



Достаточные условия устойчивости локально допустимой динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления

А. А. Ефремов^а, канд. физ.-мат. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-0224-2412

В. Н. Козлов^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-1552-8097, kozlov_vn@spbstu.ru

^аСанкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Политехническая ул., 29, Санкт-Петербург, 195251, РФ

Введение: синтез систем стабилизации программных движений объектов является актуальной задачей теории управления. Проекционно-операторные методы математического программирования служат адекватными методами синтеза управлений для указанного класса задач. **Цель:** развитие методов синтеза локально допустимых управлений для стабилизации программных движений линейных и нелинейных динамических объектов с ограничениями. **Результаты:** линейный стационарный объект управления задан в виде разностного, управляемого по Р. Калману, оператора. Для указанного объекта управления выполнены преобразования проекционного оператора решения задач стабилизации программных движений с ограничениями и синтезированы уравнения переходных и стационарного состояний исследуемой системы. Условие сжатия получено из оценки нормы отклонения фазовых координат системы от стационарного состояния. На основе принципа сжимающих отображений получено достаточное условие устойчивости проекционно-операторной динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления. Вывод достаточного условия устойчивости позволил определить параметр проекционно-операторной обратной связи и обеспечить устойчивость проекционного оператора динамической системы, полученного ранее. В качестве объекта управления для вычислительного эксперимента использована векторно-матричная модель синхронного генератора в форме Коши. Вычислительный эксперимент подтвердил теоретические результаты, полученные в работе. **Практическая значимость:** выполнение условия неравенства для определения параметра обратной связи гарантирует устойчивость исследуемой в работе проекционно-операторной динамической системы.

Ключевые слова — достаточные условия устойчивости, динамические системы, проекционные операторы, оптимизация, стабилизация программных движений, локально допустимые управления, ограничения на фазовые координаты и управления, синхронный генератор, математическая модель, SimInTech.

Для цитирования: Ефремов А. А., Козлов В. Н. Достаточные условия устойчивости локально допустимой динамической системы с ограничениями на фазовые координаты и управления. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 57–65. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-57-65, EDN: UFBFDT

For citation: Efremov A. A., Kozlov V. N. Sufficient conditions for the stability of a locally admissible dynamic system with constraints on phase coordinates and controls. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 57–65 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-57-65, EDN: UFBFDT

Введение

Актуальность задач стабилизации программных движений динамических объектов подтверждена большим количеством публикаций. Например, в работе [1] решается задача посадки летательного аппарата без шасси на подвижную платформу. В [2] осуществляется координация движений модулей механизмов относительного манипулирования с тремя степенями свободы. В работе [3] исследуется развитие алгоритма построения уравнений движения материальной системы по заданной программе. В [4] решается задача синтеза программных движений квадрокоптера с тросовой подвеской переменной длины для транспортировки грузов. В работе [5] приведены результаты вычислительного эксперимента по стабилизации программных движений электроэнергетической системы. Многообразие методов,

применяемых для решения задач программных движений, представлено в работах [6–14].

Исследование устойчивости динамических систем, рассмотренных в качестве примера выше, как правило, связано с построением функции Ляпунова [15–19] и требует дополнительного анализа. В данной статье предлагается вывод достаточного условия устойчивости проекционно-операторной динамической системы, синтезированной в работе [5], на основе принципа сжимающих отображений [20].

Оператор решения задач стабилизации программных движений линейного объекта с ограничениями

Ранее авторами синтезирован проекционный оператор динамической системы для задач ста-

билизации программных движений линейного объекта с ограничениями на векторы фазовых координат и управлений [5].

Пусть линейный стационарный управляемый по Р. Калману объект управления определен разностным оператором

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{F}\mathbf{u}_k; \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{c}_y \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ – область притяжения. Векторы и матрицы разностного оператора (1) имеют вид $\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y}_k \in \mathbf{R}^l$, $\mathbf{c}_y \in \mathbf{R}^{l \times n}$; $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – линейный матричный оператор размера $n \times n$.

Задача вычисления локально допустимых управлений имеет вид: вычислить вектор состояний-управлений

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_k^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1}^* \\ \mathbf{u}_k^* \end{bmatrix} = \\ &= \arg \min \left\{ \varphi(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z}_k\|^2 \mid \mathbf{A}\mathbf{z}_k = [\mathbf{E} \mid -\mathbf{F}] \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k; \\ [\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k]^T \times [\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k] &\leq r^2 \in \mathbf{R}^{n+m}, k \in \mathbf{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{C}_k = [\mathbf{C}_{xk} \mid \mathbf{C}_{uk}]^T$ – вектор допустимых программных движений координат-управлений линейного объекта.

