УДК 621.391.1:621.395
doi:10.31799/1684-8853-2024-3-24-31
EDN: QEGHLU

Научные статьи
Articles

Управление характеристиками систем массового обслуживания через сдвиг законов распределений в виде вероятностных смесей

В. Н. Тарасов[a], *доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-9318-0797, v.tarasov@psuti.ru*
Н. Ф. Бахарева[a], *доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-9850-7752*
[a]*Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Льва Толстого ул., 23, Самара, 443010, РФ*

Введение: *необходимость минимизации времени ожидания в очереди и объемов буферов хранения данных в перспективных системах передачи данных остается актуальной и требует постоянной доработки.* ***Цель:*** *расширение класса систем массового обслуживания как систем с подвергнутыми операции сдвига законами распределений в виде вероятностных смесей для решения поставленной проблемы.* ***Методы:*** *метод спектрального решения интегрального уравнения Линдли на основе теории преобразования Лапласа.* ***Результаты:*** *разработаны численно-аналитическая и имитационная модели для двух различных систем с гиперэкспоненциальным и гиперэрланговским входными распределениями. Выявлено, что сдвиг законов распределений вправо уменьшает коэффициенты вариаций, а они вносят основной вклад в формирование величины среднего времени ожидания требований в очереди. Тогда в системах со сдвинутыми распределениями время ожидания уменьшится многократно в зависимости от величины параметра сдвига. Учитывая функциональную зависимость основных критериев эффективности систем от среднего времени ожидания по формулам Литтла, убеждаемся в возможности их регулирования с помощью параметра временного сдвига. Это позволит контролировать основные характеристики реальных систем передачи данных, что важно для теории и практики проектирования таких систем.* ***Практическая значимость:*** *полученные результаты представляют большой интерес для теории и практики передачи данных, позволяя регулировать основные параметры систем передачи данных.* ***Обсуждение:*** *для развития проведенных исследований важны результаты внедрения предложенного подхода в теорию и практику передачи данных. Для этого необходимо получить результаты работы экспериментального программно-аппаратного комплекса для подтверждения данных численно-аналитических и имитационных моделей.*

Ключевые слова *— системы с временным сдвигом, изображение Лапласа, интегральное уравнение Линдли, спектральное решение, дискретно-событийное моделирование, GPSS World.*

Для цитирования: Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф. Управление характеристиками систем массового обслуживания через сдвиг законов распределений в виде вероятностных смесей. *Информационно-управляющие системы*, 2024, № 3, с. 24–31. doi:10.31799/1684-8853-2024-3-24-31, EDN: QEGHLU
For citation: Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Controlling the characteristics of a queueing system through shifting distribution laws in the form of probabilistic mixtures. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 3, pp. 24–31 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-3-24-31, EDN: QEGHLU

Введение

В открытой печати исследования в заявленной предметной области авторами не обнаружены, хотя применяемый основной метод спектрального решения уравнения Линдли используется во многих работах [1–3 и др.]. Настоящее исследование является логическим продолжением работ [4, 5–8]. Рассмотрим однолинейные системы массового обслуживания (СМО) A/B/1, в которых законы распределения A и B подвергнуты операции сдвига вправо, и тогда функции плотности, с помощью которых формируется система, имеют вид

$$a(t)=\begin{cases} a(t-t_0), & t\ge t_0 \\ 0, & 0\le t<t_0 \end{cases};$$

$$b(t)=\begin{cases} b(t-t_0), & t\ge t_0 \\ 0, & 0\le t<t_0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Применяемый метод спектрального решения требует выполнения условия преобразования функции (1) по Лапласу.

Временной сдвиг законов распределений, формирующих СМО, уменьшает коэффициенты вариаций распределений и тем самым приводит СМО к наиболее общему типу G/G/1. Основная идея определения средней задержки требований в очереди путем решения интегрального уравнения Линдли спектральным методом сводится к установлению закона распределения времени ожидания через изображения Лапласа $A^*(s)$, $B^*(s)$ функций плотности $a(t)$ и $b(t)$. Для решения этой задачи конструируется рациональная функция

$$A^*(-s)\,B^*(s)-1=\alpha(s)/\beta(s) \qquad (2)$$

комплексной переменной s. Таким образом, сам метод спектрального решения включает этапы построения дробно-рациональных функций $\alpha(s)$, $\beta(s)$ и нахождения ее нулей и полюсов в комплексной плоскости.

