УДК 519.614
doi:10.31799/1684-8853-2024-1-2-8
EDN: DSXAAV

Научные статьи
Articles

# Матрицы семейства Адамара как срезы ортогонального гиперобъекта на смежных порядках

***Н. А. Балонин***[a]*, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru*
***А. М. Сергеев***[a]*, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/ 0000-0002-4788-9869*
***М. Б. Сергеев***[a]*, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-3845-9277*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ*

***Введение:*** *целочисленная постановка задачи поиска экстремальных по детерминанту матриц Адамара оставляет в неопределенности вопрос о том, завершаются ли итерации, которыми обычно ищется экстремум, целочисленными матрицами. Успешность разрешимости гипотезы Адамара о существовании всех таких матриц переборными методами малоэффективна в сравнении с методами некомбинаторной математики.* ***Цель:*** *показать разрешимость задачи поиска матриц семейства Адамара через срезы ортогонального гиперобъекта на смежных порядках, отвечающих последовательности натуральных чисел $t$.* ***Результаты:*** *выявлено, что, поскольку матрицы семейства Адамара определены инвариантами вложенных в их структуру матриц меньшего порядка, гиперобъект является универсальной основой для их совместного нахождения. Открытие феномена ортогонального гиперобъекта позволило уменьшить размер шага по порядкам порождаемых на его основе ортогональных матриц с $4t$ (для матриц Адамара) до $t$.* ***Практическая значимость:*** *ортогональные матрицы как результаты срезов ортогонального гиперобъекта существенно расширяют семейство матриц Адамара, имеющих большое практическое значение для задач ортогональных преобразований информации.*

***Ключевые слова*** *— помехоустойчивое кодирование, матрицы Адамара, критские матрицы, ортогональный гиперобъект, алгоритм Прокруста, симметрии матриц.*

**Для цитирования:** Балонин Н. А., Сергеев А. М., Сергеев М. Б. Матрицы семейства Адамара как срезы ортогонального гиперобъекта на смежных порядках. *Информационно-управляющие системы*, 2024, № 1, с. 2–8. doi:10.31799/1684-8853-2024-1-2-8, EDN: DSXAAV
**For citation:** Balonin N. A., Sergeev A. M., Sergeev M. B. Matrices of the Hadamard family as slices of an orthogonal hyperobject at adjacent orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 1, pp. 2–8 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-1-2-8, EDN: DSXAAV

## Введение

Теория ортогональных матриц Адамара как математических объектов принесла ощутимые практические результаты после успешных миссий нескольких космических автоматических станций к Марсу и к пределам Солнечной системы при кодировании передаваемых на Землю изображений [1, 2]. Ввиду помех в космическом канале связи именно использование ортогональных матриц Адамара $\mathbf{H}_n$ [1, 2] порядка $n$ с двумя значениями элементов 1 и –1, для которых выполняется $\mathbf{H}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_n = n\mathbf{I}_n$, где $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица, позволило получить первые изображения из далекого космоса.

Для совершенствования методов преобразования информации, помехоустойчивого кодирования данных, защищенной передачи визуальных и аудиоданных по беспроводным каналам связи и др. [3–7] сегодня требуется широкое предложение ортогональных (квазиортогональных) матриц различных порядков и структур.

Развитие теории ортогональных матриц и совершенствование ее в части установления фундаментальных связей порядков матриц и их структур можно рассматривать в связи с ортогональным гиперобъектом [8]. Причины, по которым гиперобъект становится основой для проведения научных и практических исследований, состоят в следующем: открытие феномена ортогонального гиперобъекта позволяет уменьшить размер шага по порядкам порождаемых на его основе ортогональных матриц с ограниченным количеством значений элементов с $4t$ (для матриц Адамара) до $t$, обеспечив связь их порядков со всеми числами $t$ натурального ряда.

В работе [8] показано, что целочисленные матрицы Адамара являются всего лишь срезом более крупного математического объекта, который проявляет себя как иррациональная матрица. Можно отследить блочную структуру, симметрии, узоры из знаков элементов на портретах порождаемых матриц по мере формирования ее слоев по возрастанию порядков.

Отметим, что матрицы Адамара в классическом изложении никогда не увязывались ранее с такой широкой их трактовкой, как частный срез ортогонального гиперобъекта.