Оператор динамической системы с проекционно-операторной обратной связью для задач стабилизации программных движений линейного объекта с ограничениями на векторы фазовых координат и управлений имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta); \\ \hat{\mathbf{z}}_k(\mathbf{x}_k, \sigma_1, \sigma_2, \theta) &= \\ &= \left[\theta \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \sigma_1 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k \right) + (1-\theta) \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \sigma_2 \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k \right) \right], \\ \theta &\in [0; 1] \subset \mathbf{R}; \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{c}_y \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_0 \in \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma \in \mathbf{R}$ – параметр проекционно-операторной обратной связи; \mathbf{P}^0 и \mathbf{P}^+ – проекционные операторы; $\sigma_1 = 1 - \sqrt{\alpha/g}$, $\sigma_2 = 1 + \sqrt{\alpha/g}$, $\alpha_k = \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}_k^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}_k + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2$, $g = \mathbf{C}^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}$; θ – параметр «допустимости»; \mathbf{c}_y – матрица связи между выходными координатами \mathbf{y}_k и координатами состояния \mathbf{x}_k .

Достаточные условия устойчивости системы с ограничениями на векторы фазовых координат и управлений

Для формулировки достаточных условий устойчивости динамической системы (3) использован принцип сжимающих отображений [20]. Указанный принцип использует понятие неподвижной точки оператора \mathbf{x}_* , удовлетворяющей условию $\mathbf{x}_* = \mathbf{A}(\mathbf{x}_*)$.

Единственная неподвижная точка сжимающего оператора в соответствии с теоремой С. Банаха является пределом последовательности приближений, определенной равенством [20]

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_k), k = 1, 2, \dots$$

Уравнение динамической системы с проекционно-операторной динамической обратной связью (3) определено уравнением

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \\ &\times \left[\theta \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{H}\mathbf{x}_k + (1 - \sqrt{\alpha/g}) \mathbf{P}^0 \mathbf{C} \right) + \right. \\ &\left. + (1-\theta) \left(\mathbf{P}^+ \mathbf{H}\mathbf{x}_k + (1 + \sqrt{\alpha(\mathbf{x}_k)/g}) \mathbf{P}^0 \mathbf{C} \right) \right]. \end{aligned}$$

В результате преобразований уравнения переходных и стационарного состояний примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + \right. \\ &\left. + (1-2\theta) \alpha (x_k)^{1/2} \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k / \|\mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k\|_2 \right]; \\ \mathbf{x}_* &= \mathbf{H}\mathbf{x}_* + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{H}\mathbf{x}_* + \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k + \right. \\ &\left. + (1-2\theta) \alpha (x_*)^{1/2} \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k / \|\mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k\|_2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Отклонения координат от стационарного состояния определяются разностью уравнений переходного и стационарного состояний системы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* &= \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*) + \gamma \mathbf{F}\mathbf{T}_u \times \\ &\times \left[\mathbf{P}^+ \mathbf{H}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*) + (1-2\theta) \times \right. \\ &\left. \times \left(\alpha (\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha (\mathbf{x}_*)^{1/2} \right) \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k / \|\mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k\|_2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычисление евклидовых норм правой и левой частей равенства с последующей оценкой нормы правой части уравнения приводит к неравенству вида

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_*\|_2 &\leq \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 + \\ &+ |\gamma| \times \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 \times \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|_2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ |1 - 2\theta| \times \left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2. \quad (6)$$

Далее выполним оценку нормы разности радикалов правой части неравенства (6)

Лемма 1. Имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 &\leq L_{1/2} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 \leq \\ &\leq L_{1/2} L_\alpha \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2, \end{aligned}$$

где постоянные Липшица имеют вид

$$\begin{aligned} L_{1/2} &= 1, \\ L_\alpha &= 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2 - 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2^2 \times \\ &\times \left\| \mathbf{H} \right\|_2^2 \times (r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2). \end{aligned}$$

Доказательство: Оценка модуля разности двух радикалов выполнена в [21] и имеет вид

$$\left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 \leq L_{1/2} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2, \quad (7)$$

где $L_{1/2} = 1$ – постоянная Липшица для функции разности «квадратных корней».

Рассмотрим норму разности, стоящую в правой части неравенства (7). Запишем функции $\alpha(\mathbf{x}_k)$ и $\alpha(\mathbf{x}_*)$ в явном виде:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{x}_k) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) + \\ &+ \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2; \\ \alpha(\mathbf{x}_*) &= \mathbf{b}(\mathbf{x}_*)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}(\mathbf{x}_*)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*) + \\ &+ \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*) + \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^0 \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{C}_k + r^2. \end{aligned}$$

Подстановка $\alpha(\mathbf{x}_k)$ и $\alpha(\mathbf{x}_*)$ в норму правой части неравенства (7) определяет равенство

$$\begin{aligned} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 &= \left\| \mathbf{b}(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \right. \\ &- \mathbf{b}(\mathbf{x}_*)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{C}_k - \mathbf{b}(\mathbf{x}_k)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) + \\ &+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*)^T (\mathbf{P}^+)^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*) + \\ &+ \left. \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{C}_k^T \mathbf{P}^+ \mathbf{b}(\mathbf{x}_*) \right\|_2. \quad (8) \end{aligned}$$

После преобразований оценка нормы разности правой части неравенства (7) примет вид

$$\left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 \leq 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2 \times$$

$$\times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2 - \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2^2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2^2 \times \left\| \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_* \right\|_2 \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2.$$