В настоящей статье представлены результаты исследований по двум характерным системам. Первая система образована потоками, определяемыми сдвинутой функцией гиперэкспоненциального распределения второго порядка

$$F(t)=\begin{cases}1-\sum\limits_{k=1}^{2}p_i e^{-\lambda_i(t-t_0)}, & t\ge t_0\\ 0, & 0\le t<t_0\end{cases},\quad \sum_{i=1}^{2}p_i=1$$

и сдвинутой функцией экспоненциального распределения

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda(t-t_0)}, & t\ge t_0\\ 0, & 0\le t<t_0\end{cases}.$$

Вторая система сформирована потоками, описываемыми сдвинутой функцией гиперэрланговского распределения второго порядка

$$F(t)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{2}p_i\left[1-e^{-\lambda_i(t-t_0)}\sum\limits_{k=0}^{1}\dfrac{[\lambda_i(t-t_0)]^k}{k!}\right], & t\ge t_0\\ 0, & 0\le t<t_0\end{cases},$$

$$\sum_{i=1}^{2}p_i=1$$

и сдвинутой функцией распределения Эрланга второго порядка

$$F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda(t-t_0)}\sum\limits_{k=0}^{1}\dfrac{[\lambda(t-t_0)]^k}{k!}, & t\ge t_0\\ 0, & 0\le t<t_0\end{cases}.$$

Тогда первая СМО будет описываться функциями плотности

$$a(t)=p\lambda_1 e^{-\lambda_1(t-t_0)}+(1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2(t-t_0)};$$

$$b(t)=\mu e^{-\mu(t-t_0)}, \tag{3}$$

а вторая –

$$a(t)=p\lambda_1^2(t-t_0)e^{-\lambda_1(t-t_0)}+(1-p)\lambda_2^2(t-t_0)e^{-\lambda_2(t-t_0)};$$

$$b(t)=\mu^2(t-t_0)e^{-\mu(t-t_0)}. \tag{4}$$

Численно-аналитическая модель первой СМО представлена в работе [5], а второй — в [6]. Имитационные модели данных систем апробированы в [8]. Здесь же мы будем акцентировать внимание не на численно-аналитических моделях, а на свойствах систем с запаздыванием во времени, а именно на возможности контроля (управления) основных характеристик СМО с помощью величины параметра сдвига t_0.

Ближе всех к системам с запаздыванием стоят работы зарубежных авторов [9, 10]. В настоящей работе авторами использованы известные приемы и методы аппроксимации законов распределений [11–13]. Значительный интерес с точки зрения теории массового обслуживания представляют работы [14–23].

Постановка и решение задачи

Пусть заданы СМО, описываемые функциями плотности (3) и (4). На их численно-аналитических и имитационных моделях требуется провести вычислительный и имитационный эксперименты с целью подтвердить возможности управления основными характеристиками СМО. Тем самым признать, что основные выводы [4] для систем с простыми законами распределений полностью справедливы и для систем с составными распределениями.

Как известно из теории вероятностей, сдвиг закона распределения вправо на величину t_0 влечет за собой увеличение математического ожидания случайной величины на эту же величину, и при этом значение коэффициента вариации, обратно пропорциональное математическому ожиданию, уменьшится. Тогда мы можем утверждать, что среднее время ожидания в системе уменьшится, и в этом будет заключаться принципиальное отличие рассматриваемых систем от классических систем массового обслуживания [4].

Из свойства запаздывания теории преобразования Лапласа следует, что для любой скалярной величины $t_0 > 0$ справедливо равенство $L[f(t-t_0)]=e^{-st_0}\cdot F^*(s)$, где $\mathrm{Re}(s) > 0$. Тогда для спектрального разложения $A^*(-s)B^*(s) - 1 = \alpha(s)/\beta(s)$ для СМО с операционным сдвигом имеет место равенство

$$\alpha(s)/\beta(s)=e^{t_0 s}A^*(-s)e^{-t_0 s}B^*(s)-1=$$
$$=A^*(-s)B^*(s)-1. \tag{5}$$

Следовательно, спектральные решения для двух совершенно различных систем — системы с запаздыванием и соответствующей ей классической системы — по форме совпадают. Тогда будут совпадать и расчетные формулы для среднего времени ожидания, но для системы с запаздыванием будут изменены параметры образующих законов распределений.

Численно-аналитическое решение задачи для первой СМО

Рассмотрим систему, образованную с помощью функций плотности (3) с изображениями Лапласа

$$A^*(s)=\left[p(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+s})+(1-p)(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s})\right]e^{-t_0 s};$$

$$B^*(s)=\frac{\mu}{s+\mu}e^{-t_0 s},$$

и кратко напомним об основных сведениях об этой системе [5].

Спектральное решение как для классической системы, так и системы с запаздыванием, описываемой функциями плотности (3), будет иметь вид

$$\frac{\alpha(s)}{\beta(s)}=\left[p\frac{\lambda_1}{\lambda_1-s}+(1-p)\frac{\lambda_2}{\lambda_2-s}\right]\frac{\mu}{\mu+s}-1=$$

$$=\frac{s(s^2-l_1 s-l_0)}{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)(\mu+s)}=\frac{s(s+\sigma_1)(s-\sigma_2)}{(s-\lambda_1)(\lambda_2-s)(\mu+s)},$$

где коэффициенты квадратного трехчлена $l_0=\mu[\lambda_1(1-p)+\lambda_2 p]-\lambda_1\lambda_2$, $l_1=\lambda_1+\lambda_2-\mu$ и нули разложения зависят от параметров λ_1, λ_2, μ распределений (3). Здесь корни числителя разложения будут $-\sigma_1=-(\sqrt{l_1^2/4+l_0}-l_1/2)$ и $\sigma_2=\sqrt{l_1^2/4+l_0}+l_1/2$. Через знак "–" обозначен отрицательный корень. «Решение для среднего времени ожидания имеет вид

$$\bar{W}=1/\sigma_1-1/\mu, \tag{6}$$

где $\sigma_1=\sqrt{l_1^2/4+l_0}-l_1/2$» [5]. Здесь следует отметить, что согласно методу спектрального решения в выражениях для среднего времени ожидания участвуют только отрицательные корни числителя разложения, которые в самих выражениях берутся со знаком плюс.

