



Управление характеристиками системы массового обслуживания через сдвиг законов распределений

В. Н. Тарасов^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-9318-0797, v.tarasov@psuti.ru

Н. Ф. Бахарева^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-9850-7752

^аПоволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Л. Толстого ул., 23, Самара, 443010, РФ

Введение: результаты классической теории массового обслуживания используются для моделирования вычислительных систем и сетей связи, а в качестве основных характеристик при этом служат средняя задержка заявок в очереди и средняя длина очереди. Возможность регулировать такие характеристики, как время ожидания в очереди или длина очереди, могла бы привести много нового в системы передачи данных. **Цель:** представление нового класса систем массового обслуживания как систем с запаздыванием во времени для расширения области применения моделей массового обслуживания. **Методы:** для получения новых моделей массового обслуживания на основе классических систем предложен метод сдвига законов распределений в системах массового обслуживания. **Результаты:** представлены численно-аналитические решения для двух различных систем в сопоставлении с решениями, полученными с помощью имитационных моделей дискретно-событийного моделирования. Показано, что сдвиг закона распределения вправо с точки зрения теории вероятностей увеличивает математическое ожидание описываемой случайной величины и тем самым уменьшает коэффициент вариации. Известно, что среднее время ожидания требований прямо пропорционально квадратам коэффициентов вариаций временных интервалов поступления и обслуживания, и оно в системах со сдвинутыми распределениями по сравнению с обычными классическими системами уменьшится многократно. Параметры законов распределений, формирующих системы массового обслуживания, а также их числовые характеристики становятся функционально зависимыми от временного сдвига. В этом случае важнейшие характеристики системы массового обслуживания также будут зависеть от временного сдвига, и, следовательно, появится возможность управлять ими через параметр сдвига. Полученные результаты подтверждены численными расчетами, а также имитационными экспериментами в системе дискретно-событийного моделирования GPSS World. **Практическая значимость:** полученные результаты могут быть применены в теории и практике передачи данных, позволяя регулировать время ожидания в очереди и длину очереди в буферах в системах передачи данных. **Обсуждение:** в дальнейшем предстоит оценка прикладного аспекта предложенного подхода применительно к системам передачи данных. Для этого необходимо разработать экспериментальный программно-аппаратный комплекс для подтверждения полученных результатов.

Ключевые слова — системы с временным сдвигом, преобразование Лапласа, интегральное уравнение Линдли, спектральное решение, дискретно-событийное моделирование, GPSS World.

Для цитирования: Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф. Управление характеристиками системы массового обслуживания через сдвиг законов распределений. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 5, с. 55–63. doi:10.31799/1684-8853-2023-5-55-63, EDN: IVEQJM

For citation: Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Controlling queuing system characteristics through shifting the distribution laws. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 5, pp. 55–63 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-5-55-63, EDN: IVEQJM

Введение

Рассмотрим одноканальные системы массового обслуживания (СМО; Queuing Systems, QS) A/B/1 по символике Кендалла, для которых законы распределения A и B подвергнуты сдвигу. Таким образом, функции плотности, формирующие систему, имеют вид

$$a(t) = \begin{cases} a(t-t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases};$$
$$b(t) = \begin{cases} b(t-t_0), & t \geq t_0 \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases}. \quad (1)$$

Будем считать, что функции (1) принадлежат к классу функций, преобразуемых по

Лапласу. Операция временного сдвига трансформирует обычные СМО в системы с запаздыванием, а ограничение преобразуемости по Лапласу накладывается из-за применяемого спектрального метода решения задачи для получения численно-аналитических результатов.

Из-за такой трансформации коэффициенты вариаций временных интервалов для таких систем претерпевают характерные изменения, и эти системы будут относиться к наиболее общему типу G/G/1. В качестве основного метода при анализе СМО G/G/1 будем использовать давно известный метод спектрального решения интегрального уравнения Линдли относительно функции распределения времени ожидания $W(y)$ [1]:

$$W(y) = \int_0^y W(y-u) dC(u), \quad y \geq 0,$$

где $C(u)$ — функции распределения случайной величины — разности между временем обслуживания требования и временем между поступлениями двух соседних требований.

В научной литературе встречается довольно много примеров использования спектрального метода в различных областях [2, 3]. При решении интегрального уравнения Линдли спектральным методом через преобразования Лапласа $A^*(s)$, $B^*(s)$ функции плотности $a(t)$ и $b(t)$ определяется закон распределения времени ожидания. После этого определяются среднее время ожидания \bar{W} и при необходимости его моменты более высокого порядка. Для этого строится рациональная функция вида

$$A^*(-s)B^*(s) - 1 = \alpha(s)/\beta(s), \quad (2)$$

где s — комплексная переменная. Далее методика спектрального решения сводится к конструированию компонент разложения $\alpha(s)$, $\beta(s)$ и нахождению его нулей и полюсов.

