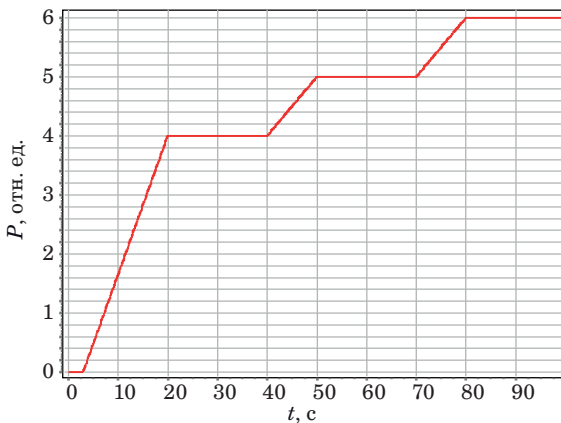
График изменения мощности в относительных единицах для синхронного генератора иллюстрирует кусочно-линейный характер с постоянными интервалами (рис. 1).

С учетом изменения мощности и заданных ограничений на фазовые координаты и управление динамика множителя Лагранжа для ограничений типа неравенства для системы (20) иллюстрируется на рис. 2.

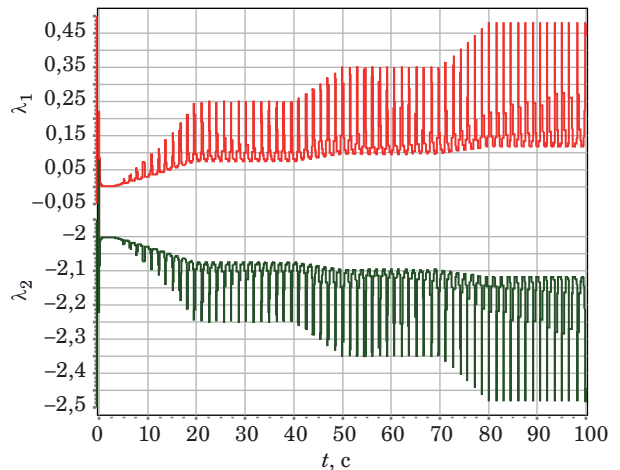
Локально допустимые управления u_f и M_{mx} , определенные оператором (16) с ограничением, заданным вектором допустимых программных движений C_k , имеют вид, представленный на рис. 3.

Изменения ограниченных фазовых координат динамической системы (16) с «графиком нагрузки» (см. рис. 1) показаны на рис. 4 и 5.

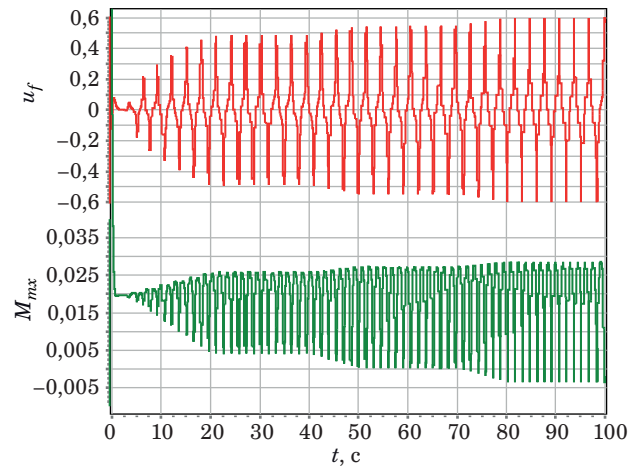
Из рис. 5 видно, что значение частоты ω , с учетом изменения мощности, соответствует допустимому вектору программных движений C_k и не превышает заданных ограничений 1,001.