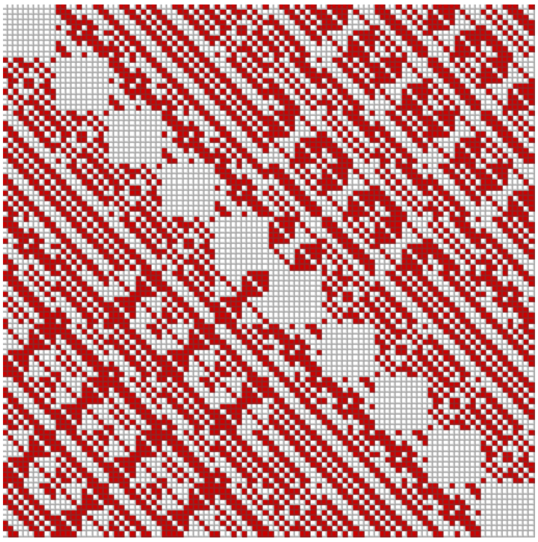
Цель настоящей статьи — показать, что проекциями гиперобъекта являются квазиортогональные матрицы с ограниченным числом значений элементов, обобщающие матрицы Адамара и существующие на смежных порядках.

## Перспективы изучения ортогонального гиперобъекта

Для поиска ортогональных иррациональных матриц применимы не переборные, а совершенно иные методы исследования [9], включая алгоритмы поиска условных экстремумов и точек типа «седло», теоремы о неподвижной точке отображения и др. Они же позволяют находить и сложные матрицы Адамара, какими являются матрицы Адамара типа Буша [10, 11] — сложнейший тестовый объект, исследуемый основателем теории спорадических групп З. Янко [12].

Например, комбинаторный алгоритм (переборного) поиска матрицы Адамара типа Буша порядка 100 [13] сопровождается примером с досадной опечаткой в кодовой последовательности 1 и –1, вследствие чего матрица теряет ортогональность. Найти, где именно допущена опечатка, означает программирование алгоритма вновь по поверхностному его описанию, причем переборные процедуры на таких порядках требуют недель, а то и месяцев работы высокопроизводительного компьютера.

Использованная оптимизационная процедура [9, 14] на основе алгоритма Прокруста [8], увеличивая детерминант этой дефектной матрицы, исправила ее до верного решения (рис. 1). Здесь единичные элементы представлены белым цветом, элементы со значениями –1 — красным. Такая возможность, вытекающая из экстремальных свойств матриц Адамара, принципиально нова и позволяет избежать длительных и малоуспешных переборов.



■ ***Рис. 1.*** Портрет исправленной матрицы Адамара типа Буша

■ ***Fig. 1.*** Portrait of a corrected Hadamard matrix of the Bush type

Это относится как к матрицам Адамара порядков $4t$, так и к матрицам их семейства на четных $4t - 2$ и нечетных $4t - 1$ и $4t + 1$ порядках. Таким способом они и были обнаружены, позволив сформулировать их общность идеей параллельных срезов одного единого ортогонального гиперобъекта. Более того, благодаря особенностям выявленного гиперобъекта появилась возможность не только исправлять дефектные матрицы Адамара, столь популярные в научных и прикладных исследованиях, но и получать новые ортогональные матрицы промежуточных порядков [8].

Понятно, что ранее не известный феномен требует тщательного исследования, обещающего, в частности, строгое научное доказательство гипотезы Адамара о существовании матриц на порядках $4t$.

В самом деле, целочисленная математика в этом случае, как и теория решений целочисленных уравнений Диофанта, упирается в неограниченную сложность узоров на портретах матриц Адамара. Подобная проблема стояла перед математикой при невозможности описать диагональ равнобедренного прямоугольного треугольника отношением двух целых величин. Потребовалась итерация Герона, и именно ее использует алгоритм Прокруста, которым осуществляется поиск иррациональных матриц как срезов гиперобъекта.

## Цель и задачи исследования ортогонального гиперобъекта

Основная цель развития и совершенствования теории ортогональных и экстремальных матриц сегодня состоит в установлении фундаментальных связей их существования, порядков и структурных инвариантов с помощью ортогонального гиперобъекта. Это открывает возможность формирования библиотеки уникальных ортогональных и экстремальных матриц для совершенствования существующих [4, 5] и разработки новых методов преобразования цифровой информации с использованием новых оригинальных матриц, сходных с адамаровыми [15].

Содержание научных и научно-технических задач, подлежащих решению при изучении гиперобъекта, следует формировать как изучение его проекций на соответствующие базисы.

Во-первых, стоит задача исследования применения ортогонального гиперобъекта как основы поиска очень разных групп ортогональных матриц и последовательностей порядков, на которых они существуют.