В настоящей статье мы рассмотрим две системы, когда первая СМО сформирована двумя потоками, определяемыми сдвинутыми функциями распределения Эрланга вида

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha(t-t_0)} \sum_{k=0}^1 \frac{[\alpha(t-t_0)]^k}{k!}, & t \geq t_0, \alpha > 0, \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases}$$

а вторая СМО сформирована сдвинутыми экспоненциальными распределениями

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\gamma(t-t_0)}, & t \geq t_0, \gamma > 0 \\ 0, & 0 \leq t < t_0 \end{cases}$$

Причем потоки в обоих случаях имеют строго одинаковое время запаздывания t_0 . Эти СМО, в отличие от классических систем, однозначно становятся немарковскими. Выбор таких систем обусловлен тем, что в системе имитационного моделирования GPSS Word имеются качественные генераторы таких случайных последовательностей.

Как в отечественной, так и в зарубежной научной литературе авторами не найдено исследований по подобным СМО. Впервые такое исследование проведено нами [4], дальнейшее развитие тематики представлено в [5–7] и других работах. Наиболее близки по данному вопросу статьи [8, 9]. В настоящей работе использованы приемы и методы аппроксимации законов распределений

на основе метода моментов, более подробно эти подходы описаны в работах [10–13]. В [14–23] представлены наиболее интересные и значимые результаты последних лет.

Постановка и решение задачи

Пусть заданы СМО, описываемые преобразуемыми по Лапласу сдвинутыми на величину t_0 функциями плотности. Требуется получить для них численно-аналитические решения, провести вычислительный и имитационный эксперименты в целях подтверждения адекватности представленных математических моделей.

При сдвиге закона распределения вправо на величину t_0 математическое ожидание случайной величины увеличится на эту же величину, а значение коэффициента вариации, обратно пропорциональное математическому ожиданию, уменьшится. Тогда базовые знания из общей теории массового обслуживания позволят нам утверждать, что среднее время ожидания в системе уменьшится [1]. В этом будет заключаться принципиальное отличие рассматриваемых систем от классических СМО [4–7].

Из теории преобразований Лапласа для функций плотности $f(t)$, для которых существует функция

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \equiv L[f(t)],$$

известно свойство запаздывания [1]: для любого $t_0 > 0$ справедливо равенство $L[f(t-t_0)] = e^{-st_0} F^*(s)$, где $\text{Re}(s) > 0$. Тогда для основного выражения метода спектрального решения $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \alpha(s)/\beta(s)$ для СМО со сдвинутыми законами распределений с учетом свойства запаздывания имеет место равенство

$$\begin{aligned} \alpha(s)/\beta(s) &= e^{t_0 s} A^*(-s) e^{-t_0 s} B^*(s) - 1 = \\ &= A^*(-s) B^*(s) - 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда следует, что спектральное решение (2) не зависит от сдвига закона распределения и по форме совпадает с решением для классической системы. Также очевидно, что законы распределений (1) у СМО должны иметь строго одинаковое время запаздывания t_0 для выполнения равенства (3).

Решение задачи для первой СМО

Рассмотрим СМО, сформированную функциями плотности

$$\alpha(t) = \lambda^2(t-t_0)e^{-\lambda(t-t_0)};$$

$$b(t) = \mu^2(t - t_0)e^{-\mu(t-t_0)}, t \geq t_0 \quad (4)$$

с преобразованиями Лапласа

$$A^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^2 e^{-t_0 s}; B^*(s) = \left(\frac{\mu}{\mu + s}\right)^2 e^{-t_0 s}.$$

Спектральное решение $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \alpha(s)/\beta(s)$ как для обычной системы, так и для системы, описываемой функциями плотности (4), будет иметь вид

$$\frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - s}\right)^2 \left(\frac{\mu}{\mu + s}\right)^2 - 1 = \frac{\lambda^2 \mu^2 - (\lambda - s)^2 (\mu + s)^2}{(\lambda - s)^2 (\mu + s)^2} = \frac{-s(s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0)}{(\lambda - s)^2 (\mu + s)^2},$$

где коэффициенты $c_0 = 2\lambda\mu(\mu - \lambda)$, $c_1 = -(\lambda^2 - 4\lambda\mu + \mu^2)$, $c_2 = -2(\mu - \lambda)$ зависят от параметров λ, μ распределений (4). Рассматривая далее только установившийся режим работы системы ($\lambda < \mu$), устанавливаем нули разложения: $s = 0, -s_1, -s_2, s_3$. Здесь знаком “-” отмечены действительные отрицательные корни. Полюса разложения: $s = \lambda, s = -\mu$.

Следуя методике спектрального решения, строим компоненты разложения

$$\alpha(s) = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(\mu + s)^2}, \beta(s) = -\frac{(\lambda - s)^2}{(s - s_3)},$$

удовлетворяющие определенным условиям [1]. Опустив известные математические выкладки метода, запишем преобразование Лапласа функции плотности времени ожидания W для первой системы:

$$W^*(s) = s\Phi_+(s) = \frac{s_1 s_2 (s + \mu)^2}{\mu^2 (s + s_1)(s + s_2)}. \quad (5)$$

Из преобразования (5) получим среднее значение \bar{W} как первый начальный момент времени ожидания для первой системы:

$$\bar{W} = 1/s_1 + 1/s_2 - 1/\mu. \quad (6)$$

Для определения параметров (6) применяем известные приемы аппроксимации законов распределений с использованием их моментов. Запишем выражения для моментов распределений: средних значений интервалов и коэффициентов вариаций.