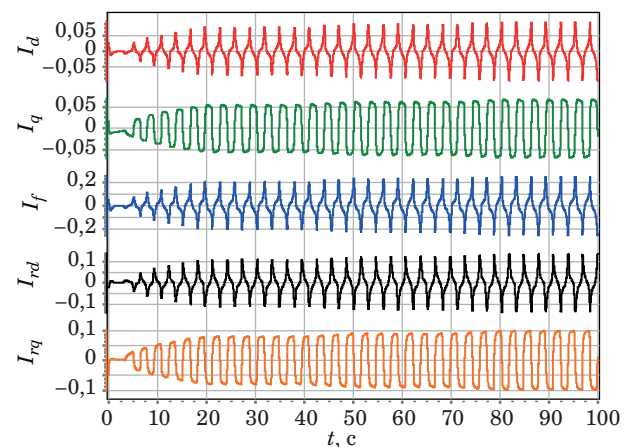
■ **Рис. 1.** Изменение мощности синхронного генератора
 ■ **Fig. 1.** Change in the power of a synchronous generator



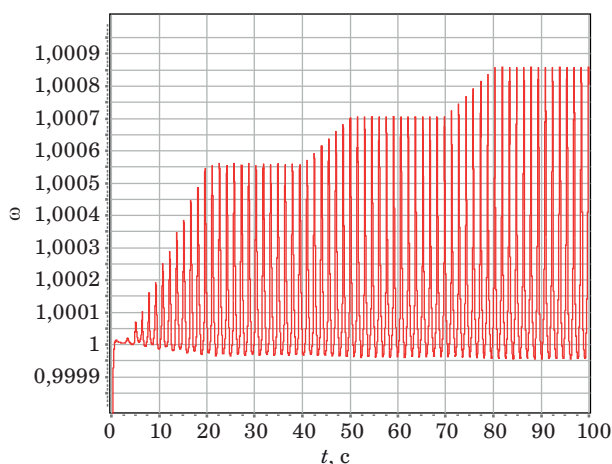
■ **Рис. 2.** Динамика пары множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbf{R}$
 ■ **Fig. 2.** Dynamics of a pair of Lagrange multipliers $\lambda \in \mathbf{R}$



■ **Рис. 3.** Синтезированные ограниченные управляющие воздействия синхронного генератора (16)
 ■ **Fig. 3.** Synthesized limited control actions of a synchronous generator (16)



■ **Рис. 4.** Динамика токов синхронного генератора
 ■ **Fig. 4.** The dynamics of the currents of the synchronous generator



■ **Рис. 5.** Динамика допустимого ограниченного изменения «частоты» ω синхронного генератора, заданного вектором программных движений C_k

■ **Fig. 5.** Dynamics of the permissible limited change in the “frequency” ω of the synchronous generator, given by the vector of program movements C_k

Литература

- Vorob'ev E. I., Mikheev A. V., Morgunenko K. O.** Construction of program motions of relative manipulation mechanisms with three degrees of freedom. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2019, no. 6, pp. 510–516. doi:10.3103/S1052618819060104
- Мещанов А. С., Бикмурзин А. М.** Стабилизация программной посадки летательных аппаратов без шасси на подвижную платформу в атмосфере при неопределенных возмущениях. Ч. 1. *Вестник технологического университета*, 2020, т. 23, № 12, с. 109–117.
- Alekseev A., Stukonog S.** An algorithm for constructing an optimal ship's path with elements of the ship's program motion systems on the course. *Transp. Bus. Russ.*, 2022, № 2, pp. 217–221. doi:10.52375/20728689_2022_2_217/issn2072-8689
- Голубев А. Е.** Стабилизация программных движений механических систем с учетом ограничений. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*, 2023, № 4, с. 153–167. doi:10.31857/S0002338823040054
- Sachan K., Padhi R.** Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler–Lagrange systems. *15th Intern. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, IEEE, Singapore, November 18–21, 2018, 2018, pp. 686–691. doi:10.1109/ICARCV.2018.8581068
- Wang X., Xu J., Lv M., Zhang L., Zhao Z.** Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy. *Nonlinear Dyn.*, 2022, vol. 110, no. 1, pp. 381–394. doi:10.1007/s11071-022-07627-9/issn0924-090X
- Голубев А. Е.** Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка. *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*, 2021, № 2, с. 126–137. doi:10.31857/S0002338820060049/issn0002-3388
- Kozlov V. N., Efremov A. A.** Operators of bounded locally optimal controls for dynamic systems. *Lect. Notes Networks Syst. Springer*, 2020, vol. 95, pp. 140–145. doi:10.1007/978-3-030-34983-7_14
- Kozlov V. N., Efremov A. A.** Projection-operator optimization of controls of dynamic objects. *J. Phys. Conf., Ser. IOP Publishing Ltd*, 2021, vol. 1864, no. 1, pp. 140–145. doi:10.1088/1742-6596/1864/1/012076/issn17426596
- Александров О. В., Козик А. А.** Минимаксная оптимизация параметров стабилизации программного полета. *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 2019, т. 3, с. 45–49.
- Andreev A. S., Kolegova L. V.** PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions. *Zhurnal Sredn. Mat. Obs.*, 2022, vol. 34, no. 3, pp. 267–279. doi:10.15507/2079-6900.24.202203.267-279/issn20796900
- Котина Е. Д., Овсянников Д. А.** Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2021, т. 17, № 2, с. 213–224. doi:10.21638/11701/spbu10.2021.210
- Козлов В. Н.** *Проекционный метод синтеза ограниченных оптимальных управлений динамических систем энергетики*. СПб., Изд-во Политехн. ун-та, 2019. 161 с. doi:10.18720/SPBPU/2/i19-277