Для определения параметров выражения (6) используем уравнения моментов до второго порядка включительно. Для распределения (3) соответственно значения среднего интервала между поступлениями требований $\bar{\tau}_\lambda$ и коэффициента вариации c_λ:

$$\bar{\tau}_\lambda=p\lambda_1^{-1}+(1-p)\lambda_2^{-1}+t_0;$$

$$c_\lambda^2=\frac{[(1-p^2)\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2 p(1-p)+p(2-p)\lambda_2^2]}{[t_0\lambda_1\lambda_2+(1-p)\lambda_1+p\lambda_2]^2}. \tag{7}$$

Для закона обслуживания

$$\bar{\tau}_\mu=\mu^{-1}+t_0;\; c_\mu=(1+\mu t_0)^{-1}. \tag{8}$$

Из уравнений моментов (7) и (8) определим параметры распределений (3) [5]:

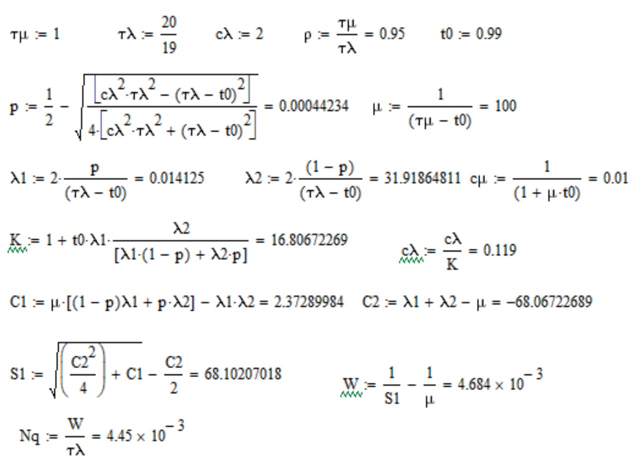
$$\lambda_1=2p/(\bar{\tau}_\lambda-t_0),\; \lambda_2=2(1-p)/(\bar{\tau}_\lambda-t_0),$$

$$p=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\frac{c_\lambda^2\bar{\tau}_\lambda^2-(\bar{\tau}_\lambda-t_0)^2}{c_\lambda^2\bar{\tau}_\lambda^2+(\bar{\tau}_\lambda-t_0)^2}}\right],\; \mu=1/(\bar{\tau}_\mu-t_0). \tag{9}$$

Теперь все готово для использования выражения (6) для среднего времени ожидания при заданных значениях числовых характеристик распределений (3) при варьировании величины параметра сдвига $0<t_0<\bar{\tau}_\mu$. При этом учитываем, насколько уменьшается коэффициент вариации c_λ при операции сдвига закона распределения. Отношение c_λ при $t_0=0$ к значению c_λ при $0<t_0<\bar{\tau}_\mu$ составляет $1+t_0\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-p(\lambda_1-\lambda_2)}$, т. е. коэффициент вариации уменьшается во столько раз. Фрагмент программы расчета на Mathcad для одного варианта (рис. 1) полностью раскрывает алгоритм расчета среднего времени ожидания и средней длины очереди в системе $\bar{N}_q$.

Серия расчетов на Mathcad (табл. 1) проведена для случаев умеренной $\rho=0{,}55$ и высокой $\rho=0{,}95$ нагрузки при коэффициенте вариации $c_\lambda=2$ для первой системы без сдвига ($t_0=0$) при единичном времени обслуживания. В таблицах среднее время ожидания и средняя длина очереди в системах с временным сдвигом обозначены $\bar{W}$ и $\bar{N}_q$, а в классической системе — $\bar{W}_{\text{кл}}$ и $\bar{N}_{q\,\text{кл}}$.