Оценку нормы суммы фазовых координат в правой части неравенства с учетом условий задачи проекционной операторной оптимизации $\left\| \mathbf{x}_k \right\|_2 \leq r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2$ и $\left\| \mathbf{x}_* \right\|_2 \leq r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2$ [5] можно записать в виде

$$\left\| \mathbf{x}_k + \mathbf{x}_* \right\|_2 \leq \left\| \mathbf{x}_k \right\|_2 + \left\| \mathbf{x}_* \right\|_2 \leq 2r + 2 \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2. \quad (9)$$

С учетом (9) искомая оценка нормы разности двух радикалов примет вид

$$\left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 \leq L_\alpha \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2,$$

где

$$L_\alpha = 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2 - 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2^2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2^2 \times (r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2).$$

После подстановки полученной оценки в (7) получим

$$\begin{aligned} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 &\leq \\ &\leq L_{1/2} \left\| \alpha(\mathbf{x}_k) - \alpha(\mathbf{x}_*) \right\|_2 \leq L_{1/2} L_\alpha \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2, \end{aligned}$$

где $L_{1/2} = 1$, $L_\alpha = 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2 - 2 \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2^2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2^2 \times (r + \left\| \mathbf{C}_k \right\|_2)$ – постоянные Липшица для функции «квадратного корня» и проекционного оператора.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Справедлив следующий результат:

$$\left\| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* \right\|_2 \leq \alpha_P \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2, \quad (10)$$

где

$$\alpha_P = \left\| \mathbf{H} \right\|_2 + |\gamma| \times \left\| \mathbf{F} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{T}_u \right\|_2 \times \left\langle \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle$$

– коэффициент сжатия.

Доказательство: В силу неравенства (7) и результатов леммы 1 справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_* \right\|_2 &\leq \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2 + |\gamma| \times \left\| \mathbf{F} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{T}_u \right\|_2 \times \\ &\times \left\langle \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2 + |1 - 2\theta| \times \right. \\ &\times \left. \left\| \alpha(\mathbf{x}_k)^{1/2} - \alpha(\mathbf{x}_*)^{1/2} \right\|_2 \right\rangle \leq \left(\left\| \mathbf{H} \right\|_2 + |\gamma| \times \left\| \mathbf{F} \right\|_2 \times \left\| \mathbf{T}_u \right\|_2 \times \right. \\ &\times \left. \left\langle \left\| \mathbf{P}^+ \right\|_2 \times \left\| \mathbf{H} \right\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle \right) \times \left\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_* \right\|_2. \end{aligned}$$

Полученные выше оценки норм разностей вида $\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|_2$ и $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_2$ определяют достаточное условие сжатия в виде

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|_2 \leq \alpha_P \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_2,$$

где коэффициент сжатия определен равенством

$$\alpha_P = \|\mathbf{H}\|_2 + |\gamma| \times \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle.$$

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует условие сжатия для оператора динамической системы (3). По определению сжимающего оператора [20], коэффициент сжатия должен быть меньше единицы:

$$\alpha_P = \|\mathbf{H}\|_2 + |\gamma| \times \|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle < 1. \quad (11)$$

Тогда, при выполнении условия (11), условие устойчивости примет вид

$$|\gamma| < \left(\|\mathbf{F}\|_2 \times \|\mathbf{T}_u\|_2 \times \left\langle \|\mathbf{P}^+\|_2 \times \|\mathbf{H}\|_2 + L_\alpha |1 - 2\theta| \right\rangle \right)^{-1} (1 - \|\mathbf{H}\|_2). \quad (12)$$

Условие (12) является достаточным условием устойчивости оператора (3).

Вычислительный эксперимент

Далее продемонстрированы результаты решения задачи стабилизации программных движений синхронного генератора с допустимыми ограничениями на частоту ω , напряжение обмотки возбуждения u_f и механический момент M_{mx} . Указанные ограничения заданы обобщенным вектором программных движений

$$\mathbf{C}_k = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1,002 \ 0 \ | \ 0 \ 0 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ 0,035 \ 0]^T \in \mathbf{R}^{14}.$$

Для вычислительного эксперимента выбрана математическая модель турбогенератора ТВВ-200-2 с техническими характеристиками, описанными в [22], представленная в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} i'_d \\ i'_q \\ i'_f \\ i'_{rd} \\ i'_{rq} \\ \omega' \\ \varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,07 & 11,72\omega & -0,1 & -2 & -5,56\omega & 0 & 0 \\ -7,46\omega & -2,59 & 3,54\omega & 3,54\omega & -4,74 & 0 & 0 \\ -0,99 & 2,85\omega & -2,32 & 5,77 & -1,34\omega & 0 & 0 \\ -6,87 & 19,78\omega & 2,1 & -10 & -9,37\omega & 0 & 0 \\ -13,63\omega & -4,73 & 6,46\omega & 6,46\omega & -10 & 0 & 0 \\ 79,9i_q & -79,9i_d & -37,8i_q & -37,8i_q & 37,8i_d & -3,78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5,56 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3,54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,35 & 0 & 2,32 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9,37 & 0 & -2,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6,46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_f \\ 0 \\ 0 \\ M_{mx} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Дискретизация векторно-матричной модели (13) осуществлена разностными операторами, соответствующими неявному методу Эйлера [23], реализованными в среде SimInTech (<https://simintech.ru/>).

