



## Программный инструментарий для исследования задач асимптотической комбинаторики диаграмм и таблиц Юнга

В. С. Дужин<sup>а</sup>, канд. физ.-мат. наук, доцент, [orcid.org/0000-0001-8399-284X](https://orcid.org/0000-0001-8399-284X), [vsduzhin@etu.ru](mailto:vsduzhin@etu.ru)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, Профессора Попова ул., 5, Санкт-Петербург, 197376, РФ

**Введение:** решение многих фундаментальных задач асимптотической комбинаторики зачастую оказывается невозможным без проведения массивных компьютерных экспериментов, требующих, как правило, существенных вычислительных затрат. В этой связи актуальна задача разработки эффективного программного инструментария. **Цель:** создать программный пакет для работы с диаграммами и таблицами Юнга. **Результаты:** реализован программный пакет на языке C++, позволяющий работать с двумерными и трехмерными диаграммами и таблицами Юнга, а также моделировать различные марковские процессы на градуированных графах. Реализованы различные операции над таблицами Юнга, в частности алгоритм Робинсона – Шенстеда – Кнута и преобразование Шютценберже. Программный инструментарий в том числе включает в себя богатый функционал для визуализации различных комбинаторных объектов. **Практическая значимость:** то, что программный пакет написан на языке C++, дает преимущество в эффективности над традиционными подходами с использованием систем компьютерной алгебры, учитывая специфику многих задач асимптотической комбинаторики. Разработанный программный пакет использовался для проведения многочисленных компьютерных экспериментов в процессе моделирования динамики поведения разнообразных объектов асимптотической комбинаторики. Результаты моделирования легли в основу ряда научных публикаций.

**Ключевые слова** – диаграммы Юнга, таблицы Юнга, алгоритм Робинсона – Шенстеда – Кнута, соответствие RSK, преобразование Шютценберже, асимптотическая комбинаторика.

**Для цитирования:** Дужин В. С. Программный инструментарий для исследования задач асимптотической комбинаторики диаграмм и таблиц Юнга. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 6, с. 35–45. doi:10.31799/1684-8853-2023-6-35-45, EDN: XHNLMB

**For citation:** Duzhin V. S. A software package for studying problems of asymptotic combinatorics of Young diagrams and Young tableaux. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 35–45 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-35-45, EDN: XHNLMB

### Введение

Асимптотическая комбинаторика – современный, динамично развивающийся раздел математики, в котором изучаются предельные свойства комбинаторных объектов. Решение многих задач асимптотической комбинаторики зачастую оказывается невозможным без проведения массивных компьютерных экспериментов. При этом проведение таких экспериментов, как правило, сопряжено с существенными вычислительными затратами. В этой связи разработка эффективного программного инструментария становится актуальной задачей. Настоящая работа посвящена описанию программного пакета, включающего в себя многочисленные функции для работы с диаграммами и таблицами Юнга.

Диаграммы Юнга и таблицы Юнга [1] являются популярными комбинаторными объектами, имеющими приложения в том числе в асимптотической теории представлений [2, 3], теории базисов Гребнера [4], построении точных решений интегрируемых гамильтоновых систем [5], в статистической физике [6] и квантовой механике [7, 8].

Одной из открытых задач асимптотической комбинаторики является поиск диаграмм Юнга с наибольшими размерностями среди всех диаграмм некоторого фиксированного размера [9]. Известно [10], что в пределе форма этих диаграмм описывается кривой Вершика – Керова, однако до сих пор неизвестен непереборный алгоритм для построения таких диаграмм. Аналогичная задача на графе плоских разбиений (трехмерном графе Юнга) оказывается еще более сложной, поскольку в этом случае неизвестен даже аналог формулы крюков: не существует эффективного алгоритма вычисления размерности трехмерной диаграммы Юнга. Поэтому поиск трехмерных диаграмм Юнга с максимальными размерностями подразумевает перебор как форм диаграмм, так и таблиц, которые могут быть вписаны в эти формы. Соответственно, становится актуальной задача разработки эвристических алгоритмов поиска двумерных и трехмерных диаграмм Юнга с большими и максимальными размерностями.

На градуированных графах, в том числе на графе Юнга, графе Шура, а также их обобщениях, можно построить марковские процессы, если назначить каждому ребру положительные веса

(вероятности) таким образом, чтобы для каждой фиксированной вершины сумма исходящих вероятностей была равна единице. Изучение предельных свойств таких процессов является актуальной задачей асимптотической комбинаторики, которую можно исследовать с помощью компьютерного моделирования. Здесь можно выделить такие задачи, как исследование асимптотического поведения функции нормализованной размерности в различных последовательностях диаграмм Юнга, исследование свойств последовательностей диаграмм Юнга, полученных с помощью жадного ветвления, изучение геометрических свойств трехмерных диаграмм Юнга при построении их различными случайными процессами и др.

Описание центральных мер на градуированных графах — открытая задача асимптотической комбинаторики [11]. На двумерном графе Юнга особое место занимает центральная мера Планшереля [10], соответствующая марковскому процессу с медленным ростом диаграмм Юнга вдоль координатных осей. На трехмерном графе Юнга аналог центральной меры Планшереля неизвестен. Тем не менее был предложен [12] так называемый псевдопланшерелевский марковский процесс на трехмерном графе Юнга. Для исследования его свойств необходимо проведение массивных вычислительных экспериментов.

Также интерес представляет разработка эффективного алгоритма, генерирующего случайные трехмерные таблицы Юнга заданной формы с равной вероятностью. Поскольку количество таблиц с ростом их размера увеличивается экспоненциально, их перечисление оказывается невозможным, и требуется разработка эффективного алгоритмического решения. В двумерном случае существует алгоритм hook walk [13], но его трехмерное обобщение не дает равномерной меры на таблицах.