Результаты численно-аналитического моделирования убедительно демонстрируют зави-



■ ***Рис. 1.*** Результаты расчета на Mathcad для одного варианта для первой системы

■ ***Fig. 1.*** Calculation results on Mathcad for one option for the first system

■ ***Таблица 1.*** Результаты вычислительных экспериментов для первой СМО
■ ***Table 1.*** Results of computational experiments for the first QS

Входные параметры				Выходные результаты			
ρ	c_λ	c_μ	t_0	$\bar{W}$	$\bar{N}_q$	$\bar{W}_{\text{кл}}$	$\bar{N}_{q\,\text{кл}}$
0,55	1,989	0,990	0,01	2,68	1,47	2,72	1,50
	1,890	0,900	0,1	2,33	1,21		
	1,450	0,500	0,5	0,80	0,35		
	1,010	0,100	0,9	0,03	0,01		
	0,911	0,010	0,99	0,00	0,00		
0,95	1,981	0,990	0,01	47,23	44,44	47,46	45,08
	1,810	0,900	0,1	45,21	39,23		
	1,050	0,500	0,5	36,54	23,54		
	0,290	0,100	0,9	13,35	6,84		
	0,119	0,010	0,99	0,005	0,002		

симость основных характеристик СМО от величины параметра сдвига законов распределений. При этом наблюдаем непрерывность численно-аналитической модели: при убывании параметра сдвига значения характеристик системы с операционным сдвигом стремятся к их значениям для обычной системы без сдвига.

Численно-аналитическое решение задачи для второй СМО

Теперь рассмотрим СМО, сформированную функциями плотности (4) с изображениями Лапласа

$$A^*(s) = \left[p\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+s}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}\right)^2\right]e^{-t_0 s};$$

$$B^*(s) = \left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s}.$$

Спектральное решение

$$\frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \left[p\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-s}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2-s}\right)^2\right]\times$$

$$\times e^{t_0 s}\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^2 e^{-t_0 s} - 1 =$$

$$= \left[p\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-s}\right)^2 + (1-p)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2-s}\right)^2\right]\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)^2 - 1 =$$

$$= \frac{-s(s+s_1)(s+s_2)(s-s_3)(s-s_4)(s-s_5)}{(\lambda_1-s)^2(\lambda_2-s)^2(\mu+s)^2}$$

с полным выводом формулы для среднего времени ожидания для этой системы приведено в работе [6]:

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{2}{\mu}, \qquad (10)$$

«где s_1, s_2 — абсолютные значения отрицательных корней $-s_1$, $-s_2$ многочлена пятой степени $s^5 - c_4 s^4 - c_3 s^3 - c_2 s^2 - c_1 s - c_0$ с коэффициентами $c_0 = -2\lambda_1\lambda_2\mu(\lambda_1\lambda_2 - \mu\lambda_1 - p\mu\lambda_2 + p\mu\lambda_1)$, $c_1 = -\mu^2(\lambda_1^2 - p\lambda_1^2 + p\lambda_2^2) - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1\lambda_2 - 4\mu\lambda_1 - 4\mu\lambda_2 + 4\mu^2)$, $c_2 = -2\mu(\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) + 2\mu^2(\lambda_1+\lambda_2) + 2\lambda_1\lambda_2 \times (\lambda_1+\lambda_2)$, $c_3 = -(\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) - \mu(\mu - 4\lambda_1 - 4\lambda_2)$, $c_4 = 2(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu)$» [6].

Для использования (10) определим параметры распределений (4) из уравнений моментов

$$\bar{\tau}_\lambda = 2p\lambda_1^{-1} + 2(1-p)\lambda_2^{-1} + t_0,$$

$$c_\lambda^2 = \frac{2[\lambda_1^2 + p(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-3\lambda_2) - 2p^2(\lambda_1-\lambda_2)^2]}{\{2[\lambda_1 - p(\lambda_1-\lambda_2)] + t_0\lambda_1\lambda_2\}^2},$$

$$\bar{\tau}_\mu = 2/\mu + t_0, \;\; c_\mu = \sqrt{2}/(2+\mu t_0).$$

Для этого получены следующие результаты:

$$\lambda_1 = 4p/(\bar{\tau}_\lambda - t_0), \;\; \lambda_2 = 4(1-p)/(\bar{\tau}_\lambda - t_0),$$

$$\mu = 2/(\bar{\tau}_\mu - t_0), \;\; p = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2\bar{\tau}_\lambda^2]}}$$

при $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$ [6].

Отношение c_λ при $t_0 = 0$ к значению c_λ при $0 < t_0 < \bar{\tau}_\mu$ в этом случае составляет

$$1 + t_0\frac{\lambda_1\lambda_2}{2[\lambda_1 - p(\lambda_1-\lambda_2)]},$$

т. е. коэффициент вариации уменьшается во столько раз. Фрагмент программы расчета на Mathcad для одного варианта показан на рис. 2.

Результаты серии расчетов на Mathcad приведены в табл. 2 для случаев умеренной $\rho = 0{,}55$ и высокой $\rho = 0{,}95$ нагрузки при коэффициенте вариации $c_\lambda = 2$ для второй системы при единичном времени обслуживания.