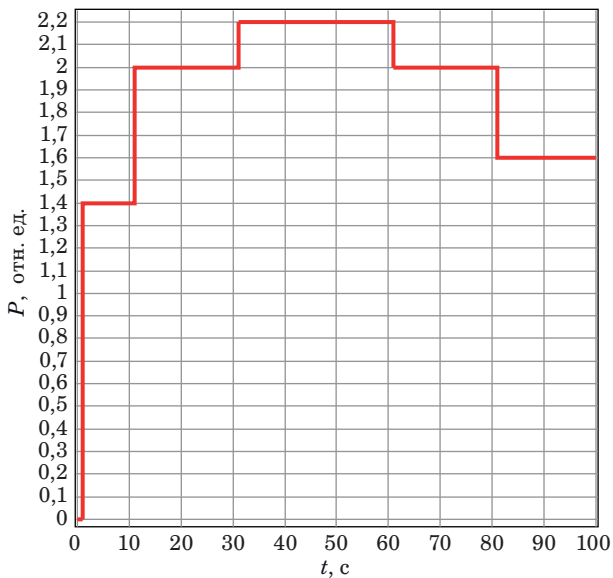
Упрощенная математическая модель нагрузки имеет вид [24]

$$u_d(t) = \frac{i_d(t)P_{act}(t) + i_q(t)P_{react}(t)}{i_d^2(t) + i_q^2(t)};$$

$$u_q(t) = \frac{i_d(t)P_{act}(t) - i_q(t)P_{react}(t)}{i_d^2(t) + i_q^2(t)}.$$

Параметры динамической системы (3) $\theta = 0,5017$ и $r = 1$ подобраны экспериментально.

Изменение мощности синхронного генератора задано кусочно-постоянной функцией и показано на рис. 1.



■ **Рис. 1.** Мощность синхронного генератора, заданная в виде кусочно-постоянной функции

■ **Fig. 1.** Synchronous generator power, specified as a piecewise constant function

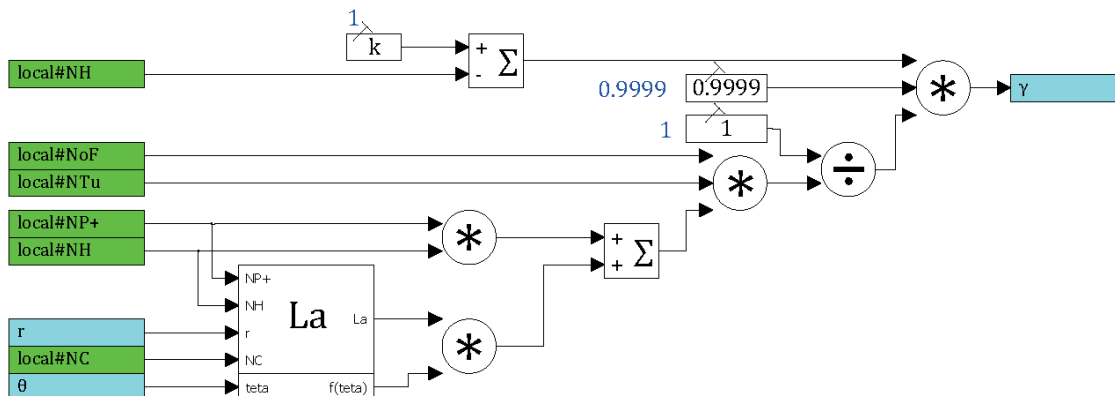
Схема, реализующая вычисление параметра обратной связи γ , приведена на рис. 2. Для обеспечения устойчивости динамической системы (3) достаточно выполнения неравенства (12), ограничивающего параметр проекционно-операторной обратной связи. Для выполнения неравенства (12) параметр γ можно умножить на константу, равную 0,9999. При нарушении условия (12), например, при умножении вычисленного параметра обратной связи γ на константу 1,25, происходит быстрый рост значений фазовых координат динамической системы.

С учетом изменения мощности синхронного генератора динамика параметра проекционно-операторной обратной связи γ для системы (13) иллюстрируется на рис. 3.

На основе данных рис. 1 и 3 можно сделать следующий вывод: кусочно-постоянное изменение нагрузки (см. рис. 2) приводит к соответствующему кусочно-постоянному изменению амплитуды параметра проекционно-операторной обратной связи γ (см. рис. 3). Указанное соответствие графика нагрузки также имеет место для фазовых координат и управлений исследуемой динамической системы. Объяснение сущности физических процессов, происходящих в синхронных генераторах, приведено, например, в работе [25].