В работе [14] были получены точные формулы, описывающие форму путей выталкиваний в записывающих таблицах Юнга в алгоритме Робинсона — Шенстеда — Кнута (RSK). Однако открытой проблемой остается характер стремления путей выталкиваний к данным кривым. К другим задачам, связанным с алгоритмом RSK, можно отнести исследование динамики значений, перемещаемых в записывающей таблице, изучение свойств деревьев выталкиваний, исследование распределения концов путей выталкиваний на фронте записывающей таблицы и др.

Другая важная задача, связанная с алгоритмом RSK, состоит в исследовании классов перестановок, эквивалентных (двойственно эквивалентных) по Кнуту, т. е. таких, которым соответствует одинаковая записывающая (нумерующая) таблица Юнга [1]. Это включает в себя

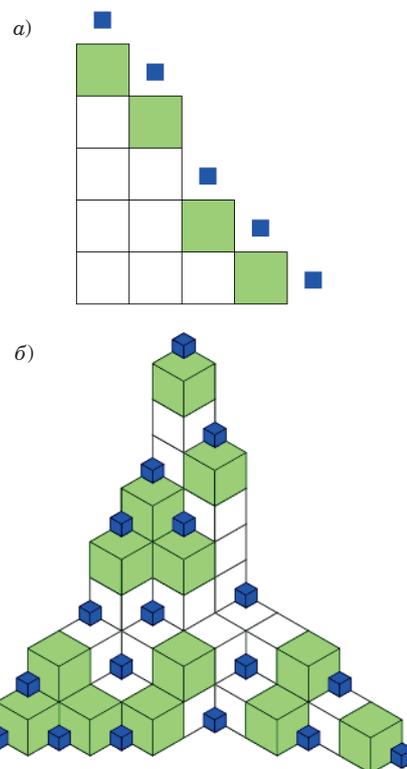
в том числе изучение распределения значений первого элемента перестановки от угла наклона пути Шютценберже нумерующей таблицы.

### Алгоритмы, реализованные в программном пакете

В разработанном программном пакете были реализованы как базовые функции для работы с диаграммами и таблицами Юнга, так и большое количество различных программ для проведения вычислительных экспериментов.

Каждая диаграмма Юнга представлена в виде массивов длин строк (rows), длин столбцов (cols), а также координат внутренних (icorners) и внешних (ocorners) угловых клеток (рисунок, а).

В классе трехмерных диаграмм Юнга дополнительно также хранятся высоты столбцов, ориентированных вдоль оси  $z$  (bars). Пример трехмерной диаграммы Юнга приведен на рисунке, б. Заметим, что любого из вышеперечисленных способов хватило бы, чтобы однозначно определить диаграмму Юнга, однако такая избыточность позволяет эффективно выполнять различные операции над диаграммами. Двумерные (трех-



■ Пример диаграммы Юнга: а — двумерной; б — трехмерной. Синие клетки — внешние угловые; зеленые клетки — внутренние угловые  
 ■ An example of a Young diagram: а — two-dimensional; б — three-dimensional. Outer corner boxes are marked in blue; inner corner boxes are marked in green

мерные) таблицы Юнга хранятся в памяти в виде двумерного (трехмерного) массива целых чисел, а также в виде одномерного списка координат клеток в порядке возрастания их значений.

В качестве примера приведем описание нескольких функций, реализованных в программном пакете.

### Вычисление переходной вероятности в процессе Планшереля

Процесс Планшереля [15] – единственный центральный марковский процесс на графе Юнга с медленным ростом размеров диаграмм вдоль координатных осей. Свойство центральности состоит в том, что вероятности путей, соединяющих произвольную фиксированную пару диаграмм, одинаковы.

Для вычисления планшерелевских переходных вероятностей необходимо эффективно вычислять длины крюков клеток, т. е. подсчитывать количество клеток, расположенных выше в той же строке и правее в том же столбце. Эта операция имеет константную сложность благодаря хранению избыточной информации о диаграмме (листинг 1).

Листинг 1. Вычисление длины крюка клетки двумерной диаграммы Юнга

```
Listing 1. Calculating the hook length of a 2D Young diagram box
hook2D(x, y) {
    return rows[y] + cols[x] - x - y - 1;
}
```

Переходная вероятность или, другими словами, вероятность добавления клетки  $(x, y)$  в процессе Планшереля вычисляется как произведение длин крюков всех клеток, лежащих на обратном крюке клетки  $(x, y)$ , деленное на произведение этих же длин крюков, увеличенных на единицу (листинг 2).

Листинг 2. Вычисление планшерелевской переходной вероятности

```
Listing 2. Calculating the Plancherel transition probability
pprob(x, y) {
    prob = 1;
    for (i = 1; i < x; ++i) {
        hook = hook2D(i, y);
        prob *= hook / (hook + 1);
    }
    for (i = 1; i < y; ++i) {
        hook = hook2D(x, i);
        prob *= hook / (hook + 1);
    }
    return prob;
}
```

### Вычисление переходной вероятности в псевдопланшерелевском процессе

Псевдопланшерелевский процесс случайного блуждания на трехмерном графе Юнга, предложенный в работе [12], является обобщением процесса Планшереля на двумерном графе Юнга. Псевдопланшерелевский процесс не обладает свойством центральности, однако, по всей видимости, является асимптотически центральным [12].

При вычислении переходных вероятностей вычисляются длины крюков клеток в трехмерной диаграмме Юнга, являющиеся естественным обобщением двумерных крюков (листинг 3).

