



Анализ устойчивости системы Лурье со скалярным запаздывающим управлением и переключениями

Н. Р. Андриянова^а, аспирант, orcid.org/0000-0002-6152-3572, st040174@student.spbu.ru

^аСанкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, РФ

Введение: для обеспечения устойчивости линейных систем с переключениями М. С. Браницкий (Branicky M. S.) предложил метод нахождения условий на закон переключений. Известно также, что наличие запаздываний может устойчивость нарушить. Целесообразно распространить этот метод на систему автоматического регулирования с нелинейным управлением, которое бы позволило задавать произвольные запаздывания при управлении или переключении. **Цель:** при произвольном фиксированном запаздывании в управлении получить ограничение на закон переключений, которое бы гарантировало устойчивость решения нелинейной системы, где подсистемы заданы уравнениями с линейными по состоянию правыми частями, а управление входит в систему в виде скалярной нелинейности с рациональным показателем, большим единицы. **Результаты:** исследованы случаи как синхронных (одновременных для всех параметров системы), так и асинхронных переключений в связи с возникновением задержек при выработке управляющего воздействия, а также при поступлении информации о смене активной подсистемы. Для каждой из рассматриваемых систем построены составные функционалы Ляпунова – Красовского, позволившие найти условия на закон переключений, при которых решения являются локально асимптотически устойчивыми. Оказалось, что для этого достаточно выбирать моменты переключения так, чтобы длительность действия подсистемы неограниченно стремилась к бесконечности со временем. Показано, что в дискретном случае аналогичные условия также обеспечат устойчивость при достаточно малом шаге дискретизации. Проведено численное моделирование в случаях как синхронных, так и асинхронных переключений между непрерывными и дискретными подсистемами. Графики, представленные в данной работе, согласуются с теоретическими выводами.

Ключевые слова — системы Лурье, запаздывание, синхронные и асинхронные переключения, асимптотическая устойчивость, составной функционал.

Для цитирования: Андриянова Н. Р. Анализ устойчивости системы Лурье со скалярным запаздывающим управлением и переключениями. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 2–11. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-2-11, EDN: UNKUBX
For citation: Andriyanova N. R. Stability analysis of a Lurie system with scalar retarded control and switching. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 2–11 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-2-11, EDN: UNKUBX

Введение

Математические модели, которые объединяют как дискретные, так и непрерывные свойства, являются гибридными системами. Они включают системы с переключением [1–8], которые описывают поведение конечного набора непрерывных подсистем дифференциальных уравнений и функции переключения между ними.

Когда все подсистемы экспоненциально устойчивы, известно [3], что если временные промежутки переключений достаточно большие, то асимптотическая устойчивость сохранится. Условия, накладываемые на закон переключений, для обеспечения асимптотической устойчивости решений систем с секторными нелинейностями были получены в работе [9].

Зачастую существенное влияние на устойчивость системы оказывают запаздывания, которые могут возникать как в состоянии, так и в управлении. Поэтому важно изучать нелинейные системы с запаздыванием [10–18]. Ввиду нередкой невозможности определить величину задержки ставится вопрос об устойчивости реше-

ний систем при любых запаздываниях. В таком случае об устойчивости позволяет судить второй метод Ляпунова, согласно которому требуется построить либо функции Ляпунова, удовлетворяющие условию Разумихина, либо функционалы Ляпунова – Красовского.

Данная работа посвящена системе автоматического регулирования, где состояние системы входит и в уравнение для объекта, и в управление линейно. Скалярное управление с запаздыванием определяется динамическим законом и входит во все эти уравнения через степенную функцию с показателем, большим 1, с нечетными числителем и знаменателем.

Анализ устойчивости такого сорта нелинейных систем без запаздываний может быть проведен при помощи функции Ляпунова, состоящей из квадратичного слагаемого и интеграла от нелинейности секторного типа, как это показано в монографии А. М. Летова [19] применительно к задаче стабилизации курса самолета.

В настоящей работе для обеспечения устойчивости решения получены ограничения на закон переключений между непрерывными подсисте-

мами. Для любой фиксированной величины запаздывания в управлении и в законе переключения найдены условия асимптотической устойчивости решения. Результаты перенесены на случай разностных подсистем, где похожие условия гарантируют устойчивость при достаточно малом шаге дискретизации.

Синхронные переключения

Предположим, что заданы N подсистем, каждая из которых представляет собой систему автоматического регулирования

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_s f(z(t)); \\ \dot{z}(t) = \mathbf{C}_s^T \mathbf{x}(t) - \rho_1^{(s)} f(z(t)) - \rho_2^{(s)} f(z(t - \tau)), \end{cases} \quad (1)$$

где $s \in \{1, \dots, N\}$; переменные $\mathbf{x} \in R^n, z \in R^1$ и запаздывание $\tau > 0$. В параметры системы входят матрица \mathbf{A}_s размерности n , векторы \mathbf{b}_s и \mathbf{C}_s размерности $n \times 1$, числа $\rho_1^{(s)}$ и $\rho_2^{(s)}$. Функция $f(z) = z^\mu$ имеет рациональный положительный показатель μ , у которого числитель и знаменатель нечетные. При этом автоматически выполняется условие секторной нелинейности $zf(z) > 0$ при $z \neq 0$. Кроме того, система (1) имеет тривиальное решение.

Расширенный вектор решения обозначим $\mathbf{y}^T(t) = (\mathbf{x}^T(t), z(t))$. Чтобы построить решение системы (1), необходимо задать начальный момент времени t_0 и начальную вектор-функцию $\Phi^T = (\mathbf{x}^T(t_0), z_{t_0})$, где функция $z_t(\theta) = z(t + \theta)$ кусочно-непрерывна при $\theta \in [-\tau; 0]$. В данной работе используются евклидова норма для вектора, сингулярная – для матрицы, а для состояния – равномерная норма $\|\Phi\|_\tau = \sup_{\theta \in [-\tau; 0]} \|\Phi(\theta)\|$.

Законом переключений между подсистемами (1) называют кусочно-постоянную непрерывную справа функцию $\sigma(t)$, заданную при $t \geq 0$ со значениями в множестве номеров подсистем $\{1, \dots, N\}$. В данной работе не принимается в расчет случай Зено [1, 2], когда за конечный промежуток времени может произойти бесконечно много переключений.