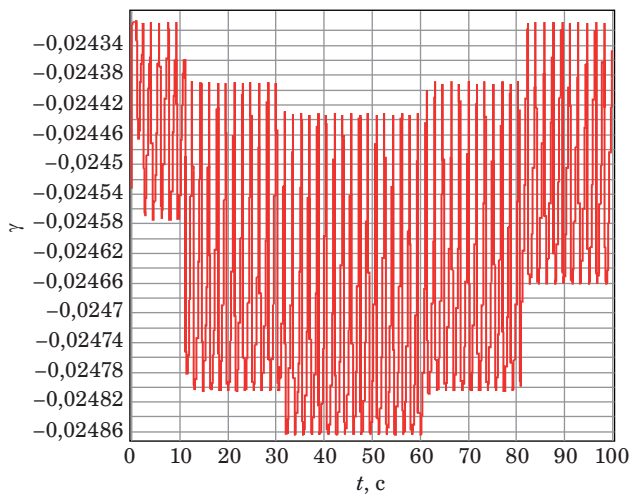
Ограниченные вектором допустимых программных управлений S_{uk} локально допустимые управляющие воздействия u_f и M_{mx} с учетом изменения нагрузки (см. рис. 1) и динамики параметра проекционно-операторной обратной связи γ (см. рис. 3) имеют вид, показанный на рис. 4.

Динамика токов синхронного генератора показана на рис. 5. Временная зависимость программно-ограниченной «частоты» синхронного генератора, учитывающая изменение мощности (см. рис. 1) и параметр обратной связи γ , изображена на рис. 6.



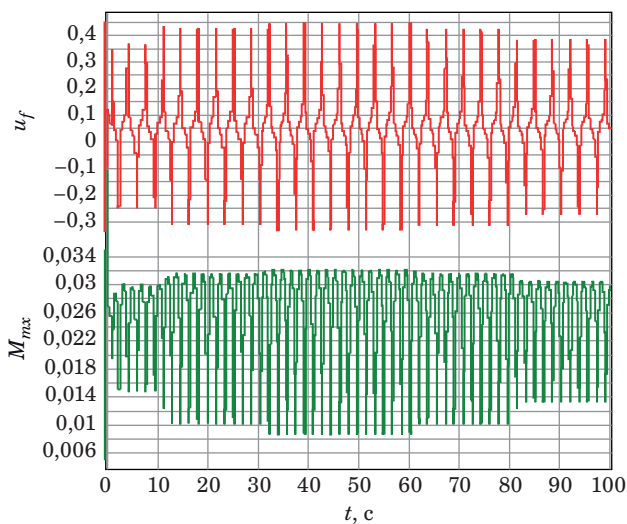
■ **Рис. 2.** Схема вычисления параметра обратной связи γ в SimInTech

■ **Fig. 2.** Scheme for calculating the feedback parameter γ in SimInTech



■ **Рис. 3.** Динамика параметра проекционно-операторной обратной связи γ

■ **Fig. 3.** Dynamics of the projection-operator feedback parameter γ



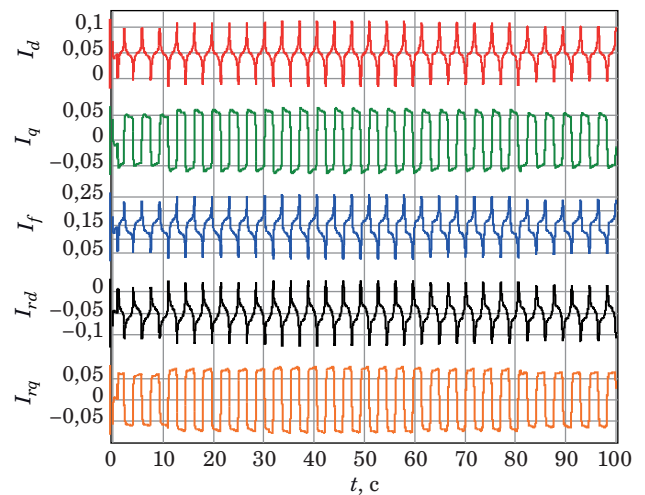
■ **Рис. 4.** Графики ограниченных управлений u_f и M_{mx}

■ **Fig. 4.** Graphs of limited controls u_f and M_{mx}

Из рис. 4 и 6 видно, что при изменении мощности (см. рис. 1) значения синтезированных управляющих воздействий u_f и M_{mx} , а также стабилизируемой фазовой координаты ω не превышают ограничений, заданных вектором допустимых программных движений S_k .

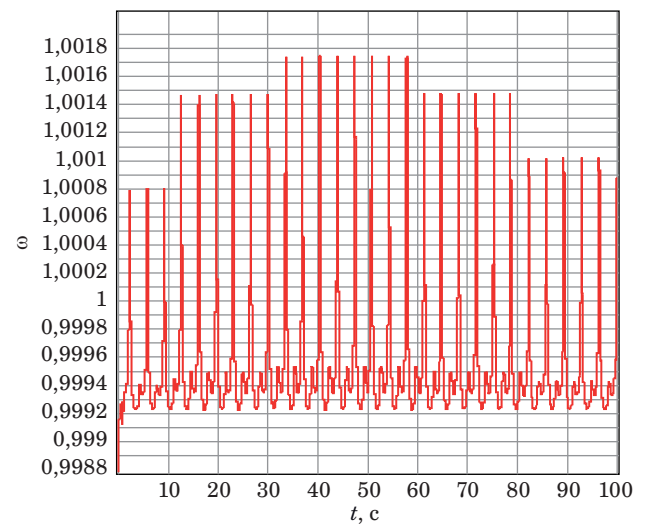
Выводы

Синтезировано достаточное условие устойчивости динамической системы (3) и определен параметр проекционно-операторной обратной связи, уточняющий результаты, полученные в работе [5].