Во-вторых, стоит задача изучения тактики использования гиперобъекта и другой абстрактной математики для поиска ортогональных матриц с симметриями, а также выхода за пределы их применимости — на составные порядки матриц и длины порождающих их последовательностей [16].

Единство дискретной и континуальной математики как нельзя лучше демонстрируют критские матрицы, в частности, иррациональные матрицы Мерсенна $\mathbf{M}_n$ такие, что $\mathbf{M}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_n = \omega(n)\mathbf{I}_n$, где $\omega(n)$ — функция, определяющая эти матрицы с вещественными элементами 1 и $-b$ в них или образующих их блоках. В современной литературе принято называть эти и подобные им матрицы критскими (горными), подчеркивая нецелочисленность значений их элементов [3].

В отличие от матриц Адамара они заданы условием локального оптимума детерминанта на множестве матриц порядка $n = 4t - 1$ с элементами, не превышающими по модулю единицу. Локальный максимум означает, что при малой вариации элементов матрицы $\mathbf{M}_n$ детерминант будет только уменьшаться. На третьем порядке экстремум к тому же глобален, но уже на порядке 7 есть решения лучшие по детерминанту (абсолютные экстремумы), но они стоят особняком. От прочих таких оптимумов матрицы Мерсенна отличает функция значения их элементов $b = t/(t + \mathrm{sqrt}(t))$, входящая в их определение: если значение иное, то это не матрица Мерсенна. Относительно слабый оптимум гарантирует этим ортогональным матрицам существование на всех порядках $n = 4t - 1$.

Гиперобъект в виде бициклической матрицы Эйлера порядка 14 $\mathbf{E}_{14}$, матриц $\mathbf{M}_{15}$ и $\mathbf{H}_{16}$ показан последовательными срезами порядков $n = 4t - 2$, $n = 4t - 1$, $n = 4t$ на рис. 2 для $t = 4$.

Бициклические матрицы Эйлера на порядках $n = 4t - 2$ отличает функция значения элементов $b = t/(t + \mathrm{sqrt}(2t))$ двух циклических блоков. Удвоив, например, матрицу $\mathbf{M}_3$ по формуле Сильвестра без изменения значения $b$, получим матрицу Эйлера четного порядка $\mathbf{E}_6$, а добавив бинарную кайму, как на рис. 2 из элементов 1 и $-b$, вновь получим матрицу Мерсенна следующего порядка $\mathbf{M}_7$. Еще одна кайма из 1 для $-\mathbf{M}_7$ порождает матрицу Адамара с элементами 1 и –1.

Этот алгоритм можно продолжить, получив, например, стартовую матрицу $\mathbf{E}_{14}$ и далее $\mathbf{M}_{15}$ и $\mathbf{H}_{16}$, представленные на рис. 2.

Обратим внимание, что появился выбор использовать срез гиперобъекта как:

– бициклическую матрицу, получая малый уровень дублирования блоков;

– матрицу, сформированную из матрицы Мерсенна $\mathbf{M}_3$.

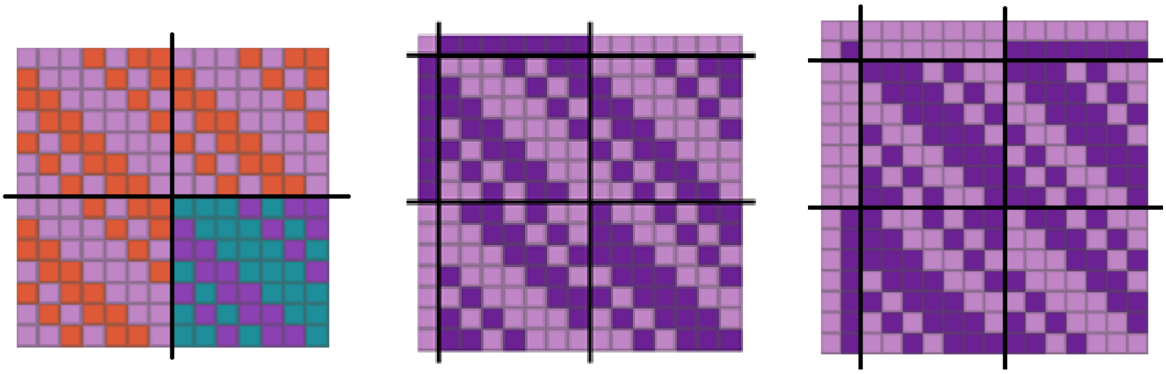
Различие узоров матриц можно использовать при обмене кодированной (маскированной) информацией с ключом, соответствующим уровню вложенности структуры матрицы.