Считаем известными моменты переключений $0 < \theta_1 < \dots < \theta_m < \dots$ при $m = 1, 2, \dots$. Система с переключениями имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_{\sigma(t)} f(z(t)); \\ \dot{z}(t) = \mathbf{C}_{\sigma(t)}^T \mathbf{x}(t) - \rho_1^{\sigma(t)} f(z(t)) - \rho_2^{\sigma(t)} f(z(t - \tau)). \end{cases} \quad (2)$$

Условия устойчивости в виде матричных неравенств, не зависящие от закона переключений, были получены в работе [17].

Решается задача получения условий на закон переключений $\sigma(t)$ и параметры системы, при вы-

полнении которых можно гарантировать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (2) с фиксированным запаздыванием τ .

В статье М. С. Браницкого (Branicky M. S.) [20] разработан подход (dwell time approach), позволяющий найти условия, накладываемые на функцию переключения, при которых линейная система дифференциальных уравнений оставалась бы асимптотически устойчивой. При этом для каждой подсистемы строится своя функция Ляпунова, относительно которой получаются линейные дифференциальные неравенства и выводятся оценки решений на промежутке действия подсистемы. Учитывая эффект скачка функции Ляпунова при переключениях, приходят к условиям на закон переключений.

Поскольку система (2) дифференциально-разностная, вместо метода функций Ляпунова будет использован подход Ляпунова – Красовского, значит, нужно для каждой подсистемы предоставить положительно определенный функционал, для которого производная в силу подсистемы отрицательно определена. Введем два предположения.

Предположение 1. У функции $f(z) = z^\mu$ показатель $\mu > 1$.

Предположение 2. Существуют положительно определенные матрицы $\mathbf{D}^{(s)}$ такие, что формы

$$\begin{aligned} \Phi^{(s)}(t) = & \mathbf{x}^T(t) \left(\mathbf{A}_s^T \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{A}_s \right) \mathbf{x}(t) + \\ & + \mathbf{x}^T(t) \left(2\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \mathbf{C}_s \right) f(z(t)) - \left(\rho_1^{(s)} + \rho_2^{(s)} \right) f^2(z(t)) \end{aligned}$$

являются отрицательно определенными для $s = 1, \dots, N$.

С матрицами $\mathbf{D}^{(s)}$ из предположения 2 для каждой подсистемы (1) построен функционал Ляпунова – Красовского

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t) = & \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{x}(t) + \int_0^{z(t)} f(\theta) d\theta - \\ & - \rho_2^{(s)} f(z(t)) \int_{-\tau}^0 f(z(t + \theta)) d\theta + \\ & + \int_{-\tau}^0 \left(\beta^{(s)} + \gamma^{(s)}(\tau + \theta) \right) f^2(z(t + \theta)) d\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где параметры $\beta^{(s)} > 0, \gamma^{(s)} > 0$.

Оценим функционал (3) снизу:

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t) \geq & \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 + d_1^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t + \theta)) d\theta + \\ & + \left(1 - \frac{\tau(\mu + 1)}{2l_1^{(s)}} \left(\rho_2^{(s)} \right)^2 z^{\mu-1} \right) \frac{z^{\mu+1}}{\mu + 1}, \end{aligned}$$

где $\alpha_1^{(s)} = \lambda_{\min}(\mathbf{D}^{(s)})$, т. е. минимальное собственное число матрицы $\mathbf{D}^{(s)}$; $d_1^{(s)} = \beta^{(s)} - \frac{l_1^{(s)}}{2}, l_1^{(s)} > 0$.

Функционал (3) будет положительно определен в области $\|y_t\|_\tau < H_1$, где

$$H_1 = \min_{s \in \{1, \dots, N\}} \left(\frac{2l_1^{(s)}}{\tau(\mu+1)(\rho_2^{(s)})^2} \right)^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Тем же образом находится верхняя оценка функционала (3) в той же самой области. Тогда в полученной области работает двусторонняя оценка функционала

$$\begin{aligned} & \alpha_3^{(s)} z^{\mu+1} + d_1^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta + \\ & + \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 \leq V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t) \leq \alpha_2^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 + \\ & + \alpha_4^{(s)} z^{\mu+1} + d_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\alpha_2^{(s)} = \lambda_{\max}(\mathbf{D}^{(s)})$ – максимальное собственное число матрицы $\mathbf{D}^{(s)}$;

$$\alpha_3^{(s)} = \frac{1}{\mu+1} \left(1 - \frac{\tau(\mu+1)}{2l_1^{(s)}} (\rho_2^{(s)})^2 H_1^{\mu-1} \right);$$

$$\alpha_4^{(s)} = \frac{1}{\mu+1} \left(1 + \frac{\tau(\mu+1)}{2l_1^{(s)}} (\rho_2^{(s)})^2 H_1^{\mu-1} \right);$$

$$d_2^{(s)} = \beta^{(s)} + \gamma^{(s)} \tau + \frac{l_1^{(s)}}{2}.$$

Неравенство для сравнения функционалов $V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t)$ и $V^{(v)}(\mathbf{x}, z_t)$ имеет вид

$$V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t) \leq c V^{(v)}(\mathbf{x}, z_t), \quad (5)$$

где $c = \max_{s, v \in \{1, \dots, N\}} \left\{ \frac{\alpha_2^{(v)}}{\alpha_1^{(s)}}, \frac{\alpha_4^{(v)}}{\alpha_3^{(s)}}, \frac{d_2^{(v)}}{d_1^{(s)}} \right\}$.

Проверим отрицательную определенность производной функционала (3) в силу s -й подсистемы (1):

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}, z_t)}{dt} &= \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_s^T \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{A}_s) \mathbf{x} + \\ &+ \mathbf{x}^T (2\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \mathbf{C}_s) f(z) - (\rho_1^{(s)} + \rho_2^{(s)}) f^2(z) - \\ &- \frac{df(z)}{dz} \rho_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f(z(t+\theta)) d\theta - \beta^{(s)} f^2(z(t-\tau)) + \\ &+ (\beta^{(s)} + \gamma^{(s)} \tau) f^2(z) - \gamma^{(s)} \int_{t-\tau}^t f^2(z(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

С учетом предположения 2 при выборе достаточно малых $\beta^{(s)}$ и $\gamma^{(s)}$ найдется область $\|y_t\|_\tau \leq H_2$, где слагаемые высоких порядков не нарушат отрицательную определенность про-

изводных функционалов. Тогда верхняя оценка будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}, z_t)}{dt} &\leq -b_1^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 - b_2^{(s)} z^{2\mu} - \\ &- b_3^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

с положительными коэффициентами $b_1^{(s)}, b_2^{(s)}, b_3^{(s)}$.