Результаты вычислительных экспериментов (см. табл. 1 и 2) полностью доказывают наши предположения относительно систем со сдвинутыми законами распределений. Основные характеристики рассматриваемых систем явно зависят от величины параметра сдвига, тем самым признана возможность их контролирования. Результаты также подтверждают выполнение свойства непрерывности рассматриваемых си-

$$\tau\lambda := \frac{20}{19} \quad \tau\mu := 1 \quad c\lambda := 2 \quad \rho := \frac{\tau\mu}{\tau\lambda} = 0.95 \quad t0 := 0.99$$

$$p := \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\left[2 \cdot c\lambda^2 \cdot \tau\lambda^2 - (\tau\lambda - t0)^2\right]}{8 \cdot \left[(\tau\lambda - t0)^2 + c\lambda^2 \cdot \tau\lambda^2\right]}} = 0.00033171 \quad \mu := \frac{2}{(\tau\mu - t0)} = 200$$

$$\lambda 1 := 4 \cdot \frac{p}{(\tau\lambda - t0)} = 0.02118516 \quad \lambda 2 := 4 \cdot \frac{(1-p)}{(\tau\lambda - t0)} = 63.84436106$$

$$K := 1 + t0 \cdot \lambda 1 \cdot \frac{\lambda 2}{2 \cdot [\lambda 1 \cdot (1-p) + \lambda 2 \cdot p]} \quad c\lambda := \frac{c\lambda}{K} = 0.119 \quad c\mu := \frac{\sqrt{2}}{(2 + \mu \cdot t0)} = 0.0071$$

$$C0 := -2 \cdot \lambda 1 \cdot \lambda 2 \cdot \mu \cdot (\lambda 1 \cdot \lambda 2 - \mu \cdot \lambda 1 - p \cdot \mu \cdot \lambda 2 + p \cdot \mu \cdot \lambda 1) = 3851.36708193$$

$$C1 := -\mu^2 \cdot \left(\lambda 1^2 - p \cdot \lambda 1^2 + p \cdot \lambda 2^2\right) - \lambda 1 \cdot \lambda 2 \cdot \left(\lambda 1 \cdot \lambda 2 - 4 \cdot \mu \cdot \lambda 1 - 4 \cdot \mu \cdot \lambda 2 + 4 \cdot \mu^2\right) = -201407.18651587$$

$$C2 := -2 \cdot \mu \cdot \left(\lambda 1^2 + 4 \cdot \lambda 1 \cdot \lambda 2 + \lambda 2^2\right) + 2 \cdot \mu^2 \cdot (\lambda 1 + \lambda 2) + 2 \cdot \lambda 1 \cdot \lambda 2 \cdot (\lambda 1 + \lambda 2) = 3476811.22070005$$

$$C3 := -\mu^2 - \lambda 1^2 - \lambda 2^2 + 4 \cdot \mu \cdot (\lambda 1 + \lambda 2) - 4 \cdot \lambda 1 \cdot \lambda 2 = 7010.9239 \quad C4 := 2 \cdot \lambda 1 - 2 \cdot \mu + 2 \cdot \lambda 2 = -272.2689$$

Given

$$S^5 - C4 \cdot S^4 - C3 \cdot S^3 - C2 \cdot S^2 - C1 \cdot S - C0 = 0$$

$$\mathrm{Find}(S) \rightarrow (-1.362E+002 \;\; 1.056E+002 \;\; -2.418E+002 \;\; 2.896E\text{-}002 + 1.64E\text{-}002i \;\; 2.896E\text{-}002 - 1.64E\text{-}002i)$$

$$S1 := 1.362E+002 \quad S2 := 2.418E+002$$

$$W := \frac{1}{S1} + \frac{1}{S2} - \frac{2}{\mu} = 0.0015 \quad Nq := \frac{W}{\tau\lambda + t0} = 7.235 \times 10^{-4}$$

■ ***Рис. 2.*** Результаты расчета на Mathcad для одного варианта для второй системы

■ ***Fig. 2.*** Calculation results on Mathcad for one option for the second system

■ ***Таблица 2.*** Результаты вычислительных экспериментов для второй СМО

■ ***Table 2.*** Results of computational experiments for the second QS

Входные параметры				Выходные результаты			
ρ	c_λ	c_μ	t_0	$\bar{W}$	$\bar{N}_q$	$\bar{W}_{кл}$	$\bar{N}_{q\,кл}$
	1,989	0,700	0,01	2,04	1,12		
	1,890	0,636	0,1	1,73	0,90		
0,55	1,450	0,354	0,5	0,45	0,20	2,08	1,14
	1,010	0,071	0,9	0,01	0,00		
	0,911	0,007	0,99	0,00	0,00		
	1,981	0,700	0,01	42,68	40,16		
	1,810	0,636	0,1	41,53	36,03		
0,95	1,050	0,354	0,5	36,54	23,54	42,80	40,66
	0,290	0,071	0,9	14,88	7,62		
	0,119	0,007	0,99	0,002	0,001		

стем с запаздыванием: при уменьшении величины параметра t_0 основные характеристики приближаются к их соответствующим характеристикам для классических систем. Этого и стоило ожидать, так как при $t_0 = 0$ распределения (3) и (4) будут описывать классические СМО.