Листинг 3. Вычисление длины крюка клетки трехмерной диаграммы Юнга

```
Listing 3. Calculating the hook length of a 3D Young diagram box
hook3D(x, y, z) {
    return rows[z][y] +
        cols[z][x] +
        bars[x][y] - x - y - z - 2;
}
```

Перед вычислением переходной вероятности добавления новой клетки в псевдопланшерелевском процессе необходимо вычислить сумму значений функции весов во всех внешних угловых клетках диаграммы. В листинге 4 приведен код функции вычисления веса в одной конкретной клетке. Вес клетки равен произведению длин трехмерных крюков, лежащих на трех лучах обратного трехмерного крюка с вершиной в данной клетке, деленному на произведение этих же длин крюков, увеличенных на единицу.

Листинг 4. Вычисление значения псевдопланшерелевской весовой функции

```
Listing 4. Calculating the value of the pseudo-Plancherel weighting function
pweight(x, y, z) {
    w = 1;
    for (i = 1; i < x; ++i) {
        hook = hook3D(i, y, z);
        w *= hook / (hook + 1);
    }
    for (i = 1; i < y; ++i) {
        hook = hook3D(x, i, z);
        w *= hook / (hook + 1);
    }
    for (i = 1; i < z; ++i) {
        hook = hook3D(x, y, i);
        w *= hook / (hook + 1);
    }
    return w;
}
```

Сначала вычисляется сумма псевдопланшерелевских весов всех внешних угловых клеток трехмерной диаграммы (листинг 5).

Листинг 5. Вычисление суммы псевдопланшерелевских весов

Listing 5. Calculating the sum of pseudo-Plancherel weights

```
psum() {
    sum = 0;
    for each (x, y, z) from ocorners {
        sum += pweight(x, y, z);
    }
    return sum;
}
```

Затем каждая псевдопланшерелевская вероятность клетки вычисляется как отношение псевдопланшерелевского веса в этой клетке к сумме весов (листинг 6).

Листинг 6. Вычисления псевдопланшерелевских вероятностей

Listing 6. Calculating pseudo-Plancherel probabilities

```
pprobs3D() {
    sum = psum();
    for each (x, y, z) from ocorners {
        probs[x, y, z] = pweight(x, y, z) / sum;
    }
}
```

### Сравнение размерностей двумерных диаграмм Юнга

Вычисление точных размерностей диаграмм Юнга — чрезвычайно трудоемкий процесс. Однако в некоторых случаях возникает необходимость лишь сравнить размерности двух диаграмм, не вычисляя их точные значения. Например, это необходимо при работе алгоритмов поиска диаграмм с большими размерностями. Для того чтобы сравнить размерности, достаточно вычислить их отношение. В данной работе сравнение размерностей диаграмм *diag1* и *diag2* реализовано следующим образом (листинг 7):

1) вычисляется диаграмма-пересечение *cross\_diag*, все клетки которой принадлежат как *diag1*, так и *diag2*;

2) из полученной диаграммы строятся пути в *diag1* и *diag2*;

3) вычисляется отношение планшерелевских вероятностей данных путей, которое равно отношению размерностей диаграмм *diag1* и *diag2*.

Листинг 7. Сравнение размерностей диаграмм Юнга

Listing 7. Comparing the dimensions of Young diagrams

```
comp_dim(diag1, diag2) {
    diag = cross_diag; i = 1;
    while (diag != diag1) {
        diag += (x, y);
        ratios[i++] = pprob(x, y);
    }
    diag = cross_diag; i = 1; ratio = 1;
    while (diag != diag2) {
        diag += (x, y);
        ratio *= ratios[i++] / pprob(x, y);
    }
    return ratio;
}
```

### Преобразование Шютценберже

Преобразование Шютценберже преобразует таблицу Юнга размера  $n$  в другую таблицу размера  $n - 1$  [16]. В предлагаемой реализации алгоритма таблица Юнга представлена в виде одномерного списка *tab* координат клеток в порядке возрастания их значений. Эти координаты обрабатываются последовательно. Вначале первая клетка с координатами (1, 1) удаляется из таблицы. Координаты клетки сохраняются в переменных *delX*, *delY*. Удаленная клетка будет возвращена в таблицу сразу после обработки соседней клетки, примыкающей к удаленной сверху или справа. В этот момент из таблицы удаляется эта соседняя клетка. Она будет возвращена в таблицу при обработке клетки, примыкающей к ней сверху или справа, и т. д. При этом все остальные клетки таблицы не удаляются и никак не изменяются. Алгоритм завершает работу после обработки всех клеток таблицы. Псевдокод алгоритма представлен в листинге 8.

Листинг 8. Преобразование Шютценберже  
Listing 8. Schützenberger's jeu de taquin

```
schutz(tab) {
    tab.remove(1, 1);
    delX = 1; delY = 1;
    for each (x,y) from tab {
        if ((x == delX) AND (y == delY + 1)) OR
            ((x == delX + 1) AND (y == delY)) {
            tab.remove(x, y);
            tab.insert(delX, delY);
            delX = x; delY = y;
        }
    }
}
```

Преимуществом такой реализации является то, что при работе алгоритма большинство элементов списка не меняется, а количество изменений равно длине пути Шютценберже. Такой подход позволяет легко реализовать преобразование Шютценберже на произвольном градуи-

рованном графе. Также были представлены две модификации классического преобразования Шютценберже: преобразование с сохранением формы и рандомизированное преобразование.

Преобразование с сохранением формы отличается от классического лишь тем, что в конце работы алгоритма в таблицу добавляется последняя удаленная клетка. Благодаря этому форма таблицы не меняется после итерации преобразования Шютценберже, что делает его обратимым.

В рандомизированном преобразовании Шютценберже последняя удаленная клетка также добавляется в таблицу. Кроме того, в случае, если начало таблицы равно (1, 1), (1, 2), (2, 1) или (1, 1), (2, 1), (1, 2), с вероятностью  $\frac{1}{2}$  таблица либо остается неизменной, либо ее клетки (1, 2) и (2, 1) меняются местами.