Можно ли матрицу $\mathbf{H}_{16}$ нарастить каймой до порядка 17?

Можно, и это будет еще одним срезом гиперобъекта, но порядком выше. Особенность среза выше состоит в том, что он реализуем только для регулярных матриц Адамара с равными суммами элементов строк и столбцов — родственников магических квадратов. Главная последовательность порядков при этом равна числам Ферма 3, 5, 17, …. Такие матрицы получили название матриц Ферма [8].

Указанные срезы можно использовать и для матриц Белевича четных порядков $2t$. Таким образом, порядки совокупности ортогональных иррациональных матриц покрывают натуральные числа. Причем структура этих матриц отвечает характеру и особенностям чисел. Так, существует матрица золотого сечения [13] со значением элемента $b = 0{,}618\ldots$, и это единственная матрица порядка 10, не входящего в числовые последовательности, как у матриц Адамара, Мерсенна или Ферма.

Исследование гиперобъекта показывает, что последовательности натуральных чисел отве-



■ ***Рис. 2.*** Портреты срезов гиперобъекта порядков 14, 15 и 16

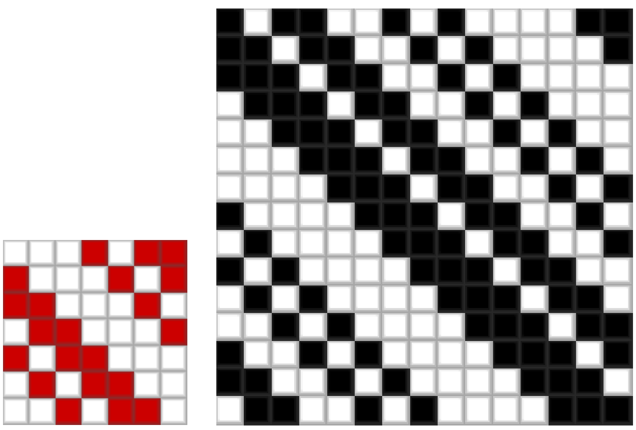
■ ***Fig. 2.*** Portraits of slices of orders 14, 15 and 16 of the hyperobject чает строение ортогональных базисов соответствующих порядков. Простым числам отвечают простые ортогональные матрицы с признаками явной симметрии, а составным — матрицы сложных структур [16]. Есть и особые матрицы на порядках, равных знаменитым в истории математики числам. Например, открытый Гауссом правильный семнадцатиугольник — это не единственный объект, сопровождающий число Ферма 17. Найдена взаимно однозначно отвечающая ему ортогональная матрица Ферма — объект совершенно иной природы, не геометрический, а малоизвестный в научной литературе матричный объект [8].

## Свойства гиперобъекта

Поскольку гиперобъект представлен не одним, а серией порядков, среди которых выделяется нечетный между парой четных порядков, то очевидно, что его свойства отражают то, к каким множествам чисел относится этот нечетный порядок $n = 4t - 1$.

Так, например, кососимметрическая с точностью до диагонали циклическая матрица Мерсенна порядка 7 (рис. 3) отражает структуры всех таких матриц простого порядка, независимо от величины числа. Обнаружение М. Холлом [3] циклической матрицы Мерсенна порядка 15 (см. рис. 3), казалось бы, нарушает строгость следования числовой системе. На самом деле, вторая матрица и все такие матрицы, порядок которых равен произведению двух соседних нечетных значений $n = 3 \times 5$, серьезно отличается от матриц первого типа тем, что они не кососимметричны.

Таким образом, случайностей в типах симметрии срезов гиперобъекта нет. Матрица не может



■ ***Рис. 3.*** Портреты срезов порядков 7 и 15 в сопоставлении

■ ***Fig. 3.*** Portraits of slices of orders 7 and 15 in comparison

приобрести или потерять без причины определенный тип симметрии. Речь не идет об эквивалентных структурах, получаемых перестановками строк и столбцов или инверсией знаков строк и столбцов. На этом может быть построен путь для следующего доказательства существования всех симметричных матриц Адамара.

Дело в том, что числовая система, которой следуют свойства срезов гиперобъекта, относительно бедна в главном своем качестве. Все числа делятся на простые и составные. Какого-либо третьего вида чисел, отличающегося от этих двух, не существует. Этим можно воспользоваться.