Далее будем работать в области $\|y_t\|_\tau < H = \min\{H_1, H_2\}$. Перейдем в неравенствах (4) и (6) к новым переменным

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad p_2(t) = z^{2\mu}(t), \\ p_3(t) &= \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta \end{aligned}$$

и продолжим оценки функционала и его производной сверху:

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t) &\leq \tilde{\alpha}_1^{(s)} \|p\|, \\ \tilde{\alpha}_1^{(s)} &= \max_{\|p\|=1} \left(\alpha_2^{(s)} |p_1| + \alpha_4^{(s)} |p_2| + d_2^{(s)} |p_3| \right) \end{aligned}$$

и

$$\frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t)}{dt} \leq -\tilde{\alpha}_2^{(s)} \|p\|^{\rho+1},$$

где $\tilde{\alpha}_2^{(s)}$ – положительный коэффициент, а $\rho+1 = \frac{2\mu}{\mu+1}$.

Отсюда получается дифференциальное неравенство

$$\frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t)}{dt} \leq -b \left(V^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t) \right)^{\rho+1}, \quad (7)$$

где положительная постоянная

$$b = \min_{s \in \{1, \dots, N\}} \frac{\tilde{\alpha}_2^{(s)}}{(\tilde{\alpha}_1^{(s)})^{\rho+1}}.$$

Пусть заданы моменты переключений $\theta_1, \dots, \theta_m, \dots$, где θ_m – первое переключение после t_0 . Интегрируем неравенство (7) сначала на промежутке до первого переключения $[t_0; \theta_m)$:

$$\left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{x}_t) \right)^{-\rho} \geq \left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\boldsymbol{\Phi}) \right)^{-\rho} + b\rho(t - t_0).$$

При $t \in [\theta_{m+k-1}; \theta_{m+k})$, $k = 1, 2, \dots$ после интегрирования применяется неравенство сравнения (5), за счет которого последовательно происходит переход к оценкам на предыдущих промежутках:

$$\begin{aligned} & \left(V^{\sigma(\theta_{m+k-1})}(\mathbf{x}_t) \right)^{-\rho} \geq \left(V^{\sigma(\theta_{m+k-1})}(\mathbf{x}_{\theta_{m+k-1}}) \right)^{-\rho} + \\ & + b\rho(t - \theta_{m+k-1}) \geq c^{-\rho} \left(V^{\sigma(\theta_{m+k-2})}(\mathbf{x}_{\theta_{m+k-1}}) \right)^{-\rho} + \\ & + b\rho(t - \theta_{m+k-1}) \geq \dots \geq c^{-k\rho} \left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\boldsymbol{\varphi}) \right)^{-\rho} + \\ & + b\rho \left((t - \theta_{m+k-1}) + \Psi(m, k) + c^{-k\rho}(\theta_m - t_0) \right), \end{aligned}$$

где

$$\Psi(m, k) = \sum_{i=1}^{k-1} c^{-(k-i)\rho} (\theta_{m+i} - \theta_{m+i-1}). \quad (8)$$

Параметр k отвечает за количество переключений на промежутке $[t_0; t]$.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы (2) будет асимптотически устойчивым, если для фиксированного запаздывания $\tau > 0$ функция (8) такова, что $\Psi(1, k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство: По свойствам однородных функций (см., например, [21]) неравенства (4) могут быть переписаны в виде

$$\begin{aligned} \beta_1 \|\mathbf{y}\|^{\mu+1} & \leq V^{(s)}(\mathbf{y}_t) \leq \\ & \leq \beta_2 \|\mathbf{y}\|^2 + d_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta \end{aligned}$$

с помощью положительных β_1, β_2 .

Для любого ε такого, что $0 < \varepsilon \leq H$, дифференциальное неравенство (7) выполняется в области $\|\mathbf{y}_t\|_{\tau} < \varepsilon$. При $t \in [t_0; \theta_m)$ оценка решения запишется в виде

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| & \leq \beta_1^{\frac{1}{\mu+1}} \left(V^{(s)}(\mathbf{y}_t) \right)^{\frac{1}{\mu+1}} \leq \\ & \leq \beta_1^{\frac{1}{\mu+1}} \left(\left[\beta_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau}^2 + d_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z_{t_0}) d\theta \right]^{-\rho} + \right. \\ & \quad \left. + b\rho(t - t_0) \right)^{\frac{1}{\mu-1}}. \end{aligned}$$

При $t \in [\theta_{m+k-1}; \theta_{m+k})$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)\| & \leq \beta_1^{\frac{1}{\mu+1}} \left(c^{-k\rho} \left[d_2^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z_{t_0}) d\theta + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \beta_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau}^2 \right]^{-\rho} + b\rho \left[(t - \theta_{m+k-1}) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Psi(m, k) + c^{-k\rho}(\theta_m - t_0) \right] \right)^{\frac{1}{\mu-1}}. \end{aligned}$$

Из условия теоремы следует существование такого k_0 , что для $k \geq k_0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \Psi(m, k) & = \Psi(1, k+m-1) - \\ & - c^{-(k-1)\rho} \sum_{i=1}^{m-1} c^{-(m-i)\rho} (\theta_{i+1} - \theta_i) > \\ & > \frac{1}{b\rho} \left(\frac{1}{\varepsilon \beta_1^{\mu+1}} \right)^{1-\mu}. \end{aligned}$$

Если $k \geq k_0$, то за счет указанного выше неравенства имеет место оценка $\|\mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$. Иначе при $k < k_0$

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq \beta_1^{\frac{1}{\mu+1}} \left(c^{-k\rho} [\beta_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau}^2]^{-\rho} \right)^{\frac{1}{\mu-1}},$$

а значит, найдется

$$\delta = \sqrt{\frac{\beta_1}{\beta_2} c^{-k_0} \varepsilon^{\mu+1}}$$

такая, что для начальных функций $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau} < \delta$ решение будет оставаться в области $\|\mathbf{y}(t)\|_{\tau} < \varepsilon$, когда $t \geq t_0$. Наконец, из оценок решения видно, что $\|\mathbf{y}(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Конец доказательства.

Замечание 1. Нулевое решение системы (2) равномерно асимптотически устойчиво, если $\Psi(m, k) \rightarrow \infty$ равномерно по $m = 1, 2, \dots$ при $k \rightarrow \infty$.