Имитационное моделирование в GPSS World

Далее используем апробированные [8] имитационные модели рассматриваемых систем. В работе [8] представлены коды программ на языке GPSS World с использованием логических переключателей для фаз законов распределений и соответствующих генераторов случайных величин. «При этом распределение Эрланга рассматривается как частный случай гамма-распределения. Генераторы составных распределений включают программы генерации взвешенных экспоненциальных и эрланговских распределений. В этих генераторах предусмотрен сдвиг закона распределения вправо на соответствующую величину» [8]. Ввиду трудоемкости имитационных экспериментов ограничимся одним вариантом для каждой системы.

Пояснения по входным параметрам для первой имитационной модели. Задаем параметр сдвига $t_0 = 0{,}01$ и средние значения интервалов поступлений и обслуживания $\bar{\tau}_\lambda = 20/19$, $\bar{\tau}_\mu = 1$, тогда загрузка $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\mu = 0{,}95$. Из равенств (9) определим параметры распределений (3):

$$\lambda_1 = 2p / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) = 0{,}212,$$

$$\lambda_2 = 2(1-p) / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) = 1{,}706,$$

$$p = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2 - (\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2 + (\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}}\right] = 0{,}111,$$

$$\mu = 1 / (\bar{\tau}_\mu - t_0) = 1{,}010.$$

Тогда средние интервалы для первой и второй фаз гиперэкспоненциального распределения $1/\lambda_1 = 4{,}707$, $1/\lambda_2 = 0{,}586$.

Вариант расчета для случая $\rho = 0{,}95$, $t_0 = 0{,}01$ представлен на рис. 3, *а*.

Пояснения по входным параметрам для второй имитационной модели. Задаем параметр сдвига $t_0 = 0{,}01$ и средние значения интервалов поступлений и обслуживания $\bar{\tau}_\lambda = 20/19$, $\bar{\tau}_\mu = 1$, тогда загрузка $\rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\mu = 0{,}95$. Из равенств для найденных параметров распределений (4) установим их числовые значения:

$$\lambda_1 = 4p / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) = 0{,}308,$$

$$\lambda_2 = 4(1-p) / (\bar{\tau}_\lambda - t_0) = 3{,}528,$$

$$\mu = 2 / (\bar{\tau}_\mu - t_0) = 2{,}02,$$

$$p = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2}{8[(\bar{\tau}_\lambda - t_0)^2 + c_\lambda^2 \bar{\tau}_\lambda^2]}} = 0{,}08.$$

Тогда средние интервалы для первой и второй фаз гиперэрланговского распределения $1/\lambda_1 = 3{,}246$, $1/\lambda_2 = 0{,}283$.

а)
```
FACILITY ENTRIES UTIL. AVE.TIME AVAIL. OWNER PEND INTER RETRY DELAY
CHAN     1000001 0.951   1.010   1     2007930  0    0     0     56

QUEUE MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME  AVE.(-0) RETRY
QCHAN 368  57   1000057 26354    44.296    47.049    48.322    0
```

б)
```
FACILITY ENTRIES UTIL. AVE.TIME AVAIL. OWNER PEND INTER RETRY DELAY
CHAN     1000001 0.954   1.010    1    2000863  0    0     0     6

QUEUE MAX CONT. ENTRY ENTRY(0) AVE.CONT. AVE.TIME  AVE.(-0) RETRY
QCHAN 309  7    1000007 21173    40.260    42.652    43.575   0
```

■ ***Рис. 3.*** Результаты прогона имитационной модели для первой (*а*) и второй (*б*) системы

■ ***Fig. 3.*** Results of running the simulation model for the first (*а*) and second (*б*) system

Вариант расчета второй системы показан на рис. 3, *б*.

Имитационное моделирование даже в случае небольшого сдвига законов распределений подтверждает чувствительность моделей и их полное соответствие численно-аналитическому моделированию (см. табл. 1 и 2).

Заключение

Полученные результаты численно-аналитического (табл. 1 и 2) и имитационного моделирования (рис. 3) полностью подтверждают выдвинутые выше предположения о системах с операционным сдвигом законов распределений. Сдвиг законов распределений приводит к функциональной зависимости их числовых характеристик и параметров и, следовательно, основных характеристик системы от параметра сдвига.

Адекватность представленных моделей систем однозначно подтверждена результатами моделирования. Параметр сдвига становится управляющим параметром для регулирования величин основных характеристик СМО. Таким образом, результаты аналитического и имитационного моделирования явно демонстрируют возможность управлять характеристиками СМО через параметр сдвига законов распределения.