### Преобразование Робинсона – Шенстеда – Кнута

Преобразование RSK задает биекцию между численными последовательностями и парами таблиц Юнга одинаковой формы [17]: записываемыми  $P$  и нумерующими  $Q$ . В рамках настоящей работы было разработано несколько реализаций алгоритма RSK. Скорость работы алгоритма RSK в значительной степени определяется способом поиска ближайшего большего значения в столбце записываемой таблицы. Поиск проводится в диапазоне от первой строки до строки, из которой было вытолкнуто значение в соседнем столбце. Были реализованы три варианта поиска: линейный, двоичный и поиск с удвоением [18], являющийся гибридом первых двух подходов.

В листинге 9 приведен псевдокод алгоритма RSK с линейным поиском. Значения  $s$  последовательности  $sequence$  обрабатываются по очереди. Вначале выполняется бинарный поиск ближайшего к  $s$  значения в первом столбце таблицы  $P$  (функция `nearest_greater`). Если  $s$  оказывается больше всех значений, то  $s$  помещается сверху первого столбца. Иначе  $s$  записывается на место ближайшего большего значения, которое помещается в буфер  $buf$ . Если  $buf$  оказывается больше всех значений следующего столбца, то  $buf$  записывается сверху этого столбца. В противном случае  $buf$  записывается на место ближайшего большего значения в соседнем столбце, которое в свою очередь помещается в  $buf$ . Поиск такого значения начинается с той же строки, из которой было вытолкнуто значение в предыдущем столбце, и продолжается вниз, вплоть до первой строки: перебирать значения выше не имеет смысла, так как они заведомо не будут ближайшими большими к вытолкнутому. Процесс продолжается, пока очередное вытолкнутое значение не запишется сверху какого-либо столбца.

Листинг 9. Алгоритм RSK с линейным поиском

Listing 9. RSK algorithm with linear search

```
for each s from sequence {
    buf = s;
    j = nearest_greater(P[1]);
    P[1,j] = buf;
    if (j == height(P[1]) + 1)
        continue;
    col = 2;
    while (buf < max(P[col])) {
        while(buf >= P[col,j])
            j--;
        j++;
        P[col,j] = buf;
        col++;
    }
    P[col, height(P[col]) + 1] = buf;
}
```

Также был разработан вариант алгоритма RSK, основанный на так называемом лесе выталкиваний. Лес выталкиваний – объединение путей выталкиваний в записываемой таблице Юнга, т. е. последовательностей клеток записываемой таблицы, участвующих в выталкивании при обработке очередного значения последовательности. При такой реализации алгоритма отпадает необходимость в поиске позиции для выталкивания очередного значения в записываемой таблице. С другой стороны, нужно постоянно поддерживать корректную структуру леса выталкиваний. Данный подход востребован в том числе потому, что такой комбинаторный объект, как лес выталкиваний, представляет самостоятельный исследовательский интерес. Помимо стандартного алгоритма RSK, был также реализован алгоритм обратного преобразования RSK, в котором по заданной паре таблиц Юнга восстанавливается соответствующая им числовая последовательность.

### Программная реализация

В качестве языка разработки программного инструментария был выбран C++, средства которого позволяют эффективно реализовывать сложные операции над двумерными и трехмерными диаграммами и таблицами Юнга, а также моделировать различные марковские процессы на градуированных графах. Программный пакет включает в себя функции, которые позволяют добавлять и удалять клетки диаграмм, вычислять пересечения пары диаграмм, вычислять переходные вероятности в используемых марковских процессах и т. д. Для выполнения не-

которых сложных задач были реализованы параллельные вычисления с помощью технологии OpenMP. Визуализация графиков, анимаций и пр. для наглядной демонстрации результатов вычислений выполнялась с помощью утилиты `gnuplot`.

Программный пакет активно использовался в ходе работы над проектом по исследованию комбинаторики двумерных и трехмерных диаграмм Юнга с помощью компьютерного моделирования, что способствовало постоянному увеличению его функциональности. В настоящее время пакет включает в себя реализацию нескольких сотен методов, содержит более 20 тысяч строк кода. Ниже приведено краткое описание самых основных классов.

**Diagram** — двумерная диаграмма Юнга.

Основные функции: добавление/удаление клеток, вычисление планшерелевских вероятностей, вычисление точных и нормализованных размерностей, сравнение размерностей диаграмм, вычисление расстояния от кривой Вершика — Керова, визуализация диаграмм и др.

**StrictDiagram** — двумерная строгая диаграмма Юнга.

Функционал, близкий к классу `Diagram`, но адаптированный для строгих диаграмм Юнга, т. е. диаграмм, все столбцы которых имеют разную высоту.

**Diagram3D** — трехмерная диаграмма Юнга.

Основные функции: добавление/удаление клеток, вычисление псевдопланшерелевских вероятностей, перебор всех трехмерных таблиц Юнга заданной формы (вычисление размерности), вычисление расстояния между трехмерными диаграммами, вычисление расстояния до усредненной формы псевдопланшерелевского процесса, функции для визуализации диаграмм и др.

**Process** — марковский процесс.

Реализованы марковские процессы случайного блуждания на графе Юнга, графе Шура и на трехмерном графе Юнга: процесс Ричардсона, процесс Планшереля, псевдопланшерелевский процесс, семейство обобщенных процессов Ричардсона. Также реализованы версии этих процессов с фиксированной целевой формой диаграммы Юнга. Реализовано лексикографическое заполнение формы диаграммы.