Асинхронные переключения

Если переключения каких-либо хотя бы двух параметров системы происходят не одновременно, то такие переключения называют асинхронными. Так, например, часто возникают задержки в законе переключений во время формирования управляющего воздействия или при получении регулятором информации о смене активной подсистемы [16]. Рассмотрим аналог системы (2) с асинхронными переключениями:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_{\sigma(t)} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_{\sigma(t)} f(z(t)); \\ \dot{z}(t) = \mathbf{C}_{\sigma(t)}^T \mathbf{x}(t) - \rho_1^{\sigma(t)} f(z(t)) - \rho_2^{\sigma(t-\tau)} f(z(t-\tau)). \end{cases} \quad (9)$$

Воспользуемся модификацией функционала (3)

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t) & = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{x}(t) + \int_0^{z(t)} f(\theta) d\theta - \\ & - f(z(t)) \int_{-\tau}^0 \rho_2^{\sigma(t+\theta)} f(z(t+\theta)) d\theta + \\ & + \int_{-\tau}^0 \left(\beta^{(s)} + \gamma^{(s)}(\tau + \theta) \right) f^2(z(t+\theta)) d\theta. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно получить нижнюю оценку

$$V^{(s)}(\mathbf{x}, z_t) \geq \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{x}\|^2 + d_1^{(s)} \int_{-\tau}^0 f^2(z(t+\theta)) d\theta + \left(1 - \frac{\tau(\mu+1)}{2l_1^{(s)}} \max_q (\rho_2^{(q)})^2 z^{\mu-1}\right) \frac{z^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Видно, что в области $\|\mathbf{y}_t\|_\tau < H_1$, где

$$H_1 = \min_{s \in \{1, \dots, N\}} \left(\frac{2l_1^{(s)}}{\tau(\mu+1) \max_q (\rho_2^{(q)})^2} \right)^{\frac{1}{\mu-1}},$$

функционал (9) будет положительно определен и, более того, выполняются неравенства, аналогичные (4).

Производная функционала (10) в силу системы (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dV^{(s)}(\mathbf{x}(t), z_t)}{dt} &= \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{A}_s^T \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{A}_s) \mathbf{x}(t) + \\ &+ \mathbf{x}^T(t) (2\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \mathbf{C}_s) f(z(t)) - \\ &- \frac{df(z(t))}{dt} \int_{-\tau}^0 \rho_2^{\sigma(t+\theta)} f(z(t+\theta)) d\theta + \\ &+ (\beta^{(s)} + \gamma^{(s)} \tau - \rho_1^{(s)} - \rho_2^{(s)}) f^2(z(t)) - \\ &- \beta^{(s)} f^2(z(t-\tau)) - \gamma^{(s)} \int_{t-\tau}^t f^2(z(\theta)) d\theta. \end{aligned}$$

По тем же причинам, как и в синхронном случае, она будет отрицательно определена и иметь оценку вида (6). Дальше рассуждения из случая синхронных переключений нетрудно переложить на асинхронный и получить следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы (9) будет асимптотически устойчивым, если для фиксированного запаздывания функция (8) такова, что $\Psi(1, k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Нулевое решение системы (9) равномерно асимптотически устойчиво, если $\Psi(m, k) \rightarrow \infty$ равномерно по $m = 1, 2, \dots$ при $k \rightarrow \infty$.

Дискретная система Лурье

Рассмотрим разностную систему с синхронными переключениями

$$\begin{cases} \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) + h [\mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{y}(k) + \mathbf{b}_{\sigma(k)} f(\eta(k))]; \\ \eta(k+1) = \eta(k) + h [\mathbf{C}_{\sigma(k)}^T \mathbf{y}(k) - \rho_1^{\sigma(k)} f(\eta(k)) - \\ - \rho_2^{\sigma(k)} f(\eta(k-r))], \end{cases} \quad (11)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots; \mathbf{y} \in R^n; \eta \in R^1; r > 0$ целое; функция $\sigma: k \rightarrow s$, где $s \in \{1, \dots, N\}$; матрицы \mathbf{A}_s размерности n ; векторы \mathbf{b}_s и \mathbf{C}_s размерности $n \times 1$; $\rho_1^{(s)}$ и $\rho_2^{(s)}$ – числа. Шаг дискретизации h может выбираться так, чтобы запаздывание $\tau = rh$, если разностная система (11) получена из непрерывной (2) с помощью явного метода Эйлера.

Введем обозначение $\mathbf{y}^{(k)} = (\mathbf{y}^T(k), \mathbf{y}^T(k-1), \dots, \mathbf{y}^T(k-r))^T$, где r – целое неотрицательное запаздывание.

Считаем выполненными предположения 1 и 2. Дискретные функционалы с матрицами $\mathbf{D}^{(s)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) &= \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k) + \\ &+ \int_0^{\eta^{(k)}} f(\theta) d\theta + \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \\ &- h \rho_2^{(s)} f(\eta(k)) \sum_{j=1}^r f(\eta(k-j)), \end{aligned} \quad (12)$$

где параметры $\beta_j^{(s)} > 0$. Оценим снизу s -й функционал:

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) &\geq \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \frac{\eta^{\mu+1}(k)}{\mu+1} - \\ &- h \left| \rho_2^{(s)} \right| \sum_{j=1}^r \left[\frac{f^2(\eta(k))}{2l_j} + \frac{l_j f^2(\eta(k-j))}{2} \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) \geq \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \\ &+ \frac{\eta^{\mu+1}(k)}{\mu+1} \left[1 - \frac{h(\mu+1)}{2 \sum_{j=1}^r l_j} \left| \rho_2^{(s)} \right| \eta^{\mu-1}(k) \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^r \left(\beta_j^{(s)} - \frac{h}{2} \left| \rho_2^{(s)} \right| \sum_{j=1}^r l_j \right) f^2(\eta(k-j)), \end{aligned}$$

где положительные величины l_j достаточно малы, чтобы не нарушить положительную определенность функционала в области $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_1$ при

$$H_1 = \min_{s \in \{1, \dots, N\}} \left(\frac{2 \sum_{j=1}^r l_j^{(s)}}{h(\mu+1) \left| \rho_2^{(s)} \right|} \right)^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Теперь несложно получить верхнюю и нижнюю оценки в найденной области с положитель-