Обозначим средний интервал между поступлениями требований и коэффициент вариации соответственно \bar{t}_λ и c_λ :

$$\bar{t}_\lambda = 2/\lambda + t_0, c_\lambda = \sqrt{2}/(2 + \lambda t_0). \quad (7)$$

Для времени обслуживания получим аналогичные выражения

$$\bar{t}_\mu = 2/\mu + t_0, c_\mu = \sqrt{2}/(2 + \mu t_0). \quad (8)$$

Из полученных значений числовых характеристик устанавливаем, что коэффициенты вариаций временных интервалов для первой системы уменьшаются в $(1 + \lambda t_0/2)$ и $(1 + \mu t_0/2)$ раз соответственно.

Уравнения моментов (7) и (8) позволяют определить параметры (6). Варьируя значение параметра t_0 в пределах $0 < t_0 < \bar{t}_\mu$ при заданных значениях моментов распределений, определяем параметры распределений (4) λ, μ и нужные нам нули разложения s_1, s_2 и используем формулу (6). Заметим, что четыре уравнения моментов (7) и (8) относительно трех неизвестных λ, μ, t_0 связывают коэффициенты вариаций c_λ, c_μ функциональной зависимостью через параметр сдвига t_0 , и как следствие получаем интервалы их изменения $0 < c_\lambda, c_\mu < 1/\sqrt{2}$.

Решение задачи для второй СМО

Дана СМО, сформированная функциями плотности

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, b(t) = \mu e^{-\mu(t-t_0)}, t \geq t_0 \quad (9)$$

с преобразованиями Лапласа

$$A^*(s) = \frac{\lambda e^{-t_0 s}}{s + \lambda}, B^*(s) = \frac{\mu e^{-t_0 s}}{s + \mu}.$$

Спектральное решение уравнения Линдли для второй системы имеет вид

$$A^*(-s)B^*(s) - 1 = \frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{s(s + \mu - \lambda)}{(\lambda - s)(\mu + s)}$$

и приводит к следующему решению:

$$\bar{W} = \frac{\lambda/\mu}{\mu - \lambda}. \quad (10)$$

Для нахождения неизвестных параметров λ и μ распределений (9) составим уравнения моментов для средних значений временных интервалов и их коэффициентов вариаций:

$$\bar{t}_\lambda = 1/\lambda + t_0, \bar{t}_\mu = 1/\mu + t_0, c_\lambda = 1/(1 + \lambda t_0), c_\mu = 1/(1 + \mu t_0). \quad (11)$$

Уравнения моментов (11) позволяют выразить неизвестные параметры λ и μ распределений (9) через задаваемый параметр сдвига t_0 и преобразовать выражение (10) к виду

$$\bar{W} = \frac{(\bar{\tau}_\mu - t_0)^2}{(\bar{\tau}_\lambda - \bar{\tau}_\mu)}. \quad (12)$$

Из уравнений моментов (11) для коэффициентов вариаций получим диапазоны их изменения $0 < c_\lambda, c_\mu < 1$ при $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$. При этом четыре уравнения моментов (11) относительно трех неизвестных λ, μ, t_0 связывают коэффициенты вариаций c_λ, c_μ функциональной зависимостью через параметр сдвига t_0 .

Результаты численных расчетов и имитационного моделирования

Данные расчетов в Mathcad характеристик двух вышерассмотренных систем для случаев умеренной ($\rho = 0,6$) и высокой ($\rho = 0,95$) нагрузок при единичном времени обслуживания приведены в табл. 1, где среднее время ожидания в системах с временным сдвигом обозначено \bar{W} , а средняя длина очереди – \bar{N}_q , в обычной системе – $\bar{W}_{об}, \bar{N}_{qоб}$.

Результаты вычислительных экспериментов полностью подтверждают наши предположения

■ **Таблица 1.** Результаты вычислительных экспериментов для СМО
 ■ **Table 1.** Results of computational experiments for the QS

Входные параметры				Выходные результаты			
ρ	c_λ	c_μ	t_0	\bar{W}	\bar{N}_q	$\bar{W}_{об}$	$\bar{N}_{qоб}$
Первая СМО							
0,6	0,703	0,700	0,01	0,617	0,370	0,631	0,378
	0,665	0,636	0,10	0,502	0,301		
	0,495	0,354	0,50	0,137	0,082		
	0,287	0,007	0,99	0,000	0,000		
0,95	0,700	0,700	0,01	9,169	8,70	9,356	8,888
	0,640	0,636	0,10	7,566	7,188		
	0,371	0,354	0,50	2,304	2,189		
	0,042	0,007	0,99	0,000	0,000		
Вторая СМО							
0,6	0,994	0,99	0,01	1,470	0,882	1,50	0,90
	0,94	0,90	0,10	1,215	0,729		
	0,70	0,50	0,50	0,375	0,225		
	0,406	0,01	0,99	0,000	0,000		
0,95	0,991	0,99	0,01	18,622	17,691	19,00	18,05
	0,905	0,90	0,10	15,390	14,621		
	0,525	0,50	0,50	4,750	4,513		
	0,060	0,01	0,99	0,002	0,002		

относительно систем со сдвинутыми законами распределений. Также очевидно, что в силу непрерывности при $t_0 = 0$ эти системы трансформируются в классические СМО.