■ **Рис. 5.** Динамика токов синхронного генератора

■ **Fig. 5.** Dynamics of synchronous generator currents



■ **Рис. 6.** Временная зависимость программно-ограниченной «частоты» ω синхронного генератора

■ **Fig. 6.** Time dependence of the software-limited “frequency” ω of a synchronous generator

Вычислительные эксперименты подтвердили достаточность синтезированного условия устойчивости исследуемой динамической системы.

Литература

1. Мещанов А. С., Бикмурзин А. М. Стабилизация программной посадки летательных аппаратов без шасси на подвижную платформу в атмосфере при неопределенных возмущения. Ч. 1. *Вестник технологического университета*, 2020, т. 23, № 12, с. 109–117. EDN: KOZLIY

2. Воробьев Е. И., Михеев А. В., Моргунович К. О. Построение программных движений механизмов относительного манипулирования с тремя степенями свободы. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2019, № 6, с. 42–48. doi:10.1134/S0235711919060105/issn0235-7119
3. Alekseev A., Stukonog S. An algorithm for constructing an optimal ship's path with elements of the ship's program motion systems on the course. *Transp. Bus. Russ.*, 2022, no. 2, pp. 217–221. doi:10.52375/20728689_2022_2_217/issn2072-8689
4. Yu H., Liang X., Han J., Fang Y. Adaptive trajectory tracking control for the quadrotor aerial transportation system landing a payload onto the mobile platform. *IEEE Trans. Ind. Informatics*, 2023, pp. 1–12. doi:10.1109/TII.2023.3256374
5. Ефремов А. А., Козлов В. Н. Метод синтеза локально допустимых ограниченных управлений для стабилизации программных движений динамических объектов. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 4, с. 47–55. doi:10.31799/1684-8853-2023-4-47-55, EDN: DYULZH
6. Sachan K., Padhi R. Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler – Lagrange systems. *15th Intern. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, IEEE, Singapore, 2018, 18–21 Nov., 2018, pp. 686–691. doi:10.1109/ICARCV.2018.8581068
7. Wang X., Xu J., Lv M., Zhang L., Zhao Z. Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy. *Nonlinear Dyn.*, 2022, vol. 110, no. 1, pp. 381–394. doi:10.1007/s11071-022-07627-9/issn0924-090X
8. Голубев А. Е. Стабилизация программных движений механических систем с учетом ограничений. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2023, № 4, с. 153–167. doi:10.31857/S0002338823040054
9. Kozlov V. N., Efremov A. A. *Operators of bounded locally optimal controls for dynamic systems*. Lect. Notes Networks Syst. Springer, 2020, vol. 95, pp. 140–145. doi:10.1007/978-3-030-34983-7_14
10. Kozlov V. N., Efremov A. A. Projection-operator optimization of controls of dynamic objects. *J. Phys. Conf. Ser. IOP Publishing Ltd*, 2021, vol. 1864, no. 1, pp. 140–145. doi:10.1088/1742-6596/1864/1/012076/issn17426596
11. Александров О. В., Козик А. А. Минимаксная оптимизация параметров стабилизации программного полета. *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика*, 2019, т. 3, с. 45–49.
12. Котина Е. Д., Овсянников Д. А. Математическая модель совместной оптимизации программного и возмущенных движений в дискретных системах. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*, 2021, т. 17, № 2, с. 213–224. doi:10.21638/11701/spbu10.2021.210
13. Голубев А. Е. Построение программных движений механических систем с учетом ограничений при помощи многочленов третьего порядка. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2021, № 2, с. 126–137. doi:10.31857/S0002338820060049/issn0002-3388
14. Andreev A. S., Kolegova L. V. PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions. *Zhurnal Sredn. Mat. Obs.*, 2022, vol. 34, no. 3, pp. 267–279. doi:10.15507/2079-6900.24.202203.267-279/issn20796900
15. Иртегов В. Д., Титоренко Т. Н. Об одном подходе к качественному исследованию нелинейных динамических систем. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 2022, № 1, с. 59–75. doi:10.15372/SJNM20220105/issn1560-7526
16. Yu M., Li J., Zhang S. Probabilistic stability of small disturbance in wind power system based on a variational Bayes and Lyapunov theory using PMU data. *IET Gener. Transm. Distrib.*, 2022. vol. 16, no. 23, pp. 4818–4829. doi: 10.1049/gtd2.12648/issn1751-8687
17. Efremov A. A., Karakchieva V. V., Kozlov V. N. Stability analysis of dynamical systems based on Lyapunov vector functions. *Intern. Conf. "System Analysis in Engineering and Control"*, 2022, pp. 177–186. doi:10.1007/978-3-030-98832-6_16
18. Schiller J. D., Muntwiler S., Kohler J., Zeilinger M. N., Muller M. A. A Lyapunov function for robust stability of moving horizon estimation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2023, pp. 1–16. doi:10.1109/TAC.2023.3280344. <https://ieeexplore.ieee.org/document/10136787> (дата обращения: 15.06.2023).
19. Barroso N. F., Ushirobira R., Efimov D. Control Lyapunov function method for robust stabilization of multistable affine nonlinear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2023, vol. 33, no. 11, pp. 6354–6370. doi:10.1002/rnc.6700/issn1049-8923
20. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. 7-е изд. М., Физматлит, 2019. 572 с.
21. Козлов В. Н. *Проекционный метод синтеза ограниченных оптимальных управлений динамических систем энергетики*. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. 161 с. doi:10.18720/SPBPU/2/119-277
22. Неклепаев Б. Н. *Электрическая часть электростанций и подстанций*. 2-е изд. М., Энергоатомиздат, 1986. 640 с.
23. Скворцов Л. М. *Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений*. М., ДМК Пресс, 2023. 236 с.
24. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Андриевский Б. Р., Юлдашев М. В., Юлдашев Р. В. Математическое моделирование переходных процессов гидроагрегата Саяно-Шушенской ГЭС. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, 2018, т. 4, с. 80–105. doi:10.7868/s0869565216060086/issn0869-5652. https://diffjournal.spbu.ru/pdf/kuznetsov_5.pdf (дата обращения: 15.05.2023).
25. Веников В. А., Иванов-Смоленский А. В. *Физическое моделирование электрических систем*. Москва; Ленинград, Госэнергоиздат, 1956. 359 с.