**RSK** — алгоритм Робинсона — Шенстеда — Кнута.

Представлены три варианта реализации алгоритма `RSK` с различными методами поиска мест вставляемых и вытаскиваемых элементов (линейный, бинарный и поиск с удвоением), обратный `RSK`, вычисление предельных путей вытаскиваний, вычисление различных статистик

для путей вытаскиваний, быстрая генерация случайных планшерелевских таблиц Юнга заданной формы и др.

**Schutzenberger** — алгоритм Шютценберже.

Реализованы классический алгоритм Шютценберже, алгоритм с сохранением формы и рандомизированный алгоритм, функции поиска длин циклов Шютценберже, а также функции вычисления копереходных вероятностей на трехмерном графе Юнга.

Также реализован ряд отдельно компилируемых консольных утилит, использующих методы вышеперечисленных классов. Среди разработанных утилит можно выделить в том числе следующие.

**exhaustive** — переборные алгоритмы на двумерном графе Юнга.

Перебор всех двумерных диаграмм на первых  $n$  этажах графа Юнга, поиск среди них диаграмм с максимальной размерностью, вычисление количества таблиц Юнга размера  $n$ .

**merging** — утилита для проверки гипотезы о слиянии жадных планшерелевских последовательностей.

От пары двумерных (трехмерных) диаграмм Юнга строятся жадные планшерелевские (псевдопланшерелевские) последовательности. Программа завершает работу при слиянии последовательностей. Есть возможность выбрать различные начальные формы диаграмм.

**tab\_generator** — генератор случайных таблиц Юнга с помощью марковских процессов.

Параметры: тип диаграмм (двумерные или трехмерные), тип марковского процесса (процесс Планшереля: случайная или жадная последовательности, процесс Ричардсона, обобщенный процесс Ричардсона), целевой размер таблиц, количество таблиц. Таблицы генерируются без ограничения на форму, с произвольной одинаковой формой или с заданной пользователем формой. Для ускорения процесса генерации таблиц применяются параллельные вычисления.

**RSKgen** — алгоритм `RSK` (линейный поиск).

Генерация случайной равномерно распределенной последовательности чисел заданной длины, обработка ее с помощью алгоритма `RSK`. Записывающая и нумерующая таблицы сохраняются в файлы. Реализована возможность генерации таблиц Юнга заданной формы.

**RSKForest** — алгоритм `RSK` (основан на лесе вытаскиваний).

Интерфейс аналогичен `RSKgen`, но алгоритм основан на использовании леса вытаскиваний, корректная структура которого поддерживается во время итераций алгоритма.

**invRSK** — обратный алгоритм `RSK`.

На вход подаются два файла (с записывающей и нумерующей таблицами Юнга). В вы-

ходной файл записывается соответствующая им числовая последовательность. Опционально можно выводить только первые  $k$  элементов последовательности.

**antichains** – построение антицепей для заданной перестановки.

На вход подается файл с целочисленной перестановкой. Вычисляется структура антицепей, выводится в текстовом формате, а также в виде изображения (файл в формате PNG).

**schutzberger** – преобразование Шютценберже.

Заданная пользователем таблица преобразуется в другую таблицу с помощью преобразования Шютценберже и записывается в файл. Есть возможность выбора типа преобразования (классическое или с сохранением формы), вывода промежуточных таблиц, получаемых в течение одной итерации, а также вывода координат концов путей Шютценберже.

**sch\_invol** – утилита, поддерживающая разнообразные компьютерные эксперименты для исследования инволюции Шютценберже.

Итеративно генерируются пары случайных таблиц (двумерных или трехмерных), у которых совпадают  $k$  последних элементов. К таблицам применяется инволюция Шютценберже. Полученные таблицы сохраняются в файл.

**diag2img** – визуализатор двумерных диаграмм Юнга.

Заданное пользователем в виде текстового файла целочисленное разбиение сохраняется в виде файла изображения (в формате PNG или EPS) двумерной диаграммы Юнга. Возможна также визуализация кривой Вершика – Керова, выбор цвета фона, толщины линий и т. д.

**3Ddiag2img** – визуализатор трехмерных диаграмм Юнга.

По заданному текстовому файлу с плоским разбиением генерируется изображение трехмерной диаграммы Юнга. Есть возможность вывода угловых клеток диаграммы, псевдопланшерелевской формы и др.

**tab2img** – визуализатор двумерных таблиц Юнга.

На вход подается таблица Юнга в текстовом виде. Генерируется файл изображения таблицы (в формате PNG или EPS). Возможна визуализация как стандартных, так и полустандартных таблиц. Реализован вывод пути Шютценберже, пути выталкиваний RSK, леса выталкиваний, длин крюков клеток, планшерелевских вероятностей, нормированной предельной формы процесса Планшереля. Можно выбирать размер шрифта, толщину линий, цвета различных элементов таблицы и др.

**3Dtab2img** – визуализатор трехмерных таблиц Юнга.

На вход подается трехмерная таблица Юнга в текстовом виде. Генерируется файл изображения таблицы (в формате PNG или EPS). Трехмерную таблицу можно выводить в том числе в виде последовательности изображений двумерных таблиц (для каждого значения координаты  $z$ ). Возможна визуализация внешних и внутренних угловых клеток, путей Шютценберже, псевдопланшерелевских вероятностей и др.

**2Dgraph2img** – визуализатор начала двумерного графа Юнга.

Изображение первых  $k$  уровней графа сохраняется в виде векторного изображения (в формате PDF). Реализовано выделение различными цветами размерностей диаграмм (в рамках одного уровня графа). Можно задавать толщину линий, ребер, выбирать различные цвета.

### Применение программного инструментария для компьютерного исследования динамики объектов асимптотической комбинаторики

С помощью разработанного программного пакета проведены многочисленные компьютерные эксперименты, в которых были задействованы диаграммы и таблицы Юнга, состоящие из миллионов клеток. Результаты экспериментов легли в основу ряда публикаций.