Результаты имитационного моделирования для рассматриваемых СМО в системе GPSS World (табл. 2) получены с использованием соответствующих генераторов случайных величин. При этом распределение Эрланга рассматривается как частный случай гамма-распределения. В этих генераторах предусмотрен сдвиг закона распределения вправо на соответствующую величину. Средняя длина очереди в системе обозначена \bar{N}_q .

Код программы первой СМО ($\rho = 0,95, t_0 = 0,5$, результаты представлены на рис. 1):

```
10 GENERATE (GAMMA (1, 0.5, 0.276, 2))
20 QUEUE QCHAN
30 SEIZE CHAN
40 DEPART QCHAN
50 ADVANCE (GAMMA (1, 0.5, 0.25, 2))
60 RELEASE CHAN
70 TERMINATE 1
80 START 1000000
```

Поясним входные параметры для первой имитационной модели. Задаем средние значения интервалов поступлений и обслуживания $\bar{\tau}_\lambda = 20/19, \bar{\tau}_\mu = 1$, тогда загрузка $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda = 0,95$. Из равенств (7) и (8) определим $\lambda = 2 / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) = 3,619, 1/\lambda = 0,276, \mu = 2 / (\bar{\tau}_\mu - t_0) = 4,0, 1/\mu = 0,250$.

Код программы второй СМО ($\rho = 0,95, t_0 = 0,5$, результаты представлены на рис. 2):

```
10 GENERATE (Exponential (1, 0.5, 0.553))
20 QUEUE QCHAN
30 SEIZE CHAN
40 DEPART QCHAN
50 ADVANCE (Exponential (1, 0.5, 0.5))
60 RELEASE CHAN
70 TERMINATE 1
80 START 1000000
```

Пояснения по входным параметрам для второй имитационной модели. Задаем средние значения интервалов поступлений и обслуживания $\bar{\tau}_\lambda = 20/19, \bar{\tau}_\mu = 1$, тогда загрузка $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda = 0,95$. Из равенств (11) определим $\lambda = 1 / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) = 1,810, 1/\lambda = 0,553, \mu = 1 / (\bar{\tau}_\mu - t_0) = 2,0, 1/\mu = 0,50$.

```
FACILITY ENTRIES UTIL. AVE.TIME AVAIL. OWNER PEND INTER RETRY DELAY
CHAN 1000001 0.951 1.000 1 1000001 0 0 0 1

QUEUE MAX CONT. ENTRY ENTRY (0) AVE.CONT. AVE. TIME AVE. (-0) RETRY
QCHAN 34 2 1000002 130607 2.251 2.367 2.722 0
```

■ **Рис. 1.** Результаты прогона имитационной модели для первой СМО

■ **Fig. 1.** Results of running the simulation model for the first QS

■ **Таблица 2.** Результаты имитации для СМО
 ■ **Table 2.** Simulation results for the QS

ρ	t_0	\bar{W}	\bar{N}_q
Первая СМО			
0,6	0,01	0,627	0,378
	0,10	0,505	0,304
	0,50	0,138	0,083
	0,99	0,000	0,000
0,95	0,010	9,299	8,843
	0,10	7,504	7,135
	0,50	2,367	2,251
	0,99	0,000	0,000
Вторая СМО			
0,6	0,01	1,469	0,881
	0,10	1,214	0,728
	0,50	0,374	0,224
	0,99	0,000	0,000
0,95	0,01	20,135	19,135
	0,10	16,071	15,263
	0,50	4,889	4,652
	0,99	0,002	0,002

```

FACILITY ENTRIES UTIL. AVE.TIME AVAIL. OWNER PEND INTER RETRY DELAY
CHAN 1000001 0.950 1.001 1 1000001 0 0 0 8

QUEUE MAX CONT. ENTRY ENTRY (0) AVE.CONT. AVE.TIME AVE. (-0) RETRY
QCHAN 57 9 1000009 94458 4.652 4.899 5.410 0
    
```

■ **Рис. 2.** Результаты прогона имитационной модели для второй СМО
 ■ **Fig. 2.** Results of running the simulation model for the second QS