Заключение

В работе синтезирован оператор динамической системы с проекционно-операторной обратной связью для вычисления управлений и стабилизации программных движений динамической системы с проекционно-операторной обратной связью для локально допустимого программного управления с ограничениями на фазовые координаты и управления.

На примере модели синхронного генератора, состоящей из системы билинейных дифференциальных уравнений, с параметрами, соответствующими уравнениям в форме В. А. Веникова, показана возможность применения предложенной методики для синтеза ограниченных управлений электроэнергетическими системами с проекционными операторами управления.

14. Kalman R. E. Discussion: "On the Existence of Optimal Controls" (Markus L., and Lee E. B. ASME J. Basic Eng., 1962, 84, pp. 13–20). *J. Fluids Eng.*, 1962, vol. 84. <https://asmedigitalcollection.asme.org/fluid-engineering/article/84/1/21/424598/Discussion-On-the-Existence-of-Optimal-Controls> (дата обращения: 30.05.2023).
15. Петров Н. Н. Об управляемости автономных систем. *Дифференциальные уравнения*, 1968, т. 4, № 4, с. 606–617.
16. Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Локальная управляемость и оптимальность. *Математический сборник*, 2021, т. 212, № 7, с. 3–38. doi:0.4213/sm9434
17. Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Управляемость и необходимые условия оптимальности второго порядка. *Математический сборник*, 2019, т. 210, № 1, с. 3–26. doi:10.4213/sm9013
18. Веретенников Л. П. Классификация уравнений Горева – Парка. *Электричество*, 1959, № 11, с. 13–20.
19. Неклепаев Б. Н. *Электрическая часть электростанций и подстанций*. 2-е изд. М., Энергоатомиздат, 1986. 640 с.
20. Козлов В. Н., Рябов Г. А., Ефремов А. А., Тросько И. У. Структурно-инвариантные уравнения энергообъединений для синтеза систем ограничения перетоков и регулирования напряжения. XIX Междунар. науч.-практ. конф. «Системный анализ в проектировании и управлении», Санкт-Петербург, 1–3 июля 2015 г., 2015, с. 207–217.
21. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Андриевский Б. Р., Юлдашев М. В., Юлдашев Р. В. Математическое моделирование переходных процессов гидроагрегата Саяно-Шушенской ГЭС. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2018, т. 4, № 4. <https://diffjournal.spbu.ru/RU/numbers/2018.4/article.1.5.html> (дата обращения: 25.05.2023).
22. Карташов Б. А., Шабаев Е. А., Козлов О. С., Щекатуров А. М. *SimInTech: среда динамического моделирования технических систем*. М., ДМК Пресс, 2017. 424 с.