Литература

1. **Kleinrock L.** *Queueing Systems*. Vol. I. Wiley, 1974. 448 p.
2. **Do T. V., Chakka R., Sztrik J.** Spectral expansion solution methodology for QBD-M processes and applications in future internet engineering. *ICCSAMA*, 2016, pp. 131–142. doi:10.1007/978-3-319-00293-4-11
3. **Ma X. A., Wang Y., Zhu X., Liu W., Lan Q., Xiao W.** Spectral method for two-dimensional ocean acoustic propagation. *Sci. Eng.*, 2021, no. 9, pp. 1–19. doi: https://doi.org/ 10.3390/jmse9080892
4. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф.** Управление характеристиками системы массового обслуживания через сдвиг законов распределений. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 5, с. 55–63. doi:10.31799/1684-8853-2023-5-55-63, EDN: IVEQJM
5. **Тарасов В. Н.** Расширение класса систем массового обслуживания с запаздыванием. *Автоматика и телемеханика*, 2018, № 12, с. 57–70. doi:10.31857/S000523100002857-6, EDN: YPGRWX
6. **Тарасов В. Н.** Особенности аналитического моделирования систем массового обслуживания с гиперэрланговским и эрланговским распределениями. *Информационные технологии*, 2023, т. 29, № 6, с. 284–289. doi:10.17587/it.29.284-289
7. **Tarasov V. N.** Comparison of two queuing systems with ordinary and shifted Erlang distributions. *Proc. of the IEEE Intern. Scientific-Practical Conf. “Problems of Infocommunications Science and Technology” (PIC S and T)*, 2019, pp. 899–902. doi:10.1109/PICST47496.2019.9061271
8. **Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф.** Имитационное моделирование систем массового обслуживания на основе составных распределений — вероятностных смесей. *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*, 2023, т. 17, № 3, с. 14–19. doi:10.36724/2072-8735-2023-17-3-14-19
9. **Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E.** Limiting the oscillations in queues with delayed information through a novel type of delay announcement. *Queueing Systems*, 2020, vol. 95, pp. 281–330. doi:https://doi.org/10.1007/s11134-020-09657-9
10. **Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E.** Nonlinear dynamics in queueing theory: Determining the size of oscillations in queues with delay. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2019, vol. 18, no. 1, pp. 279–311. doi:https://doi.org/10.1137/18M1170637
11. **Brannstrom N.** *A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems. Appllied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
12. **Myskja A.** An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change (ITC-13)*, 1991, pp. 683–688.
13. **Алиев Т. И.** Аппроксимация вероятностных распределений в моделях массового обслуживания. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2013, № 2(84), с. 88–93.
14. **Aras A. K., Chen X., Liu Y.** Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 1, pp. 81–125. https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0
15. **Jennings O. B., Pender J.** Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1, pp. 145–202. https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y

16. **Gromoll H. C., Terwilliger B., Zwart B.** Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 213–241. https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z
17. **Legros B.** M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 269–301. https://doi.org/10.1007 /s11134-017-9557-7
18. **Bazhba M., Blanchet J., Rhee C. H.** Queue with heavy-tailed Weibull service times. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 11, pp. 1–32. https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z/
19. **Adan I., D'Auria B., Kella O.** Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 1–2. https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1
20. **Adan I., D'Auria B., Kella O.** Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference: part 2. *Queueing Systems*, 2020, pp. 1–2. https://doi.org/10.1007/s11134-019-09637-8
21. **Tibi D.** Martingales and buffer overflow for the symmetric shortest queue model. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 153–190. doi:10.1007/s11134-019-09628-9
22. **Jacobovic R., Kella O.** Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 139–152. doi:10.1007/s11134-019-09606-1
23. **Wang L., Kulkarni V.** Fluid and diffusion models for a system of taxis and customers with delayed matching. *Queueing Systems*, 2020, vol. 96, pp. 101–131. doi: 10.1007/s11134-020-09659-7

UDC 621.391.1:621.395
doi:10.31799/1684-8853-2024-3-24-31
EDN: QEGHLU

Controlling the characteristics of a queueing system through shifting distribution laws in the form of probabilistic mixtures

V. N. Tarasov[a], Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-9318-0797, v.tarasov@psuti.ru
N. F. Bakhareva[a], Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-9850-7752
[a]Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, 23, L'va Tolstogo St., 443010, Samara, Russian Federation

Introduction: The need to minimize waiting time in queues and the volume of data storage buffers in promising data transmission systems remains relevant and requires constant improvement. **Purpose:** To expand the class of queuing systems as systems with distribution laws subjected to a shift operation in the form of probabilistic mixtures to solve the problem posed. **Methods:** We use the method of spectral solution of the Lindley integral equation based on the Laplace transform theory. **Results:** We develop numerical-analytical and simulation models for two different systems with hyper-exponential and hyper-Erlang input distributions. We can identify that shifting the distribution laws to the right reduces the coefficients of variation, and they make the main contribution to the formation of the average waiting time for requests in the queue. Then, in systems with shifted distributions, there will be a manyfold decrease in waiting time depending on the value of the shift parameter. Considering the functional dependence of the main criteria of system efficiency on the average waiting time according to Little's formulas, we are convinced of the possibility of their regulation using the time shift parameter. This will make it possible to control the main characteristics of real data systems, which is important for the theory and practice of designing such systems. **Practical relevance:** The results obtained are of great interest for the theory and practice of data transmission and make it possible to regulate the basic parameters of data transmission systems. **Discussion:** For the development of the conducted research, it is important to implement the results of the proposed approach into the theory and practice of data transmission. To do this, it is necessary to obtain the results of operation of the experimental hardware and software complex which can confirm the data of numerical analytical and simulation models.