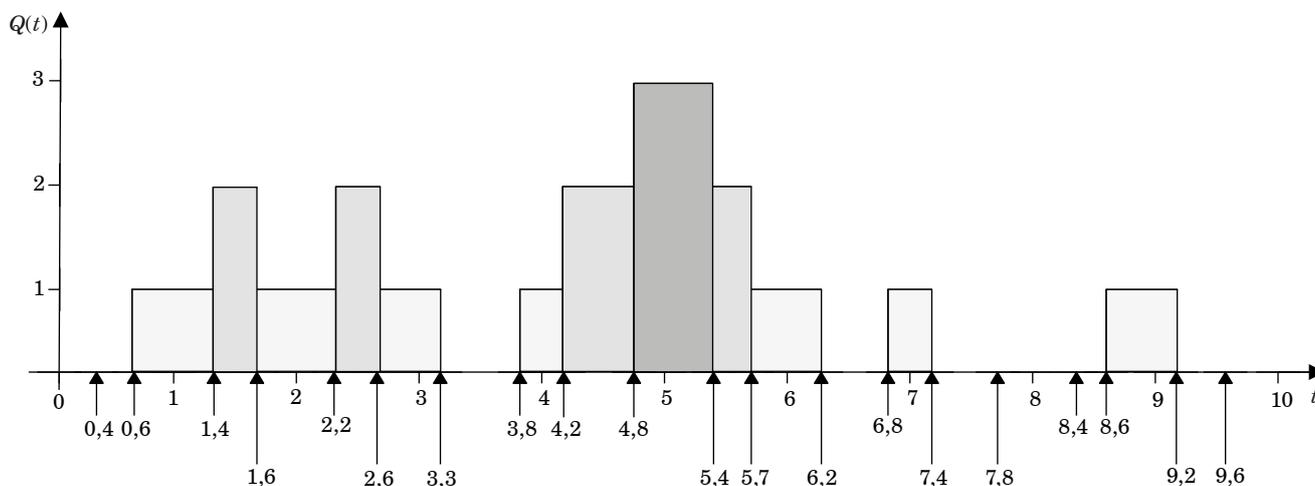
Попарное сравнение результатов таблиц численного и имитационного моделирования подтверждает их полное соответствие.

Демонстрационный пример

Теперь продемонстрируем полученные результаты на простом примере имитации одноканальной СМО с помощью дискретно-событийного моделирования при $n = 10$, т. е. при прогоне через систему десяти требований так, чтобы это можно было проиллюстрировать графически. Точно так же работает универсальная система моделирования GPSS World. Требования в систему поступают с интервалами τ_λ : 0,4; 0,2; 0,8; 0,8; 1,6; 0,4; 0,6; 2,0; 1,6; 0,2, а случайные времена их обслуживания τ_μ : 1,2; 1,0; 0,7; 2,1; 0,3; 0,5; 1,2; 0,4; 1,4; 0,4. На рис. 3 представлен график целочисленной ступенчатой функции $Q(t)$ процесса образования очереди перед СМО. Здесь короткие стрелки означают моменты поступления требований (десять событий поступлений), а длинные – моменты ухода обслуженных требований (десять событий уходов) [24].

Отметим, что здесь функция $Q(t)$ не учитывает требования, уже находящиеся на обслуживании, так как она отображает только требования в очереди. В связи с тем, что в данном примере рассматриваются всего десять требований, приходится говорить только об оценках характеристик СМО. Определим эти оценки при $n = 10$: средняя задержка в очереди $d(n)$; среднее число требований в очереди $q(n)$; коэффициент загрузки как часть времени, когда устройство обслуживания находится в состоянии занятости, $\rho(n)$.

После одного прогона имитационной модели, при котором представлены задержки требова-



■ **Рис. 3.** Функция $Q(t)$, время поступления и ухода требований
 ■ **Fig. 3.** Function $Q(t)$, time of arrival and departure of requests

ний в очереди d_1, d_2, \dots, d_n , очевидной оценкой $d(n)$ является формула $d(n) = (1/n) \sum_{i=1}^n d_i$.

Для нашего примера $d_1 = 0$; $d_2 = (1,6 - 0,6) = 1,0$; $d_3 = (2,6 - 1,4) = 1,2$; $d_4 = (3,3 - 2,2) = 1,1$; $d_5 = (5,4 - 3,8) = 1,6$; $d_6 = (5,7 - 4,2) = 1,5$; $d_7 = (6,2 - 4,8) = 1,4$; $d_8 = (7,4 - 6,8) = 0,6$; $d_9 = (9,2 - 8,4) = 0,8$; $d_{10} = (9,6 - 8,6) = 1,0$, что дает нам оценку $d(10) = 10,2/10 = 1,02$ единиц времени.

Оценкой для средней длины очереди будет величина $q(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot T_i / T(n)$, где T_i – суммарное время в течение моделирования очереди длиной i , а $T(n) = T_0 + T_1 + T_2 + \dots$ – общее время моделирования [24]. Для нашего примера

$$T_0 = (0,6 - 0) + (3,8 - 3,3) + (6,8 - 6,2) + (9,6 - 9,2) = 3,3;$$

$$T_1 = (1,4 - 0,6) + (2,2 - 1,6) + (3,3 - 2,6) + (4,2 - 3,8) + (6,2 - 5,7) + (7,4 - 6,8) + (9,2 - 8,6) = 4,2;$$

$$T_2 = (1,6 - 1,4) + (2,6 - 2,2) + (4,8 - 4,2) + (5,7 - 5,4) = 1,5; T_3 = 5,4 - 4,8 = 0,6.$$

Отсюда $\sum_{i=0}^{\infty} i T_i = 9,0$, а оценка $q(10) = 9,0/9,6 = 0,94$.