UDC 681.51

doi:10.31799/1684-8853-2023-4-47-55

EDN: DYULZH

Method of synthesis of locally permissible limited controls for the stabilization of program motions of dynamic objects

A. A. Efremov^a, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-0224-2412V. N. Kozlov^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0003-1552-8097, kozlov_vn@spbstu.ru^aPeter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Politekhnicheskaya St., 195251, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The synthesis of systems for the stabilization of program motions of objects is an urgent task of control theory. Projection operator methods of mathematical programming are adequate methods of control synthesis for this class of problems. **Purpose:** To develop methods of synthesis of locally admissible controls for the stabilization of program motions of nonlinear dynamic objects under restrictions on the phase coordinates and controls. **Results:** We propose a projection control operator for stabilization systems of program motions or equilibrium positions is proposed, using the boundary values of a pair of Lagrange multipliers to limit the type of inequality, a countable number of finite-dimensional mathematical programming problems. We synthesize admissible controls for nonlinear locally controlled difference operators, that stabilize program motions under restrictions on phase coordinates and controls. As a result, we have obtained an operator of a dynamical system with projection operator feedback for the tasks of stabilization of program motions with restrictions on the vectors of phase coordinates and controls. We use a mathematical model of a synchronous generator as a dynamic object, for a computational experiment with a synthesized operator. The mathematical model consists of a system of bilinear differential equations with parameters corresponding to the equations in the form elaborated by V. A. Venikov. The computational experiment confirmed the theoretical generalizations obtained in the work. **Practical relevance:** The developed methods generalize the formulations of control synthesis problems for stabilizing program motions or equilibrium positions of nonlinear control systems with restrictions on phase coordinates and controls. The development of the projection operator method of finite-dimensional optimization is of great practical importance for the synthesis of controls for complex dynamic systems, including the control of the joint dynamics of electromechanical and electromagnetic processes in large energy associations such as the Unified Electric Power System of the Russian Federation.

Keywords — dynamical systems, projection operators, optimization, stabilization of program motions, nonlinear difference operator, locally admissible controls, restrictions on phase coordinates and controls, synchronous generator, mathematical model, SimInTech.

For citation: Efremov A. A., Kozlov V. N. Method of synthesis of locally permissible limited controls for the stabilization of program motions of dynamic objects. *Informatsionno-upravlyaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 4, pp. 47–55 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-4-47-55, EDN: DYULZH

References

1. Vorob'ev E. I., Mikheev A. V., Morgunenko K. O. Construction of program motions of relative manipulation mechanisms with three degrees of freedom. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2019, no. 6, pp. 510–516. doi:10.3103/S1052618819060104
2. Meshchanov A. S., Bikmurzin A. M. Stabilization of programmed landing of aircraft without chassis on mobile platform in atmosphere under uncertain perturbations: Part 1. *Herald of Technological University*, 2020, vol. 23, no. 12, pp. 109–117 (In Russian).