Так, например, еще до того, как началась история исследования матриц Адамара, их основные типы симметрии не были известны. Специалист по теории чисел У. Скарпи еще в конце XIX столетия опубликовал статью, в которой показал, что, помимо матриц Адамара порядков $n = q + 1$, где $q$ — простое число, всегда может быть построена матрица порядка $q(q + 1)$ [1].

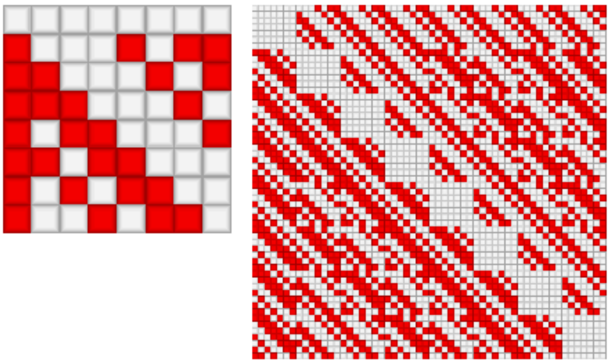
Поскольку Адамар сумел найти всего две новые матрицы порядков 12 и 20, отличающихся от последовательности Сильвестра, Скарпи нашел новую ортогональную матрицу заметно большего порядка 56 ($7 \times 8$). Кроме того, его метод позволяет находить бесконечное число таких матриц, образующих отличное отдельными своими представителями семейство. Позднее Пэли [1, 3, 4] расширил область существования матриц порядков $q(q + 1)$ на случаи, когда $q$ — степень простого числа. Расширенный алгоритм Скарпи, впрочем, настолько мало известен, что его переоткрывают заново в настоящее время.

Таким образом, складывается впечатление, что порядки $q(q + 1)$ однозначно связаны с системой простых чисел. Причем это убеждение, помноженное на авторитет алгебраистов, занимавшихся данной проблемой, распространено настолько широко, что попало в справочники [3, 4]. Это впечатление ошибочно, оно легко разрушается контрпримерами блочных матриц порядка $q(q + 1)$, для которых простота числа $q$ не играет той роли, которую придавали ей основоположники теории блочных матриц Скарпи и Пэли.

Оказывается, и в этом состоит смысл нашего нового предложения, секрет более быстрого и более универсального алгоритма заключается в перестановке сомножителей с модификацией не каймы (как у Скарпи [1]), а диагонали:

$$\mathbf{H} \times \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & h_{12}\mathbf{M} & \dots & h_{1n}\mathbf{M} \\ h_{21}\mathbf{M} & \mathbf{J} & \dots & h_{2n}\mathbf{M} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ h_{n1}\mathbf{M} & h_{n2}\mathbf{M} & \dots & \mathbf{J} \end{pmatrix},$$

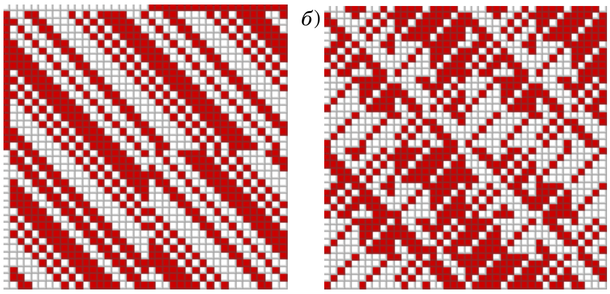
где $\mathbf{J}$ — матрица из единиц (рис. 4).



■ ***Рис. 4.*** Портреты матриц Адамара порядков 8 и 56

■ ***Fig. 4.*** Portraits of Hadamard matrices of orders 8 and 56

*а*) *б*)



■ ***Рис. 5.*** Портреты матриц Мерсенна порядка 39 (*а*) и Адамара порядка 40 (*б*)

■ ***Fig. 5.*** Portraits of the Mersenne matrix of order 39 (*a*) and Hadamard matrix of order 40 (*б*)

Заметим, что основа (core) матрицы Адамара порядка 8 совпадает, с точностью до знака, с кососимметричной матрицей Мерсенна, приведенной на рис. 3. Этот алгоритм фундаментально отличен от предлагаемого Скарпи тем, что в нем нет циклических сдвигов вставляемых блоков, есть только следование знакам.