Оценкой загрузки будет величина, равная $\rho(10) = \frac{(7,8 - 0,4) + (9,6 - 8,4)}{9,6} = 0,9$.

Теперь совершаем сдвиг случайных величин τ_λ и τ_μ вправо на величину $t_0 = 0,5$, что означает сдвиг законов распределения интервалов поступлений и времени обслуживания. Такую возможность предоставляют библиотечные функции GPSS World – системы дискретно-событийного моделирования. Например, генератор экспоненциально распределенной случайной величины имеет вид: EXPONENTIAL (Stream,Locate,Scale), где параметр Locate – величина сдвига (константа, добавляемая к значению моделируемой величины). В этом случае генератор будет выбирать случайные числа, бóльшие t_0 , т. е. не из интервала $(0, \infty)$, как обычно, а из интервала $[t_0, \infty)$.

Как было отмечено, это влечет за собой увеличение математического ожидания случайной величины для рассматриваемого примера на 0,5 единиц времени и соответствующее уменьшение коэффициентов вариаций временных интервалов.

Запишем новые значения τ_λ : 0,9; 0,7; 1,3; 1,3; 2,1; 0,9; 1,1; 2,5; 2,1; 0,7; τ_μ : 1,7; 1,5; 1,2; 2,6; 0,8; 1,0; 1,7; 0,9; 1,9; 0,9. Для этих значений построим новую функцию $Q(t)$ процесса образования очереди перед СМО (рис. 4). Заметим, что длина очереди резко уменьшается, что подтверждают нижеприведенные оценки характеристик СМО.

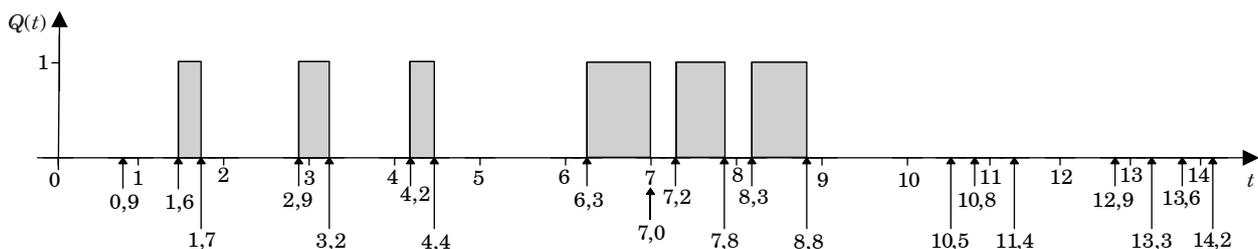
Определяем задержки требований для данного случая: $d_1 = 0$; $d_2 = (1,7 - 1,6) = 0,1$; $d_3 = (3,2 - 2,9) = 0,3$; $d_4 = (4,4 - 4,2) = 0,2$; $d_5 = (7,0 - 6,3) = 0,7$; $d_6 = (7,8 - 7,2) = 0,6$; $d_7 = (8,8 - 8,3) = 0,5$; $d_8 = d_9 = d_{10} = 0$, – что дает нам оценку $d(10) = 2,4/10 = 0,24$ единиц времени, что почти в пять раз меньше предыдущей оценки. Далее определим интервалы времени T_i : $T_0 = (1,6 - 0) + (2,9 - 1,7) + (4,2 - 3,2) + (6,3 - 4,4) + (7,2 - 7,0) + (8,3 - 7,8) + (14,2 - 8,8) = 11,8$; $T_1 = (1,7 - 1,6) + (3,2 - 2,9) + (4,4 - 4,2) + (7,0 - 6,3) + (7,8 - 7,2) + (8,8 - 8,3) = 2,4$. Отсюда оценка для средней длины очереди $q(10) = 2,4/14,2 = 0,17$, что в пять с лишним раз меньше предыдущей оценки. Оценка загрузки

$$\rho(10) = \frac{(10,5 - 0,9) + (11,4 - 10,8)}{14,2} + \frac{(13,3 - 12,9) + (14,2 - 13,6)}{14,2} = 0,79.$$

Таким образом, простой пример дискретно-событийного моделирования СМО полностью подтверждает приведенные выше теорию и численные результаты.

Заключение

Результаты расчетов табл. 1, 2 полностью подтверждают выдвинутые выше предположения о системах со сдвинутыми распределениями. Операция сдвига законов распределений приводит к функциональной зависимости их пара-



■ **Рис. 4.** Функция $Q(t)$, время поступления и ухода требований для системы с запаздыванием
 ■ **Fig. 4.** Function $Q(t)$, time of arrival and departure of requirements for a system with delay

метров и числовых характеристик от параметра сдвига. Следовательно, и основные характеристики системы — средние значения для времени ожидания и длины очереди — также будут зависеть от параметра сдвига.