UDC 681.51

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-57-65

EDN: UFBFDT

Sufficient conditions for the stability of a locally admissible dynamic system with constraints on phase coordinates and controlsA. A. Efremov^a, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-0224-2412V. N. Kozlov^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0003-1552-8097, kozlov_vn@spbstu.ru^aPeter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, Politekhnicheskaya St., 195251, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The synthesis of systems for the stabilization of program motions of objects is an urgent task of control theory. Projection operator methods of mathematical programming are adequate methods of control synthesis for this class of problems. **Purpose:** To develop the methods for synthesizing locally admissible controls for stabilizing programmed motions of linear and nonlinear dynamic objects with restrictions. **Results:** The linear stationary control object is specified in the form of a difference operator controlled according to Kalman criterion. For the specified control object, transformations of the projection operator for solving problems of stabilization of program movements with restrictions have been carried out and equations for the transition and stationary states of the system under study have been synthesized. The compression condition is obtained from an estimate of the norm of deviation of the phase coordinates of the system from the stationary state. Based on the principle of compressive mappings, a sufficient condition for the stability of a projection-operator dynamic system with restrictions on phase coordinates and controls is obtained. The derivation of a sufficient stability condition made it possible to determine the projection operator feedback parameter and ensure the stability of the projection operator of the dynamic system obtained earlier. As a control object, a vector-matrix model of a synchronous generator in the Cauchy form was used for the computational experiment. A computational experiment confirmed the theoretical generalizations obtained in the study. **Practical relevance:** The fulfillment of the inequality condition to determine the feedback parameter guarantees the stability of the projection operator dynamic system.

Keywords – sufficient conditions for stability, dynamical systems, projection operators, optimization, stabilization of program motions, locally admissible controls, restrictions on phase coordinates and controls, synchronous generator, mathematical model, SimInTech.

For citation: Efremov A. A., Kozlov V. N. Sufficient conditions for the stability of a locally admissible dynamic system with constraints on phase coordinates and controls. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 57–65 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-57-65, EDN: UFBFDT