ными коэффициентами $\alpha_i^{(s)}$, $i = 1, \dots, 4$ и $d_j^{(s)}$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1^{(s)} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \alpha_3^{(s)} \eta^{\mu+1}(k) + \\ & + d_1^{(s)} \sum_{j=1}^r f^2(\eta(k-j)) \leq \\ & \leq V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) \leq \alpha_2^{(s)} \|\mathbf{y}(k)\|^2 + \\ & + \alpha_4^{(s)} \eta^{\mu+1}(k) + d_2^{(s)} \sum_{j=1}^r f^2(\eta(k-j)). \end{aligned} \quad (13)$$

Пересчитав коэффициент c по той же формуле, как он находился в (5), для $s, q \in \{1, \dots, N\}$, приходим к неравенству

$$V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) \leq cV^{(q)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}). \quad (14)$$

В дискретном варианте метода Ляпунова – Красовского вместо производной находится приращение $\Delta V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) = V^{(s)}(\mathbf{y}(k+1), \eta^{(k+1)}) - V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)})$:

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) &= \mathbf{y}^T(k+1) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k+1) - \\ & - \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k) + \int_{\eta(k)}^{\eta(k+1)} f(\xi) d\xi + \\ & + \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{j+1}^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \\ & - h\rho_2^{(s)} f(\eta(k+1)) \sum_{j=1}^r f(\eta(k-j+1)) + \\ & + h\rho_2^{(s)} f(\eta(k)) \sum_{j=2}^{r+1} f(\eta(k-j+1)). \end{aligned}$$

После подстановки правых частей системы (11) при $\sigma = s$ и некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)} &= h\Phi^{(s)}(k) + \Delta \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \Delta \mathbf{y}(k) + \\ & + h\mu\theta_k [\eta(k) + \zeta_k \theta_k \Delta \eta(k)]^{\mu-1} (\Delta \eta(k))^2 + \beta_1^{(s)} f^2(\eta(k)) - \\ & - \beta_r^{(s)} f^2(\eta(k-r)) - \sum_{j=1}^{r-1} (\beta_j^{(s)} - \beta_{j+1}^{(s)}) f^2(\eta(k-j)) - \\ & - h\rho_2^{(s)} [f(\eta(k+1)) - f(\eta(k))] \sum_{j=1}^r f(\eta(k-j+1)), \end{aligned}$$

где $\Phi^{(s)}(k)$ – функция из предположения 2 в дискретном времени; $\Delta \mathbf{y}(k) = h[\mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{y}(k) + \mathbf{b}_{\sigma(k)} f(\eta(k))]$; $\Delta \eta(k) = \eta(k+1) - \eta(k)$; $\theta_k \in (0; 1)$; $\zeta_k \in (0; 1)$.

Первое слагаемое отрицательно определено по предположению 2. В четвертом слагаемом $\beta_1^{(s)}$ выбираем достаточно малой, чтобы в сум-

ме с первым получить отрицательную определенность. Пусть $\beta_j^{(s)} > \beta_{j+1}^{(s)}$ при $j = 1, \dots, r-2$. Оценим выражение

$$\begin{aligned} & -h\rho_2^{(s)} [f(\eta(k+1)) - f(\eta(k))] \sum_{j=1}^r f(\eta(k-j+1)) \leq \\ & \leq \frac{r}{2e_1^{(s)}} \psi^2(k) + \frac{e_1^{(s)}}{2} \sum_{j=0}^{r-1} f^2(\eta(k-j)), \end{aligned}$$

где $\psi^2(k) = h^2 \left(\rho_2^{(s)} [f(\eta(k+1)) - f(\eta(k))] \right)^2$ в свою очередь может быть представлена по формуле конечных приращений Лагранжа как функция большего порядка относительно $\|\mathbf{y}\|^2$ и $f^2(\eta(k-j))$, $j = 0, 1, \dots, r$, а положительная $e_1^{(s)} < 2(\beta_j^{(s)} - \beta_{j+1}^{(s)})$ при $j = 1, \dots, r-2$. Третье слагаемое более высокого порядка говорит о существовании области $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_2$, в которой не нарушится отрицательность приращения. Получится промежуточное неравенство в данной области вида

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)} &\leq -\gamma_0^{(s)} \|\mathbf{y}\|^2 - \gamma_1^{(s)} \eta^{2\mu}(k) - \\ & - \gamma_2^{(s)} \sum_{j=1}^r f^2(\eta(k-j)) + \\ & + h^2 \|\mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{y}(k) + \mathbf{b}_{\sigma(k)} f(\eta(k))\|^2 \|\mathbf{D}^{(s)}\| \end{aligned}$$

с некоторыми положительными $\gamma_i^{(s)}$, $i = 0, 1, 2$. Теперь выберем h достаточно малым, чтобы положительное слагаемое из промежуточной оценки не испортило отрицательную определенность. Тогда по свойствам однородных функций

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)} &\leq -b_0^{(s)} \|\mathbf{y}\|^2 - b_1^{(s)} \eta^{2\mu}(k) - \\ & - b_2^{(s)} \sum_{j=1}^r f^2(\eta(k-j)), \end{aligned} \quad (15)$$

где $b_0^{(s)}$, $b_1^{(s)}$, $b_2^{(s)}$ положительны в области $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_2$.

Подобно тому, как из оценок (4) и (6) выводится дифференциальное неравенство, оценки (13) и (15) приведут в дискретном случае к разностному неравенству

$$\Delta V^{(s)} \leq -b \left(V^{(s)} \right)^{\rho+1}$$

с положительными b и $\rho = \frac{\mu-1}{\mu+1}$.

Используем лемму из работы [22] о том, что если выполнены неравенства

$$0 \leq V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k+1)}) \leq V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k)}) - b \left[V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k)}) \right]^{1+p}$$

для $k = k_0, k_0 + 1, \dots$, причем

$$b(\rho+1) \left[V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k_0)}) \right]^p \leq 1,$$

то справедлива оценка

$$\left(V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k)}) \right)^{-p} \geq \left(V^{(s)}(\mathbf{y}^{(k_0)}) \right)^{-p} + b\rho(k - k_0).$$

Сформулируем и докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы (11) будет локально асимптотически устойчивым, если для фиксированного положительного запаздывания r и достаточно малого шага дискретизации h функция $\Psi(m, i)$, пересчитанная согласно формуле (8) с коэффициентом c из (14), обладает свойством $\Psi(1, i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Доказательство: Зафиксируем начальный отсчет k_0 и выберем область $\|\mathbf{y}^{(k_0)}\| < \delta'$ так, чтобы выполнялось условие леммы [22]. Применим лемму при $k \in \{k_0, k_0 + 1, \dots, \theta_m - 1\}$:

$$\left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{y}^{(k)}) \right)^{-p} \geq \left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{y}^{(k_0)}) \right)^{-p} + b\rho(k - k_0)$$

и при $k \in \{\theta_{m+i-1}, \dots, \theta_{m+i} - 1\}$:

$$\left(V^{\sigma(\theta_{m+i-1})}(\mathbf{y}^{(k)}) \right)^{-p} \geq c^{-ip} \left(V^{\sigma(\theta_{m-1})}(\mathbf{y}^{(k_0)}) \right)^{-p} + b\rho \left((k - \theta_{m+i-1}) + \Psi(m, i) + c^{-ip}(\theta_m - k_0) \right).$$

Дальнейшее обоснование повторяет доказательство теоремы 1.