3. Alekseev A., Stukonog S. An algorithm for constructing an optimal ship's path with elements of the ship's program motion systems on the course. *Transp. Bus. Russ.*, 2022, no. 2, pp. 217–221. doi:10.52375/20728689_2022_2_217/issn2072-8689
4. Golubev A. E. Stabilization of programmed motions of mechanical systems subject to constraints. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2023, no. 4, pp. 153–167 (In Russian). doi:10.31857/S0002338823040054
5. Sachan K., Padhi R. Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler–Lagrange systems. *15th Intern. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, IEEE, Singapore, November 18–21, 2018, 2018, pp. 686–691. doi:10.1109/ICARCV.2018.8581068
6. Wang X., Xu J., Lv M., Zhang L., Zhao Z. Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy. *Nonlinear Dyn.*, 2022, vol. 110, no. 1, pp. 381–394. doi:10.1007/s11071-022-07627-9/issn0924-090X
7. Golubev A. E. Construction of programmed motions of constrained mechanical systems using third-order polynomials. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, no. 2, pp. 303–314 (In Russian). doi:10.31857/S0002338820060049/issn0002-3388
8. Kozlov V. N., Efremov A. A. Operators of bounded locally optimal controls for dynamic systems. *Lect. Notes Networks Syst.*, Springer, 2020, vol. 95, pp. 140–145. doi:10.1007/978-3-030-34983-7_14
9. Kozlov V. N., Efremov A. A. Projection-operator optimization of controls of dynamic objects. *J. Phys. Conf. Ser.: IOP, Publishing Ltd*, 2021, vol. 1864, no. 1, pp. 140–145. doi:10.1088/1742-6596/1864/1/012076/issn17426596
10. Aleksandrova O. V., Kozik A. A. Minimax optimization of stabilization parameters during the programmed flight. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 3, pp. 55–59 (In Russian). doi:10.3103/S0027133019030014
11. Andreev A. S., Kolegova L. V. PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions. *Zhurnal Sredn. Mat. Obs.*, 2022, vol. 34, no. 3, pp. 267–279. doi:10.15507/2079-6900.24.202203.267-279/issn20796900
12. Kotina E. D., Ovsyannikov D. A. Mathematical model of joint optimization of program and perturbed motions in discrete systems. *Vestnik of Saint Petersburg University Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, no. 2, pp. 213–224 (In Russian). doi:10.21638/11701/spbu10.2021.210
13. Kozlov V. N. *Proyektionnyy metod sinteza ogranichennykh optimal'nykh upravleniy dinamicheskikh sistem energetiki* [Projection method for the synthesis of bounded optimal controls of dynamic energy systems]. Saint-Petersburg, Politekhicheskij universitet Publ., 2019. 161 p. (In Russian).
14. Kalman R. E. Discussion: "On the Existence of Optimal Controls" (Markus L., and Lee E. B., 1962, ASME J. Basic Eng., 84, pp. 13–20). *J. Fluids Eng.*, 1962, vol. 84. Available at: <https://asmedigitalcollection.asme.org/fluidsengineering/article/84/1/21/424598/Discussion-On-the-Existence-of-Optimal-Controls> (accessed 30 May 2023).
15. Petrov N. N. Controllability of autonomous systems. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1968, vol. 4, no. 4, pp. 606–617 (In Russian).
16. Avakov E. R., Magaril-II'yaev G. G. Local controllability and optimality. *Sbornik: Mathematics*, 2021, vol. 212, no. 7, pp. 3–38 (In Russian). doi:0.4213/sm9434
17. Avakov E. R., Magaril-II'yaev G. G. Controllability and second-order necessary conditions for optimality. *Sbornik: Mathematics*, 2019, vol. 210, no. 1, pp. 3–26 (In Russian). doi:10.4213/sm9013
18. Veretennikov L. P. Classification of the Gorev – Park equations. *Elektrichestvo*, 1959, no. 11, pp. 13–20 (In Russian).
19. Neklepaev B. N. *Elektricheskaya chast' elektrostantsiy i podstantsiy*. 2-ye izd. [Electrical part of power stations and substations. 2nd ed.]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1986. 640 p. (In Russian).
20. Kozlov V. N., Ryabov G. A., Efremov A. A., Trosko I. U. Structural-invariant equations of power interconnections for the synthesis of systems for limiting flows and voltage regulation. *XIX Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya "Sistemnyy analiz v proyektirovanii i upravlenii"* [XIX Intern. Scient. and Pract. Conf. "System Analysis in Design and Management"]. Saint-Petersburg, 2015, pp. 207–217 (In Russian).
21. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Andrievsky B. R., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Mathematical modeling of transients of the hydraulic unit of the Sayano-Shushenskaya HPP. *Differential Equations and Control Processes*, 2018, vol. 4. Available at: <https://diffjournal.spbu.ru/EN/numbers/2018.4/article.1.5.html> (accessed 25 May 2023) (In Russian).
22. Kartashov B. A., Shabaev E. A., Kozlov O. S., Shchekaturov A. M. *SimInTech: sreda dinamicheskogo modelirovaniya tekhnicheskikh sistem* [SimInTech: Environment for Dynamic Simulation of Technical Systems]. Moscow, DMK Press Publ., 2017. 424 p. (In Russian).

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая Scopus и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой — различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, что снижает рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста, есть возможность провести регистрацию на 12 языках, включая русский (чтобы выбрать язык, кликните на зеленое поле сверху справа на стартовой странице): <https://orcid.org>