Четко прослеживается взаимосвязь коэффициентов вариаций временных интервалов с параметром сдвига (см. табл. 1). В связи с уменьшением коэффициентов вариаций с ростом параметра сдвига среднее время ожидания и средняя длина очереди многократно уменьшаются и наоборот, при убывании параметра сдвига средние значения для времени ожидания и длины очереди приближаются к их значениям для

обычной системы. Это однозначно подтверждает адекватность представленных моделей систем с запаздыванием во времени.

Характеристики СМО, зависящие от среднего времени ожидания, становятся функционально зависимыми от параметра сдвига. Следовательно, параметр сдвига становится управляющим параметром для регулирования величин этих характеристик. Таким образом, результаты аналитического и имитационного моделирования явно демонстрируют наличие компоненты управления характеристиками СМО через параметр сдвига законов распределения.

Литература

1. Kleinrock L. *Queueing Systems*. Vol. I. Wiley, 1974. 448 p.
2. Do T. V., Chakka R., Sztrik J. Spectral expansion solution methodology for QBD-M processes and applications in future internet engineering. *ICCSAMA*, 2016, pp. 131–142. doi:10.1007/978-3-319-00293-4-11
3. Ma X. A., Wang Y., Zhu X., Liu W., Lan Q., Xiao W. Spectral method for two-dimensional ocean acoustic propagation. *Sci. Eng.*, 2021, no. 9, pp. 1–19. doi: <https://doi.org/10.3390/jmse9080892>
4. Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analysis and calculation of queueing system with delay. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, iss. 11, pp. 1945–1951. doi:10.1134/S0005117915110041
5. Tarasov V. N. Extension of the class of queueing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, iss. 12, pp. 2147–2158. doi:10.1134/S0005117918120056
6. Tarasov V. N. Comparison of two queueing systems with ordinary and shifted Erlang distributions. *Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S & T)*, 2019, pp. 899–902. doi:10.1109/PICST47496.2019.9061271
7. Bakhareva N., Tarasov V. Comparative analysis of the queueing systems E2/M/1 and M/E2/1 with shifted distribution laws. *2020 IEEE Intern. Conf. on Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2020*, 2021, pp. 837–840. doi:10.1109/PICST51311.2020.9468101
8. Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Limiting the oscillations in queues with delayed information through a novel type of delay announcement. *Queueing Systems*, 2020, vol. 95, pp. 281–330. doi: <https://doi.org/10.1007/s11134-020-09657-9>
9. Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Non-linear dynamics in queueing theory: Determining the size of oscillations in queues with delay. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2019, vol. 18, no. 1, pp. 279–311.
10. Brannstrom N. *A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems. Applied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
11. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatrafic in a Period of Change (ITC-13)*, 1991, pp. 683–688.
12. Tarasov V., Kartashevskiy I. Approximation of input distributions for queueing system with hyper-exponential arrival time. *2nd Intern. Scientific-Practical Conf. Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2015*, 2015, pp. 15–17. doi:10.1109/INFOCOMMST.2015.7357256
13. Алиев Т. И. Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2013, № 2(84), с. 88–93.
14. Aras A. K., Chen X., Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 1, pp. 81–125. <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
15. Jennings O. B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1, pp. 145–202. <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
16. Gromoll H., Terwilliger B., Zwart C. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 213–241. <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
17. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 269–301. <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
18. Bazhba M., Blanchet J., Rhee C. H. Queue with heavy-tailed Weibull service times. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 11, pp. 1–32. <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z/>
19. Adan I., D'Auria B., Kella O. Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 1, pp. 1–190. <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1>
20. Adan I., D'Auria B., Kella O. Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third

ECQT conference: part 2. *Queueing Systems*, 2019, pp. 1–2. <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09637-8>

21. Tibi D. Martingales and buffer overflow for the symmetric shortest queue model. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 153–190. doi:10.1007/s11134-019-09628-9

22. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 139–152. doi: 10.1007/s11134-019-09606-1

23. Wang L., Kulkarni V. Fluid and diffusion models for a system of taxis and customers with delayed matching. *Queueing Systems*, 2020, vol. 96, pp. 101–131. doi: 10.1007/s11134-020-09659-7

24. Law A. M., Kelton W. D. *Simulation Modeling and Analysis*. Fifth ed. Tucson, Arizona, USA, 2014. 800 p.

UDC 621.391.1:621.395

doi:10.31799/1684-8853-2023-5-55-63

EDN: IVEQJM

Controlling queuing system characteristics through shifting the distribution laws

V. N. Tarasov^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-9318-0797, v.tarasov@psuti.ru

N. F. Bakhareva^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-9850-7752

^aPovolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L. Tolstogo St., 443010, Samara, Russian Federation