Конец доказательства.

Аналогичный результат можно сформулировать для дискретной системы с асинхронными переключениями

$$\begin{cases} \mathbf{y}(k+1) = \mathbf{y}(k) + h \left[\mathbf{A}_{\sigma(k)} \mathbf{y}(k) + \mathbf{b}_{\sigma(k)} f(\eta(k)) \right]; \\ \eta(k+1) = \eta(k) + h \left[\mathbf{C}_{\sigma(k)}^T \mathbf{y}(k) - \rho_1^{\sigma(k)} f(\eta(k)) - \right. \\ \left. - \rho_2^{\sigma(k-r)} f(\eta(k-r)) \right]. \end{cases} \quad (16)$$

На основе (12) построим функционал

$$V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta_t) = \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k) + \int_0^{\eta(k)} f(\theta) d\theta + \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) -$$

$$- hf(\eta(k)) \sum_{j=1}^r \rho^{\sigma(k-j)} f(\eta(k-j)). \quad (17)$$

Для него можно найти область $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_1$, где выполняются оценки, подобные (13) и (14), с точностью до постоянных коэффициентов. Приращение функционала (17) вдоль решения системы (16)

$$\begin{aligned} \Delta V^{(s)}(\mathbf{y}(k), \eta^{(k)}) &= \mathbf{y}^T(k+1) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k+1) - \\ &- \mathbf{y}^T(k) \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{y}(k) + \int_{\eta(k)}^{\eta(k+1)} f(\xi) d\xi + \\ &+ \sum_{j=0}^{r-1} \beta_{j+1}^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \sum_{j=1}^r \beta_j^{(s)} f^2(\eta(k-j)) - \\ &- hf(\eta(k+1)) \sum_{j=1}^r \rho_2^{\sigma(k-j+1)} f(\eta(k-j+1)) + \\ &+ hf(\eta(k)) \sum_{j=2}^{r+1} \rho_2^{\sigma(k-j+1)} f(\eta(k-j+1)) \end{aligned}$$

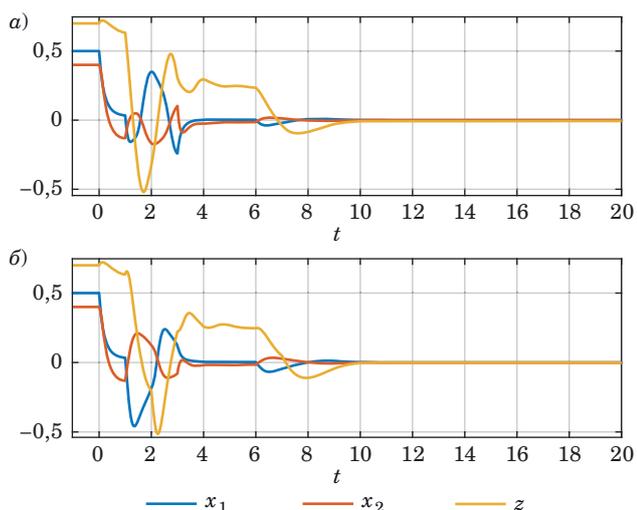
будет отрицательно определенным в некоторой области $\|\mathbf{y}\| + \|\eta^{(k)}\| < H_2$ при выполненных предположениях 1 и 2. Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 3, приходим к следующему результату.

Теорема 4. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Нулевое решение системы (16) будет локально асимптотически устойчивым, если для фиксированного положительного запаздывания r и достаточно малого шага дискретизации h функция, пересчитанная по формуле (8) с коэффициентом c из неравенства сравнения для функционалов (17), обладает свойством $\Psi(1, i) \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Численное моделирование

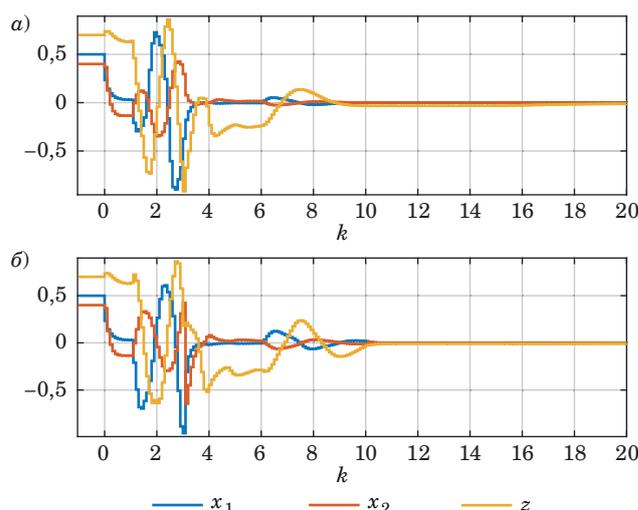
Возьмем в качестве примера следующие параметры подсистем:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{7}{3}, \quad \tau = 1, \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} -6,5 & 0,6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ -3,5 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_1^T &= (0,8 \quad 0,6), \quad \rho_1^{(1)} = 3, \quad \rho_2^{(1)} = -2,4, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0,6 \\ -2,4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -6,5 \\ 2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_2^T &= (5 \quad -0,5), \quad \rho_1^{(2)} = 1,5, \quad \rho_2^{(2)} = 3. \end{aligned}$$



■ **Рис. 1.** Графики компонент решений, полученные методом Рунге – Кутты 4-го порядка: *a* – для системы (2); *б* – для системы (9)

■ **Fig. 1.** Graphs of solution components obtained by Runge – Kutta method of fourth order: *a* – for system (2); *б* – for system (9)



■ **Рис. 2.** Графики компонент решений, построенные с помощью явного метода Эйлера с шагом дискретизации 0,1: *a* – для системы (11); *б* – для системы (16)