Keywords — systems with shifted distributions, Laplace transform, Lindley integral equation, spectral solution, discrete-event modeling, GPSS World.

For citation: Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Controlling the characteristics of a queueing system through shifting distribution laws in the form of probabilistic mixtures. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 3, pp. 24–31 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-3-24-31, EDN: QEGHLU

Reference

1. Kleinrock L. *Queueing Systems*. Vol. I. Wiley, 1974. 448 p.
2. Do T. V., Chakka R., Sztrik J. Spectral expansion solution methodology for QBD-M processes and applications in future internet engineering. *ICCSAMA*, 2016, pp. 131–142. doi:10.1007/978-3-319-00293-4-11
3. Ma X. A., Wang Y., Zhu X., Liu W., Lan Q., Xiao W. Spectral method for two-dimensional ocean acoustic propagation. *Sci. Eng.*, 2021, no. 9, pp. 1–19. doi:https://doi.org/ 10.3390/jmse9080892
4. Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Controlling queuing system characteristics through shifting distribution laws. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 5, pp. 55–63 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-5-55-63, EDN: IVEQJM
5. Tarasov V. N. Extension of the class of queueing systems with delay. *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 12, pp. 2147–2158. doi:10.1134/S0005117918120056
6. Tarasov V. N. Features of analytical modeling of QS with hyper-Erlang and Erlang distributions. *Information Technology*, 2023, vol. 29, no. 6, pp. 284–289 (In Russian). doi:10.17587/it.29.284-289
7. Tarasov V. Comparison of two queuing systems with ordinary and shifted Erlang distributions. *Proc. of the IEEE Intern. Scientific-Practical Conf. "Problems of I nfocommunications Science and Technology" (PIC S and T)*, 2019, pp. 899–902. doi:10.1109/PICST47496.2019.9061271
8. Tarasov V. N., Bakhareva N. F. Simulation modeling of queuing systems based on composite distributions — proba-

bilistic mixtures. *T-Comm*, 2023, vol. 17, no. 3, pp. 14–19 (In Russian). doi:10.36724/2072-8735-2023-17-3-14-19
9. Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Limiting the oscillations in queues with delayed information through a novel type of delay announcement. *Queueing Systems*, 2020, vol. 95, pp. 281–330. doi:https://doi.org/10.1007/s11134-020-09657-9
10. Novitzky S., Pender J., Rand R. H., Wesson E. Nonlinear dynamics in queueing theory: Determining the size of oscillations in queues with delay. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2019, vol. 18, no. 1, pp. 279–311. doi:https://doi.org/10.1137/18M1170637
11. Brannstrom N. *A Queueing Theory Analysis of Wireless Radio Systems. Appllied to HS-DSCH*. Lulea University of Technology, 2004. 79 p.
12. Myskja A. An improved heuristic approximation for the GI/GI/1 queue with bursty arrivals. *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change (ITC-13)*, 1991, pp. 683–688.
13. Aliev T. I. Approximation of probability distributions in queuing models. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2013, vol. 84, no. 2, pp. 88–93 (In Russian).
14. Aras A. K., Chen X., Liu Y. Many-server Gaussian limits for overloaded non-Markovian queues with customer abandonment. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 1, pp. 81–125. https://doi.org/10.1007/s11134-018-9575-0
15. Jennings O. B., Pender J. Comparisons of ticket and standard queues. *Queueing Systems*, 2016, vol. 84, no. 1, pp. 145–202. https://doi.org/10.1007/s11134-016-9493-y
16. Gromoll H. C., Terwilliger B., Zwart B. Heavy traffic limit for a tandem queue with identical service times. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 213–241. https://doi.org/10.1007/s11134-017-9560-z
17. Legros B. M/G/1 queue with event-dependent arrival rates. *Queueing Systems*, 2018, vol. 89, no. 3, pp. 269–301. https://doi.org/10.1007 /s11134-017-9557-7
18. Bazhba M., Blanchet J., Rhee C. H. Queue with heavy-tailed Weibull service times. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, no. 11, pp. 1–32. https://doi.org/10.1007/s11134-019-09640-z/
19. Adan I., D'Auria B., Kella O. Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 1–2. https://doi.org/10.1007/s11134-019-09630-1
20. Adan I., D'Auria B., Kella O. Special volume on 'Recent Developments in Queueing Theory' of the third ECQT conference: part 2. *Queueing Systems*, 2020, pp. 1–2. https://doi.org/10.1007/s11134-019-09637-8
21. Tibi D. Martingales and buffer overflow for the symmetric shortest queue model. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 153–190. doi:10.1007/s11134-019-09628-9
22. Jacobovic R., Kella O. Asymptotic independence of regenerative processes with a special dependence structure. *Queueing Systems*, 2019, vol. 93, pp. 139–152. doi:10.1007/s11134-019-09606-1
23. Wang L., Kulkarni V. Fluid and diffusion models for a system of taxis and customers with delayed matching. *Queueing Systems*, 2020, vol. 96, pp. 101–131. doi:10.1007/s11134-020-09659-7