References

- Meshchanov A. S., Bikmurzin A. M. Stabilization of programmed landing of aircraft without chassis on mobile platform in atmosphere under uncertain perturbations: Part 1. *Herald of Technological University*, 2020, vol. 23, no. 12, pp. 109–117 (In Russian). EDN: KOZLIY
- Vorobyov E. I., Mikheev A. V., Morgunenko K. O. Construction of program movements of relative manipulation mechanisms with three degrees of freedom. *Problemy mashinostroyeniya i nadezhnosti mashin*, 2019, no. 6, pp. 42–48 (In Russian). doi:10.1134/S0235711919060105/issn0235-7119
- Alekseev A., Stukonog S. An algorithm for constructing an optimal ship's path with elements of the ship's program motion systems on the course. *Transp. Bus. Russ.*, 2022, no. 2, pp. 217–221. doi:10.52375/20728689_2022_2_217/issn2072-8689
- Yu H., Liang X., Han J., Fang Y. Adaptive trajectory tracking control for the quadrotor aerial transportation system landing a payload onto the mobile platform. *IEEE Trans. Ind. Informatics*, 2023, pp. 1–12. doi:10.1109/TII.2023.3256374
- Efremov A. A., Kozlov V. N. Method of synthesis of locally permissible limited controls for the stabilization of program motions of dynamic objects. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 4, pp. 47–55 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-4-47-55, EDN: DYULZH
- Sachan K., Padhi R. Lyapunov function based output-constrained control of nonlinear Euler – Lagrange systems. *15th Intern. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV)*, IEEE, Singapore, 2018, 18–21 Nov., 2018, pp. 686–691. doi:10.1109/ICARCV.2018.8581068
- Wang X., Xu J., Lv M., Zhang L., Zhao Z. Barrier Lyapunov function-based fixed-time FTC for high-order nonlinear systems with predefined tracking accuracy. *Nonlinear Dyn.*, 2022, vol. 110, no. 1, pp. 381–394. doi:10.1007/s11071-022-07627-9/issn0924-090X
- Golubev A. E. Stabilization of programmed motions of mechanical systems subject to constraints. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2023, no. 4, pp. 153–167 (In Russian). doi:10.31857/S0002338823040054
- Kozlov V. N., Efremov A. A. Operators of bounded locally optimal controls for dynamic systems. In: *Lect. Notes Networks Syst.* Springer, 2020, vol. 95, pp. 140–145. doi:10.1007/978-3-030-34983-7_14
- Kozlov V. N., Efremov A. A. Projection-operator optimization of controls of dynamic objects. *J. Phys. Conf. Ser. IOP Publishing Ltd*, 2021, vol. 1864, no. 1, pp. 140–145. doi:10.1088/1742-6596/1864/1/012076/issn17426596
- Aleksandrova O. V., Kozik A. A. Minimax optimization of stabilization parameters during the programmed flight. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 3, pp. 55–59. doi:10.3103/S0027133019030014
- Kotina E. D., Ovsyannikov D. A. Mathematical model of joint optimization of program and perturbed motions in discrete systems. *Vestnik of Saint Petersburg University Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2021, vol. 17, no. 2, pp. 213–224 (In Russian). doi:10.21638/11701/spbu10.2021.210
- Golubev A. E. Construction of program movements of mechanical systems, considering restrictions using third-order polynomials. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2021, no. 2, pp. 126–137 (In Russian). doi:10.31857/S0002338820060049/issn0002-3388
- Andreev A. S., Kolegova L. V. PID controllers with delay in a problem of stabilization of robotic manipulators' desired motions. *Zhurnal Sredn. Mat. Obs.*, 2022, vol. 34, no. 3, pp. 267–279. doi:10.15507/2079-6900.24.202203.267-279/issn20796900
- Irtegov V. D., Titorenko T. N. On one approach to the qualitative analysis of nonlinear dynamical systems. *Numerical Analysis and Applications*, 2022, no. 1, pp. 59–75 (In Russian). doi:10.15372/SJNM20220105/issn1560-7526
- Yu M., Li J., Zhang S. Probabilistic stability of small disturbance in wind power system based on a variational Bayes and Lyapunov theory using PMU data. *IET Gener. Transm. Distrib.*, 2022, vol. 16, no. 23, pp. 4818–4829. doi:10.1049/gtd2.12648/issn1751-8687
- Efremov A. A., Karakchieva V. V., Kozlov V. N. Stability analysis of dynamical systems based on Lyapunov vector functions. *Intern. Conf. "System Analysis in Engineering and Control"*, 2022, pp. 177–186. doi:10.1007/978-3-030-98832-6_16
- Schiller J. D., Muntwiler S., Kohler J., Zeilinger M. N., Muller M. A. A Lyapunov function for robust stability of moving

- horizon estimation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2023, pp. 1–16. doi:10.1109/TAC.2023.3280344. Available at: <https://ieeexplore.ieee.org/document/10136787> (accessed 15 June 2023).
19. Barroso N. F., Ushirobira R., Efimov D. Control Lyapunov function method for robust stabilization of multistable affine nonlinear systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 2023, vol. 33, no. 11, pp. 6354–6370. doi:10.1002/rnc.6700/issn1049-8923
 20. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza*. [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019. 572 p. (In Russian).
 21. Kozlov V. N. *Proyeksionnyy metod sinteza ogranichennykh optimal'nykh upravleniy dinamicheskikh sistem energetiki* [Projection method for the synthesis of bounded optimal controls of dynamic energy systems]. Saint-Petersburg, Politekhnikeskij universitet Publ., 2019. 161 p. (In Russian).
 22. Neklepaev B. N. *Elektricheskaya chast' elektrostantsiy i podstantsiy* [Electrical part of power stations and substations]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1986. 640 p. (In Russian).
 23. Skvortsov L. M. *CHislennoe reshenie obyknovennykh differentsial'nykh i differentsial'no-algebraicheskikh uravnenij* [Numerical solution of ordinary differential and differential-algebraic equations]. Moscow, DMK Press Publ., 2023. 236 p. (In Russian).
 24. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Andrievsky B. R., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. Matematicheskoye modelirovaniye perekhodnykh protsessov gidroagregata Sayano-Shushenskoy GES. *Differential Equations and Control Processes*, 2018, vol. 4, pp. 80–105. doi:10.7868/s0869565216060086/issn0869-5652. Available at: https://diffjournal.spbu.ru/pdf/kuznetsov_5.pdf (accessed 15 May 2023) (In Russian).
 25. Venikov V. A., Ivanov-Smolenskiy A. V. *Fizicheskoe modelirovaniye elektricheskikh sistem* [Physical modeling of electrical systems]. Moscow; Leningrad, Gosenergoizdat Publ., 1956. 359 p. (In Russian).

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию.

Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.