■ **Fig. 2.** Graphs of solution components obtained by the explicit Euler method with step size 0.1: *a* – for system (11); *б* – for system (16)

Начальный момент $t_0 = 0$ и начальная функция

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t_0} \\ z_{t_0} \end{pmatrix} = (0,5 \quad 0,4 \quad 0,7)^T \text{ при } t \in [-1; 0].$$

Согласно теории все параметры выбраны так, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} \left(\mathbf{A}_s^T \mathbf{D}^{(s)} + \mathbf{D}^{(s)} \mathbf{A}_s \right) \left(\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \frac{1}{2} \mathbf{C}_s \right) \\ \left(\mathbf{D}^{(s)} \mathbf{b}_s + \frac{1}{2} \mathbf{C}_s \right)^T - \left(\rho_1^{(s)} + \rho_2^{(s)} \right) \end{pmatrix}$$

была отрицательно определенной для положительно определенных матриц $\mathbf{D}^{(s)}$, в качестве которых были выбраны матрицы

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix}; \mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Закон переключений $\sigma(t) = 1$, когда

$$t \in [-1; 1) \cup \left[\frac{i(i-1)}{2}; \frac{i(i+1)}{2} \right), \quad i = 3, 5, \dots,$$

и $\sigma(t) = 2$ при

$$t \in \left[\frac{i(i-1)}{2}; \frac{i(i+1)}{2} \right), \quad i = 2, 4, \dots$$

Результаты моделирования представлены на рис. 1, *a*, *б* и 2, *a*, *б*. Графики рис. 1, *a* и 2, *a* соответствуют случаю синхронных, а рис. 1, *б* и 2, *б* – асинхронных переключений.

Заключение

В предложенной работе рассмотрена нелинейная регулируемая система с одним исполнительным органом с переключениями и запаздыванием. Получены условия на закон переключений, обеспечивающие асимптотическую устойчивость решений таких систем в случаях непрерывного и дискретного времени. В каждом случае исследовались как синхронные, так и асинхронные переключения. Численные решения, представленные графически, подтверждают справедливость сформулированных теорем.

Литература

1. Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston, MA, 2003. 233 p. doi:10.1007/978-1-4612-0017-8
2. Li C., Feng G., Huang T. On hybrid impulsive and switching neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, vol. 6, no. 38, pp. 1549–1560. doi:10.1109/TSMC-008.928233
3. Liberzon D., Morse A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Sys-*

- tems Magazine*, 1999, vol. 19, no. 5, pp. 59–70. doi:10.1109/37.793443
4. **Каменецкий В. А.** Системы с переключениями, системы Лурье, абсолютная устойчивость, проблема Айзермана. *Автоматика и телемеханика*, 2019, т. 8, № 8, с. 9–28. doi:10.1134/S0005117919080010
 5. **Каменецкий В. А.** Условия устойчивости систем с переключениями между четырьмя линейными дискретными подсистемами. *XV Междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого)*, Москва, 3–5 июня 2020 г., с. 182–184. https://elibrary.ru/download/elibrary_44162285_43744180.pdf (дата обращения: 10.06.2023).
 6. **Du S., Karimi H. R., Qiao J., Wu D., Feng C.** Stability analysis for a class of discrete-time switched systems with partial unstable subsystems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, vol. 66, no. 12, pp. 2017–2021. doi:10.1109/TC-SII.2019.2897009
 7. **Platonov A. V.** On the asymptotic and practical stability of Persidskii-type systems with switching. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2023, vol. 48. doi:10.1016/j.nahs.2022.101318. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1751570X22001133> (дата обращения: 10.06.2023).
 8. **Zhang W., Wei Z., Lin X., Chen C. C.** Finite-time bounded sampled-data control of switched time-delay systems with sector bounded nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, vol. 153. doi:10.1016/j.chaos.2021.111470. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0960077921008249> (дата обращения: 10.06.2023).
 9. **Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V., Voloshin M. V.** On the global asymptotic stability of a class of nonlinear switched systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 107–120.
 10. **Cao J., Zhong S.** New delay-dependent condition for absolute stability of Lurie control systems with multiple time-delays and nonlinearities. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 194, iss. 1, pp. 250–258. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.034>
 11. **Aleksandrov A., Andriyanova N.** Stability analysis of Lur'e indirect control systems with time delay and multiple nonlinearities. *International Journal of Dynamics and Control*, 2023, vol. 11, pp. 3074–3083. doi:10.1007/s40435-023-01174-w
 12. **Zhang P., Xu Y., Shen T.** An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with time-varying delay. *IEEE 2018 Chinese Automation Congress (CAC)*, 2018, pp. 305–310. doi:10.1109/CAC.2018.8623306
 13. **Park J. M., Lee S. Y., Park P. G.** An improved stability criteria for neutral-type Lur'e systems with time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, vol. 355, no. 12. pp. 5291–5309. doi:10.1016/j.jfranklin.2018.05.014
 14. **Gu K., Kharitonov V. L., Chen J.** *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering Series. Birkhauser, Boston USA, 2003. 356 p.
 15. **Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D.** *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer, Dordrecht, 1999. 648 p.
 16. **Aleksandrov A. Yu., Stepenko N. A.** Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022, vol. 8, no. 3, pp. 1113–1119. doi:10.22055/JACM.2022.39514.3423
 17. **Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A.** Stability analysis of some classes of nonlinear switched systems with time delay. *International Journal of Systems Science*, 2017, vol. 48, no. 10, pp. 2111–2119. doi:10.1080/00207721.2017.1311382
 18. **Titton M. G., Gomes da Silva Jr J. M., Valmorbidia G., Jungers M.** Stability analysis of Lure systems under aperiodic sampled data control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, vol. 33, iss. 12, pp. 7130–7153. doi:10.1002/rnc.6744
 19. **Летов А. М.** *Устойчивость нелинейных регулируемых систем*. М., Физматлит, 1962. 483 с.
 20. **Branicky M. S.** Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 4, pp. 475–482. doi:10.1109/9.664150
 21. **Зубов В. И.** *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*. Л., Судпромгиз, 1959. 324 с.
 22. **Александров А. Ю., Жабко А. П.** Об устойчивости решений одного класса нелинейных разностных систем. *Сибирский математический журнал*, 2003, т. 44, № 6, с. 951–958. doi:10.1023/B:SIMJ.0000007470.46246.bd