## Кососимметричность матриц Адамара

В числовой системе, как мы ранее отмечали, ничего случайного не бывает, поэтому все матрицы Адамара порядков $q(q + 1)$ разлагаются на кососимметричные (с точностью до диагонали) сомножители простых или составных порядков $q$. Множество порядков $q$ накрывает все матрицы Мерсенна $n = 4t - 1$, и, следовательно, то же самое относится и к матрицам Адамара порядков $n = 4t$.

Приведенный контрпример не единственный, однако даже его достаточно для разрушения тезиса о необходимости простоты значения $q$. Кососимметричный сомножитель составного порядка $q = 3 \times 13 = 39$ не только существует, но и несложно найти матрицы двух видов узора на портретах, приведенных на рис. 5, *а* и *б*.

С одной стороны, матрица Мерсенна $\mathbf{M}_{39}$ состоит из матрицы Эйлера $\mathbf{E}_{38}$ с каймой. Плечами $\mathbf{E}_{38}$ является кососимметричная матрица $\mathbf{M}_{19}$, а 19 — простое число. С другой стороны, можно опираться на кососимметричную матрицу $\mathbf{H}_{20}$ из блоков **A**, **B**, **C** и **D** конструкции Себерри [3], удвоить ее алгоритмом Сильвестра [1, 3] до порядка 40 и выделить из нее отсечением каймы необходимую для построения матрицу $\mathbf{M}_{39}$.

Последний путь не нуждается в предположениях о простоте блоков, что усложняет вид портрета матрицы Мерсенна, но не отменяет факта ее существования. Такие кососимметричные сомножители позволяют в рамках нашего контрпримера построить не одну, а две матрицы Адамара отмеченной конструкции, не разрешимой методом Скарпи для порядка $q(q + 1) = 39 \times 40 = 1560$.

Таким образом, наше доказательство дополнительно к доказательству, приведенному в работе [6], опирается на фундаментальный факт: виды портретов ортогональных матриц Адамара жестко связаны с числовой системой. Кососимметрия множителей $q(q + 1)$, как видно, не зависит от того, простое число $q$ или составное. Таким образом, кососимметричные матрицы Адамара определенно существуют как члены таких разложений.

Нет оснований полагать, что деление на симметричные и кососимметричные конструкции матриц выделяет второй вид каким-либо особым фактом ее существования. Разумеется, существуют симметричные матрицы Адамара всех выделенных Адамаром порядков $4t$, в частности, блочной конструкции Пропус [3, 6]. Это конструкция из блоков **A**, **B** = **C** и **D**, альтернативная кососимметричной. Равенство двух блоков **B** и **C** позволяет построить симметричные матрицы, получившие в научной литературе название матриц Балонина — Себерри.

Существование обоих видов блочных матриц тесно связано с фундаментальной теоремой Гаусса о разложимости любого целого числа на сумму не более трех треугольных чисел. Эти три числа косвенно определяют количество элементов со значением –1 в строках трех циклических блоков **A**, **B** (**C**), **D** [3, 6]. У кососимметричных конструкций начальный блок, в силу кососимметрии, состоит из равного количества элементов со значениями 1 и –1, за исключением диагонального элемента. То есть блоков, инварианты которых определяет теорема Гаусса, тоже три: **B**, **C** и **D**.

В конечном итоге задача о нахождении треугольных чисел (а значит, и матриц Адамара) сводится к классической задаче об определении числа точек Гаусса на поверхности сферы или сфероида для конструкции Пропус [6]. Основной результат Гаусса состоит в том, что все интересные для нашей задачи порядки разрешимы. Именно эта теорема совместно с массивами составляет (помимо факта их существования) основу симметричных или кососимметричных матриц Адамара, присоединяя к ним прочие срезы гиперобъекта.

Все это в совокупности отвечает положительно на центральный для теории ортогональных матриц с малым числом элементов вопрос о разрешимости опорных порядков, кратных четырем. Отрицать этот факт — значит идти вразрез с утверждениями о строении числовой системы и содержании теоремы Гаусса, поскольку матрицы для нее — не более чем иллюстративный материал.

## Заключение

Феномен ортогонального гиперобъекта был обнаружен в 2022 г. Это достаточно поздно, если считать, что поиск матриц Адамара — классическая область приложения методов комбинаторики, где отсутствует понятие экстремума.

Исследование ортогонального гиперобъекта как иррациональной матрицы направлено на поиск путей получения через его проекции экстремальных и ортогональных матриц семейства Адамара. Результаты исследования заключаются в ответах на вопросы об особенностях взаимосвязи через гиперобъект разных групп матриц: целочисленных, рациональных и иррациональных, обладающих ортогональностью и (или) различными экстремальными свойствами.