Исследовалась задача поиска диаграмм Юнга с максимальными размерностями, т. е. диаграмм, содержащих наибольшее количество таблиц Юнга (при фиксированном количестве клеток). С помощью переборных алгоритмов были получены первые 170 диаграмм с максимальными размерностями на графе Юнга и первые 250 на графе Шура. Перебор диаграмм Юнга больших размеров осложнен из-за экспоненциального роста их количества. Благодаря стратегиям поиска, реализованным в настоящем программном пакете, построены последовательности двумерных диаграмм Юнга с большими и максимальными размерностями на графах Юнга [19] и Шура [20]. Анализ полученных данных позволил высказать предположения о геометрических свойствах стандартных [21] и строгих [20] диаграмм Юнга с максимальными размерностями. Переборным алгоритмом получены трехмерные диаграммы Юнга с максимальными размерностями с размерами до 25 клеток включительно [22].

Отдельно исследовались свойства жадных планшерелевских последовательностей диаграмм Юнга [20]. На основе проведенных численных экспериментов сформулирована гипотеза о слиянии жадных последовательностей, построенных от произвольной пары диаграмм Юнга. Также были обнаружены любопытные

свойства первого ряда разностей нормализованных размерностей диаграмм Юнга в жадных последовательностях.

Проведена серия компьютерных экспериментов на трехмерном обобщении графа Юнга [23]. Предложена формула для нормализованной размерности трехмерных диаграмм Юнга. Исследовались асимптотические свойства диаграмм из случайной и жадной псевдопланшерелевских последовательностей. Изучалось асимптотическое поведение их нормализованных размерностей, количества угловых клеток, длин поперечников и пр. Аналогично двумерному случаю, обнаружены интересные закономерности в первом ряде разностей нормализованных размерностей. Экспериментально получены оценки предельных распределений планшерелевских и псевдопланшерелевских вероятностей на фронте двумерной и трехмерной диаграмм Юнга соответственно. В результате проведенной компьютерной симуляции было обнаружено, что формы трехмерных диаграмм в жадных и случайных псевдопланшерелевских последовательностях сходятся с ростом размера диаграмм.

В работе [22] приведены результаты моделирования рандомизированной версии преобразования Шютценберже над трехмерными таблицами Юнга. Экспериментально установлено, что такой алгоритм позволяет получать близкое к равномерному случайное распределение трехмерных таблиц заданной формы. С помощью этого генератора были получены оценки для копереходных вероятностей неизвестного центрального процесса на трехмерном графе Юнга.

В работе [24] доказано, что при стремлении размера нумерующей таблицы Юнга, распределенной по мере Планшереля, к бесконечности, угол  $\theta$  наклона ее пути Шютценберже стремится к некоторому пределу. Другим результатом статьи является то, что по значению  $\theta$  однозначно восстанавливается первый элемент последовательности случайных равномерно распределенных чисел. С использованием представленного в настоящей статье программного инструментария изучался характер зависимости между координатами концов путей выталкиваний нумерующих таблиц, состоящих из миллионов клеток, и соответствующих им первых значений числовых последовательностей. Обнаружено [25], что «при фиксированной записывающей таблице значение первого элемента перестановки зависит только от координат конца нерва нумерующей таблицы».

Характер сходимости путей выталкиваний алгоритма RSK к их предельным формам иссле-

довался с помощью компьютерной симуляции в работах [26, 27]. Было получено близкое соответствие теоретическому результату из статьи [14]. Получена оценка для скорости сходимости, которая оказалась достаточно медленной, с главным членом, пропорциональным  $n^{-1/4}$ . Также в [27] подробно изучалось распределение координат концов путей выталкиваний: было установлено, что оно хорошо согласуется с нормальным распределением. Заметим, что при проведении вычислительных экспериментов выяснилось, что наибольшую скорость при работе с планшерелевскими таблицами Юнга показала реализация алгоритма RSK с линейным поиском, что, однако, не исключает применимость других разработанных в данном пакете подходов при исследовании таблиц Юнга, типичных для других случайных распределений.

## Заключение

Приведено краткое описание разработанного программного пакета для работы с диаграммами и таблицами Юнга. Востребованность данного пакета продиктована спецификой задач асимптотической комбинаторики, многие из которых могут быть решены лишь с помощью компьютерной симуляции. Пакет состоит из нескольких сотен методов, включает в себя более 20 тысяч строк исходного кода. Реализованы многие функции для работы с диаграммами и таблицами Юнга (добавление/удаление клеток, сравнение размерностей, вычисление нормализованных размерностей и пр.), марковские процессы на градуированных графах (процесс Планшереля, процесс Ричардсона и др.), операции над таблицами Юнга (преобразование RSK, преобразование Шютценберже и т. д.), инструменты для визуализации различных комбинаторных объектов и пр. В статье для примера приведено лишь краткое описание нескольких реализованных функций.

С помощью разработанного программного инструментария проведены многочисленные компьютерные эксперименты, в результате которых получены новые научные результаты [19–23, 25–27], что подтверждает эффективность данного инструментария.

## Финансовая поддержка

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 22-21-00669.