UDC 517.929.4

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-2-11

EDN: UNKUBX

Stability analysis of a Lurie system with scalar retarded control and switching

N. R. Andriyanova^a, Post-Graduate Student, orcid.org/0000-0002-6152-3572, st040174@student.spbu.ru

^aSaint-Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya Emb., 199034, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: To ensure the stability of switched linear systems, M. S. Branicky proposed a method for finding conditions on the switching law. It is also known that the presence of delays can disrupt stability. It is advisable to extend this method to a nonlinear control

system, which makes it possible to set arbitrary concentrated delays during control or switching. **Purpose:** To investigate a nonlinear system with subsystems composed of linear parts and control assumed to be a scalar nonlinearity with a greater than one rational degree. Also, for an arbitrary delay in control, to obtain conditions for the switching law that would guarantee the stability of the solution. **Results:** Cases of both synchronous (simultaneous for all parameters of the system) and asynchronous switchings have been studied in connection with the occurrence of delays when developing a controlling action, as well as receiving information about active subsystem changing. Multiple Lyapunov – Krasovsky functionals were constructed for each system under discussion, which made it possible to find conditions on the switching law under which the solutions will be locally asymptotically stable. As we have found out it is sufficient for this to choose the switching moments so that the duration of the subsystem should unboundedly tend to infinity over time. We also demonstrate that in the discrete case, similar conditions also ensure stability at a sufficiently small discretization step. We have carried out numerical modeling for both synchronous and asynchronous switching between continuous and discrete subsystems. The graphs presented in the paper are consistent with the theoretical conclusions.

Keywords – Lurie systems, delay, synchronous and asynchronous switching, asymptotic stability, dwell-time approach.

For citation: Andriyanova N. R. Stability analysis of a Lurie system with scalar retarded control and switching. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 2–11 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-2-11, EDN: UNKUBX

References

1. Liberzon D. *Switching in Systems and Control*. Birkhauser, Boston, MA, 2003. 233 p. doi:10.1007/978-1-4612-0017-8
2. Li C., Feng G., Huang T. On hybrid impulsive and switching neural networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2008, vol. 6, no. 38, pp. 1549–1560. doi:10.1109/TSMCB.2008.928233
3. Liberzon D., Morse A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, vol. 19, no. 5, pp. 59–70. doi:10.1109/37.793443
4. Kamenetskiy V. A. Switched systems, Lur'e systems, absolute stability, Aizerman problem. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 8, pp. 1375–1389 (In Russian). doi:10.1134/S0005117919080010
5. Kamenetskiy V. A. Stability conditions for systems with switching between four linear discrete subsystems. *XV Mezhdunarodnaya konferenciya "Ustojchivost' i kolebaniya nelinejnyh sistem upravleniya" (konferenciya Pyatnitskogo)* [Proc. of XV Intern. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference)], Moscow, 2020, pp. 182–184 (In Russian). Available at: https://elibrary.ru/download/elibrary_44162285_43744180.pdf (accessed 10 June 2023).
6. Du S., Karimi H. R., Qiao J., Wu D., Feng C. Stability analysis for a class of discrete-time switched systems with partial unstable subsystems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2019, vol. 66, no. 12, pp. 2017–2021. doi:10.1109/TCSII.2019.2897009
7. Platonov A. V. On the asymptotic and practical stability of Persidskii-type systems with switching. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2023, vol. 48. doi:10.1016/j.nahs.2022.101318. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1751570X22001133> (accessed 10 June 2023).
8. Zhang W., Wei Z., Lin X., Chen C. C. Finite-time bounded sampled-data control of switched time-delay systems with sector bounded nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, vol. 153. doi:10.1016/j.chaos.2021.111470. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0960077921008249> (accessed 10 June 2023).
9. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Platonov A. V., Voloshin M. V. On the global asymptotic stability of a class of nonlinear switched systems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 2017, vol. 17, no. 2, pp. 107–120.
10. Cao J., Zhong S. New delay-dependent condition for absolute stability of Lurie control systems with multiple time-delays and nonlinearities. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, vol. 194, iss. 1, pp. 250–258. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.04.034>
11. Aleksandrov A., Andriyanova N. Stability analysis of Lur'e indirect control systems with time delay and multiple nonlinearities. *International Journal of Dynamics and Control*, 2023, vol. 11, pp. 3074–3083. doi:10.1007/s40435-023-01174-w
12. Zhang P., Xu Y., Shen T. An improved stability criterion for discrete-time Lur'e systems with time-varying delay. *IEEE 2018 Chinese Automation Congress (CAC)*, 2018, pp. 305–310. doi:10.1109/CAC.2018.8623306
13. Park J. M., Lee S. Y., Park P. G. An improved stability criteria for neutral-type Lur'e systems with time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, vol. 355, no. 12, pp. 5291–5309. doi:10.1016/j.jfranklin.2018.05.014
14. Gu K., Kharitonov V. L., Chen J. *Stability of Time-Delay Systems*. Control Engineering Series. Birkhauser, Boston USA, 2003. 356 p.
15. Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer, Dordrecht, 1999. 648 p.
16. Aleksandrov A. Yu., Stepenko N. A. Stability analysis of gyroscopic systems with delay under synchronous and asynchronous switching. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 2022, vol. 8, no. 3, pp. 1113–1119. doi:10.22055/JACM.2022.39514.3423
17. Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A. Stability analysis of some classes of nonlinear switched systems with time delay. *International Journal of Systems Science*, 2017, vol. 48, no. 10, pp. 2111–2119. doi:10.1080/00207721.2017.1311382
18. Tifton M. G., Gomes da Silva Jr J. M., Valmorbidia G., Jungers M. Stability analysis of Lure systems under aperiodic sampled data control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2023, vol. 33, iss. 12, pp. 7130–7153. doi:10.1002/rnc.6744
19. Letov A. M. *Ustojchivost' nelinejnyh reguliruemyh sistem* [Stability of nonlinear controlled systems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1962. 483 p. (In Russian).
20. Branicky M. S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, vol. 43, no. 4, pp. 475–482. doi:10.1109/9.664150
21. Zubov V. I. *Matematicheskie metody issledovaniya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* [Mathematical methods of investigating automatic regulation systems]. Leningrad, Sudpromgiz Publ., 1959. 324 p. (In Russian).
22. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. On stability of solutions to one class of nonlinear difference systems. *Siberian Mathematical Journal*, 2003, vol. 44, iss. 6, pp. 951–958 (In Russian). doi:10.1023/B:SIMJ.0000007470.46246.bd