Introduction: The results of classical queuing theory are used to model computing systems and communication networks, with the average delay of claims in the queue and the average queue length used as the main characteristics. The ability to regulate characteristics such as queue time or queue length could bring a lot of new things to data communication systems. **Purpose:** To present a new class of queuing systems as systems with a time delay to expand the scope of application of queuing models. **Methods:** To obtain new queuing models based on classical systems a method of shifting the distribution laws in queuing systems is offered. **Results:** The research paper presents numerical and analytical solutions for two different systems in comparison with the solutions where discrete event simulation models are used. We demonstrate that shifting the distribution law to the right-hand side from the point of view of probability theory increases the mathematical expectation of the described random variable and thereby reduces the coefficient of variation. It is known that the average waiting time for requests is directly proportional to the squares of the coefficients of time interval variations of arrivals and service, and in the systems with shifted distributions it will decrease many times in comparison with conventional classical systems. The parameters of the distribution laws that form the queuing systems, as well as their numerical characteristics, become functionally dependent on the time shift. In this case the most important characteristics of the systems will also depend on the time shift and, therefore, it will be possible to control them through the shift parameter. The results obtained are confirmed by numerical calculations, as well as simulation experiments in the GPSS World discrete-event modeling system. **Practical relevance:** The results obtained can be applied in the theory and practice of data transmission, which makes it possible to regulate the queue waiting time and the queue length in the buffers in data transmission systems. **Discussion:** In the future, we need to evaluate the applied aspect of the proposed approach in relation to data transmission systems. To do this, it is necessary to develop an experimental software and hardware complex to confirm the results obtained.

Keywords – systems with shifted distributions, Laplace transform, Lindley integral equation, spectral solution, discrete-event modeling, GPSS World.

For citation: Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Controlling queuing system characteristics through shifting the distribution laws. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 5, pp. 55–63 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-5-55-63, EDN: IVEQJM

References

- Kleinrock L. *Queueing Systems*. Vol. I. Wiley, 1974. 448 p.
- Do T. V., Chakka R., Sztrik J. Spectral expansion solution methodology for QBD-M processes and applications in future internet engineering. *ICCSAMA*, 2016, pp. 131–142. doi:10.1007/978-3-319-00293-4-11
- Ma X. A., Wang Y., Zhu X., Liu W., Lan Q., Xiao W. Spectral method for two-dimensional ocean acoustic propagation. *Sci. Eng.*, 2021, no. 9, pp. 1–19. doi: <https://doi.org/10.3390/jmse9080892>
- Tarasov V. N., Bakhareva N. F., Blatov I. A. Analysis and calculation of queuing system with delay. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, iss. 11, pp. 1945–1951. doi:10.1134/S0005117915110041
- Tarasov V. N. Extension of the class of queuing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, iss. 12, pp. 2147–2158. doi:10.1134/S0005117918120056
- Tarasov V. N. Comparison of two queuing systems with ordinary and shifted Erlang distributions. *Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S & T)*, 2019, pp. 899–902. doi:10.1109/PICST47496.2019.9061271
- Bakhareva N., Tarasov V. Comparative analysis of the queuing systems E2/M/1 and M/E2/1 with shifted distribution laws. *2020 IEEE Intern. Conf. on Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2020*, 2021, pp. 837–840. doi:10.1109/PICST51311.2020.9468101
- Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Limiting the oscillations in queues with delayed information through a novel type of delay announcement. *Queueing Systems*, 2020, vol. 95, pp. 281–330. doi:<https://doi.org/10.1007/s11134-020-09657-9>
- Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Nonlinear dynamics in queuing theory: Determining the size of oscillations in queues with delay. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2019, vol. 18, no. 1, pp. 279–311.
- Brannstrom N. *A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems. Applied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
- Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change (ITC-13)*, 1991, pp. 683–688.
- Tarasov V., Kartashevskiy I. Approximation of input distributions for queuing system with hyper-exponential arrival time. *2nd Intern. Scientific-Practical Conf. Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2015*, 2015, pp. 15–17. doi:10.1109/INFORCOMMST.2015.7357256
- Aliev T. I. Approximation of probability distributions in queuing models. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2013, vol. 84, no. 2, pp. 88–93 (In Russian).

14. Aras A. K., Chen X., Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 1, pp. 81–125. <https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0>
15. Jennings O. B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1, pp. 145–202. <https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y>
16. Gromoll H., Terwilliger B., Zwart C. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 213–241. <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z>
17. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 269–301. <https://doi.org/10.1007/s11134-017-9557-7>
18. Bazhba M., Blanchet J., Rhee C. H. Queue with heavy-tailed Weibull service times. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 11, pp. 1–32. <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z/>
19. Adan I., D'Auria B., Kella O. Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 1, pp. 1–190. <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1>
20. Adan I., D'Auria B., Kella O. Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference: part 2. *Queueing Systems*, 2019, pp. 1–2. <https://doi.org/10.1007/s11134-019-09637-8>
21. Tibi D. Martingales and buffer overflow for the symmetric shortest queue model. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 153–190. doi:10.1007/s11134-019-09628-9
22. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 139–152. doi:10.1007/s11134-019-09606-1
23. Wang L., Kulkarni V. Fluid and diffusion models for a system of taxis and customers with delayed matching. *Queueing Systems*, 2020, vol. 96, pp. 101–131. doi:10.1007/s11134-020-09659-7
24. Law A. M., Kelton W. D. *Simulation Modeling and Analysis*. Fifth ed. Tucson, Arizona, USA, 2014. 800 p.

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию.

Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.