Идея срезов гиперобъекта сильна тем, что затрагивает основы континуальной и дискретной математик. Целочисленные матрицы с их специфичным поиском комбинаторными алгоритмами поставлены во взаимно однозначное соответствие иррациональным матрицам, для поиска которых есть оптимизационные методы. Если иррациональная матрица может быть найдена, то найдется и целочисленная.

Формирование разнообразия экстремальных и ортогональных матриц семейства Адамара по порядкам и структурам является стимулом для пересмотра существующих и разработки новых методов ортогональных преобразований.

## Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003 «Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга».

## Литература


1. **Shalom E.** La conjecture de Hadamard (I) — images des mathématiques. CNRS, 2012. images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Hadamard-I.html (дата обращения: 17.12.2023).
2. **Лейтон Р.** Поверхность Марса: пер. Л. В. Самсоненко. *Успехи физических наук*, 1971, т. 103, вып. 4, с. 755–768.
3. **Jennifer S., Yamada M.** *Hadamard Matrices: Constructions using Number Theory and Linear Algebra*. Wiley, 2020. 384 p.
4. **Horadam K. J.** *Hadamard Matrices and their Applications*. Princeton University Press, 2007. 263 p.
5. **Wang R.** *Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis*. Cambridge University Press, 2010. 504 p.
6. **Востриков А. А., Балонин Ю. Н.** Матрицы Адамара — Мерсенна как базис ортогональных преобразований при маскировании видеоизображений. *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*, 2014, т. 57, № 1, с. 15–19.
7. **Григорьев Е. К.** Анализ корреляционных характеристик новых кодовых последовательностей, основанных на персимметричных квазиортогональных циркулянтах. *Труды учебных заведений связи*, 2022, т. 8, № 2, с. 83–90. doi:10.31854/1813-324X-2022-8-2-83-90
8. **Балонин Н. А., Себерри Д., Сергеев М. Б.** Задачи разрешимые и неразрешимые. Алгоритм Прокруста получения матриц семейства Адамара. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 1, с. 2–16. doi:10.31799/1684-8853-2023-1-2-16
9. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Суздаль В. С.** Динамические генераторы квазиортогональных матриц семейства Адамара. *Труды СПИИРАН*, 2017, № 5 (54), с. 224–243. doi:10.15622/sp.54.10
10. **Wallis W. D.** On a problem of K. A. Bush concerning Hadamard matrices. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1972, no. 6, pp. 321–326.
11. **Ito N., Longyear J.** Hadamard matrices of Bush-type. *Mathematical Journal of Okayama University*, 1985, no. 27, pp. 127–133.
12. **Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D.** Bush-type Hadamard matrices and symmetric designs. *Journal of Combinatorial Designs*, 2001, no. 9, pp. 72–78.
13. **Golemac A., Vucicic T.** New (100; 45; 20) symmetric designs and Bush-type Hadamard matrices of order 100. *Discrete Mathematics*, 2002, vol. 245, iss. 1–3, pp. 263–272. doi:10.1016/S0012-365X(01)00309-0
14. **Балонин Ю. Н.** Программный комплекс MMatrix-2 и найденные им M-матрицы. *Вестник компьютер-*

*ных и информационных технологий*, 2013, № 10, с. 58–63.
15. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрица золотого сечения $G_{10}$. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 6, с. 2–5.
16. **Сергеев А. М.** Простые числа и симметрии квазиортогональных матриц Мерсенна. *Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве: тез. докл. I Междунар. форума*, Санкт-Петербург, 10–11 ноября 2021 г. СПб., 2021, с. 14–15.