## Литература

1. Stanley R. P. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. 595 p.
2. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотическая теория характеров симметрической группы. *Функциональный анализ и его приложения*, 1981, т. 15, вып. 4, с. 15–27.
3. Вершик А. М. Спектр и абсолют графа двустрочечных диаграмм Юнга. *Зап. научн. сем. ПОМИ «Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXXIV»*, 2022, т. 517, с. 55–69.
4. Mora T., Robbiano L. The Gröbner fan of an ideal. *Journal of Symbolic Computation*, 1988, vol. 6, iss. 2-3, pp. 183–208. doi:10.1016/S0747-7171(88)80042-7
5. Okounkov A., Reshetikhin N. Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram. *Journal of the American Mathematical Society*, 2003, vol. 16, iss. 3, pp. 581–603. doi:10.1090/S0894-0347-03-00425-9
6. Cerf R., Kenyon R. The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 2001, vol. 222, iss. 1, pp. 147–179. doi:10.1007/s002200100505
7. Боголюбов Н. М. Перечисление плоских разбиений и алгебраический анзац Бете. *Теоретическая и математическая физика*, 2007, т. 150, вып. 2, с. 193–203. doi:10.4213/tmf5973
8. Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill College, 1965. 365 p.
9. Baer R. M., Brock P. Natural sorting over permutation spaces. *Mathematics of Computation*, 1968, vol. 22, iss. 102, pp. 385–410. doi:10.2307/2004668
10. Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic of the largest and the typical dimensions of irreducible representations of a symmetric group. *Functional Analysis and its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 1, pp. 21–31. doi:10.1007/BF01086021
11. Thoma E. Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe. *Mathematische Zeitschrift*, 1964, vol. 85, pp. 40–61.
12. Vasiliev N. N., Terentjev A. B. Modelling of almost central measures generated by Markov processes in the three-dimensional case. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 29, iss. 6, pp. 851–859. doi:10.1007/s10958-015-2532-0
13. Greene C., Nijenhuis A., Wilf H. S. A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape. *Advances in Mathematics*, 1979, vol. 31, iss. 1, pp. 104–109. doi:10.1016/0001-8708(79)90023-9
14. Romik D., Śniady P. Limit shapes of bumping routes in the Robinson – Schensted correspondence. *Random Structures & Algorithms*, 2016, vol. 48, iss. 1, pp. 171–182. doi:10.1002/rsa.20570
15. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предельная форма таблиц Юнга. *Докл. АН СССР*, 1977, т. 233, вып. 6, с. 1024–1027.
16. Schützenberger M. P. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Mathematica Scandinavica*, 1963, vol. 12, iss. 1, pp. 117–128.
17. Knuth D. E. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, 1970, vol. 34, iss. 3, pp. 709–727.
18. Bentley J. L., Yao A. C. An almost optimal algorithm for unbounded searching. *Information Processing Letters*, 1976, vol. 5, iss. 3, pp. 82–87. doi:10.1016/0020-0190(76)90071-5
19. Дужин В. С., Чудновская А. А. Поиск диаграмм Юнга с большими размерностями. *Компьютерные инструменты в образовании*, 2019, вып. 4, с. 33–43. doi:10.32603/2071-2340-2019-4-33-43
20. Duzhin V. S., Vasilyev N. N. Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams – growth and oscillations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2016, vol. 25, iss. 12, pp. 19–34. doi:10.1142/S0218216516420025
21. Duzhin V., Smirnov-Maltsev E. On Young diagrams of maximum dimension. *Communications in Mathematics*, 2023, vol. 31, iss. 3. <https://cm.episciences.org/volume/view/id/664>
22. Duzhin V., Vassiliev N. Randomized Schützenberger’s jeu de taquin and approximate calculation of the cotransition probabilities of a central Markov process on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2020, vol. 251, iss. 3, pp. 363–374. doi:10.1007/s10958-020-05097-1
23. Vasiliev N. N., Duzhin V. S. Numerical study of the asymptotics of path probabilities in a Markov process close to a central one on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, iss. 2, pp. 214–220. doi:10.1007/s10958-017-3406-4
24. Romik D., Śniady P. Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. *The Annals of Probability*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 682–737. doi:10.1214/13-AOP873
25. Васильев Н. Н., Дужин В. С., Кузьмин А. Д. Исследование свойств классов эквивалентности перестановок с помощью обратного преобразования Робинсона – Шенстеда – Кнута. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 11–22. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22
26. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. On the convergence of bumping routes to their limit shapes in the RSK algorithm. Numerical experiments. *Информационно-управляющие системы*, 2021, № 6, с. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2021-6-2-9
27. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Modeling of bumping routes in the RSK algorithm and analysis of their approach to limit shapes. *Информационно-управляющие системы*, 2022, № 6, с. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2022-6-2-9, EDN: WRCOSH
15. Вершик А. М., Керов С. В. Асимптотика меры Планшереля симметрической группы и предель-

UDC 519.165, 519.688

doi:10.31799/1684-8853-2023-6-35-45

EDN: XHNLMB

**A software package for studying problems of asymptotic combinatorics of Young diagrams and Young tableaux**V. S. Duzhin<sup>a</sup>, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0001-8399-284X, vsduzhin@etu.ru<sup>a</sup>Saint-Petersburg Electrotechnical University «LETI», 5, Prof. Popov St., 197376, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** It is often impossible to solve fundamental problems of asymptotic combinatorics without conducting massive computer experiments. However, carrying out such experiments usually requires significant computational costs. In this regard, the task of developing effective software tools is relevant. **Purpose:** To develop a software package for working with Young diagrams and Young tableaux. **Results:** A software package has been implemented in C++ which makes it possible to work with two- and three-dimensional Young diagrams and Young tableaux, as well as model various Markov processes on graded graphs. Numerous operations on Young tableaux have been implemented, including the Robinson-Schensted-Knuth algorithm and the Schützenberger’s jeu de taquin. The software tools also include rich functionality for visualizing various combinatorial objects. **Practical relevance:** The software package is written in C++, which gives an advantage over traditional approaches using computer algebra systems in terms of efficiency, with the specifics of many problems of asymptotic combinatorics taken into account. The developed software package was used to conduct numerous computer experiments in the process of modeling the dynamics of the behaviour of various objects of asymptotic combinatorics. The modeling results have formed the basis for a number of scientific publications.