UDC 519.614
doi:10.31799/1684-8853-2024-1-2-8
EDN: DSXAAV

**Matrices of the Hadamard family as slices of an orthogonal hyperobject at adjacent orders**

N. A. Balonin[a], Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru
A. M. Sergeev[a], PhD, Associate Professor, orcid.org/0000-0002-4788-9869
M. B. Sergeev[a], Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-3845-9277
[a]Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** The integer formulation of the problem of finding Hadamard matrices that are extreme in terms of the determinant leaves in uncertainty the question of whether the iterations that usually search for the extremum end with integer matrices. From the point of view of the success the solvability of Hadamard's hypothesis about the existence of all such matrices, enumeration methods for finding them are not very effective in comparison with the methods of non-combinatorial mathematics. **Purpose:** To show the solvability of the problem of searching for the matrices of the Hadamard family through the slices of an orthogonal hyperobject on adjacent orders corresponding to a sequence of natural numbers $t$. **Results:** We have ascertained that since the matrices of the Hadamard family are defined by the invariants of lower-order matrices embedded in their structure, the hyperobject turns out to be a universal basis for their joint location. The discovery of the phenomenon of an orthogonal hyperobject has made it possible to reduce the step size in the orders of orthogonal matrices generated on its basis from $4t$ (for Hadamard matrices) to $t$. **Practical relevance:** Orthogonal matrices as the results of slices of an orthogonal hyperobject significantly expand the family of Hadamard matrices, which are of great practical importance for problems of orthogonal transformations of information.
**Keywords** — noise-resistant coding, Hadamard matrices, Cretan matrices, orthogonal hyperobject, Procrustes algorithm, matrix symmetries.

**For citation:** Balonin N. A., Sergeev A. M., Sergeev M. B. Matrices of the Hadamard family as slices of an orthogonal hyperobject at adjacent orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 1, pp. 2–8 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-1-2-8, EDN: DSXAAV

**Financial support**

The work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. FSRF-2023-0003 "Fundamentals of structures of noise-protected spacecraft systems communication and satellite communications, relative navigation gation, technical vision and aerospace monitoring".

## References

1. Shalom E. La conjecture de Hadamard (I) — Images des Mathématiques. CNRS, 2012. Available at: images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Hadamard-I.html (accessed 17 December 2023).
2. Leighton R. The surface of Mars. *Uspekhi fizicheskih nauk*, 1971, vol. 103, iss. 4, pp. 755–768 (In Russian).
3. Jennifer S., Yamada M. *Hadamard Matrices: Constructions using Number Theory and Linear Algebra*. Wiley, 2020. 384 p.
4. Horadam K. J. *Hadamard Matrices and their Applications*. Princeton University Press, 2007. 263 p.
5. Wang R. *Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis*. Cambridge University Press, 2010. 504 p.
6. Vostrikov A. A., Balonin Y. N. Hadamard — Mersenne matrices as a basis of orthogonal transformation for video masking encoding. *Journal of Instrument Engineering*, 2014, vol. 57, no. 1, pp. 15–19 (In Russian).
7. Grigoriev E. K. Study of correlation properties of new code sequences based on persymmetric quasi-orthogonal circulants. *Proceedings of Telecommunication Universities*, 2022, vol. 8, no. 2, pp. 83–90 (In Russian). doi:10.31854/1813-324X-2022-8-2-83-90
8. Balonin N. A., Seberry J., Sergeev M. B. Solvable and unsolvable problems. Using Procrustes analysis algorithm for obtaining a family of Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 1, pp. 2–16 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-1-2-16
9. Balonin N. A., Sergeev M. B., Suzdal V. S. Dynamic generators of the quasiortogonal Hadamard matrix family. *SPIIRAS Proceedings*, 2017, vol. 5 (54), pp. 224–243 (In Russian). doi:10.15622/sp.54.10
10. Wallis W. D. On a problem of K. A. Bush concerning Hadamard matrices. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1972, no. 6, pp. 321–326.
11. Ito N., Longyear J. Hadamard matrices of Bush-type. *Mathematical Journal of Okayama University*, 1985, no. 27, pp. 127–133.
12. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. Bush-type Hadamard matrices and symmetric designs. *Journal of Combinatorial Designs*, 2001, no. 9, pp. 72–78.
13. Golemac A., Vucicic T. New (100; 45; 20) symmetric designs and Bush-type Hadamard matrices of order 100. *Discrete Mathematics*, 2002, vol. 245, iss. 1–3, pp. 263–272. doi:10.1016/S0012-365X(01)00309-0
14. Balonin Yu. N. The software complex Mmatrix-2 and searched minimax matrices. *Herald of Computer and Information Technologies*, 2013, no. 10, pp. 58–63 (In Russian).
15. Balonin N. A., Sergeev M. B. Matrix of golden ratio $G_{10}$. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2013, no. 6, pp. 2–5 (In Russian).
16. Sergeev A. M. Prime numbers and symmetries of quasi-orthogonal Mersenne matrices. *Trudy I Mezhdunarodnogo foruma "Matematicheskie metody i modeli v vysokotekhnologichnom proizvodstve"* [Proc. 1st Int. Symp. "Mathematical methods and models in high-tech production"]. Saint-Petersburg, 2021, pp. 14–15 (In Russian).