**Keywords** – Young diagrams, Young tableaux, Robinson-Schensted-Knuth algorithm, RSK correspondence, jeu de taquin, asymptotic combinatorics.

**For citation:** Duzhin V. S. A software package for studying problems of asymptotic combinatorics of Young diagrams and Young tableaux. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 6, pp. 35–45 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-6-35-45, EDN: XHNLMB

**Financial support**

The work was supported by the Russian Science Foundation grant 22-21-00669.

**References**

- Stanley R. P. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. 595 p.
- Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic theory of characters of the symmetric group. *Functional Analysis and its Applications*, 1981, vol. 15, iss. 4, pp. 246–255 (In Russian).
- Vershik A. M. Spectrum and absolute of the graph of two-row Young diagrams. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI “Teoriya predstavlenij, dinamicheskie sistemy, kombinatornye metody. XXXIV”* [Notes of scientific seminars POMI “Representation theory, dynamical systems, combinatorial methods. XXXIV”], 2022, vol. 517, pp. 55–69 (In Russian).
- Mora T., Robbiano L. The Gröbner fan of an ideal. *Journal of Symbolic Computation*, 1988, vol. 6, iss. 2-3, pp. 183–208. doi:10.1016/S0747-7171(88)80042-7
- Okounkov A., Reshetikhin N. Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram. *Journal of the American Mathematical Society*, 2003, vol. 16, iss. 3, pp. 581–603. doi:10.1090/S0894-0347-03-00425-9
- Cerf R., Kenyon R. The low-temperature expansion of the Wulff crystal in the 3D Ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 2001, vol. 222, iss. 1, pp. 147–179. doi:10.1007/s002200100505
- Bogoliubov N. M. Enumeration of plane partitions and the algebraic Bethe ansatz. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2007, vol. 150, pp. 165–174 (In Russian). doi:10.1007/s11232-007-0012-5
- Feynman R. P., Hibbs A. R. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill College, 1965. 365 p.
- Baer R. M., Brock P. Natural sorting over permutation spaces. *Mathematics of Computation*, 1968, vol. 22, iss. 102, pp. 385–410. doi:10.2307/2004668
- Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic of the largest and the typical dimensions of irreducible representations of a symmetric group. *Functional Analysis and its Applications*, 1985, vol. 19, iss. 1, pp. 21–31. doi:10.1007/BF01086021
- Thoma E. Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe. *Mathematische Zeitschrift*, 1964, vol. 85, pp. 40–61 (In German).
- Vasiliev N. N., Terentjev A. B. Modelling of almost central measures generated by Markov processes in the three-dimensional case. *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 29, iss. 6, pp. 851–859. doi:10.1007/s10958-015-2532-0
- Greene C., Nienhuis A., Wilf H. S. A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape. *Advances in Mathematics*, 1979, vol. 31, iss. 1, pp. 104–109. doi:10.1016/0001-8708(79)90023-9
- Romik D., Śniady P. Limit shapes of bumping routes in the Robinson – Schensted correspondence. *Random Structures & Algorithms*, 2016, vol. 48, iss. 1, pp. 171–182. doi:10.1002/rsa.20570
- Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1977, vol. 233, iss. 6, pp. 1024–1027 (In Russian).
- Schützenberger M. P. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Mathematica Scandinavica*, 1963, vol. 12, iss. 1, pp. 117–128 (In French).
- Knuth D. E. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific Journal of Mathematics*, 1970, vol. 34, iss. 3, pp. 709–727.
- Bentley J. L., Yao A. C. An almost optimal algorithm for unbounded searching. *Information Processing Letters*, 1976, vol. 5, iss. 3, pp. 82–87. doi:10.1016/0020-0190(76)90071-5
- Duzhin V. S., Chudnovskaya A. A. Search for Young diagrams with large dimensions. *Computer Tools in Education*, 2019, iss. 4, pp. 33–43. doi:10.32603/2071-2340-2019-4-33-43 (In Russian).
- Duzhin V. S., Vasilyev N. N. Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams – growth and oscillations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2016, vol. 25, iss. 12, pp. 19–34. doi:10.1142/S0218216516420025
- Duzhin V., Smirnov-Maltsev E. On Young diagrams of maximum dimension. *Communications in Mathematics*, 2023, vol. 31, iss. 3. <https://cm.episciences.org/volume/view/id/664>
- Duzhin V., Vassiliev N. Randomized Schützenberger’s jeu de taquin and approximate calculation of the cotransition probabilities of a central Markov process on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2020,

- vol. 251, iss. 3, pp. 363–374. doi:10.1007/s10958-020-05097-1
23. Vasiliev N. N., Duzhin V. S. Numerical study of the asymptotics of path probabilities in a Markov process close to a central one on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, iss. 2, pp. 214–220. doi:10.1007/s10958-017-3406-4
24. Romik D., Sniady P. Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. *The Annals of Probability*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 682–737. doi:10.1214/13-AOP873
25. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson – Schensted – Knuth transformation. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 11–22 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22
26. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. On the convergence of bumping routes to their limit shapes in the RSK algorithm. Numerical experiments. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 6, pp. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2021-6-2-9
27. Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Modeling of bumping routes in the RSK algorithm and analysis of their approach to limit shapes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2022, no. 6, pp. 2–9. doi:10.31799/1684-8853-2022-6-2-9, EDN: WRCOSH
- 

---

### УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая Scopus и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой — различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, что снижает рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста, есть возможность провести регистрацию на 12 языках, включая русский (чтобы выбрать язык, кликните на зеленое поле сверху справа на стартовой странице): <https://orcid.org>

---