



Модели смешанного целочисленного линейного программирования оптимизации включения заданий в пакеты и порядков проведения операций с ними в конвейерных системах

К. В. Кротов^а, доктор техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-9670-6141, krotov_k1@mail.ru

^аСевастопольский государственный университет, Университетская ул., 33, Севастополь, 299053, РФ

Введение: идентификация эффективных расписаний выполнения в конвейерных системах наборов однотипных заданий предусматривает поиск лучших решений по включению заданий из этих наборов в пакеты и по порядкам пакетов для осуществления операций с ними на приборах указанных систем. При незначительном размере задач решить их возможно путем построения математических моделей смешанного целочисленного линейного программирования. **Цель:** разработать математические модели смешанного целочисленного линейного программирования, позволяющие определять лучшие решения по включению однотипных заданий из наборов в пакеты и по порядкам пакетов для проведения операций с ними в конвейерных системах. **Результаты:** в концепцию разработки математических моделей указанного вида положен подход, связанный с типизацией заданий. В соответствии с ним к одному типу относятся задания с равными значениями длительностей их выполнения на приборах конвейерных систем и с равными значениями длительностей переналадок приборов на осуществление операций с ними. На основе этого подхода разработаны математические модели смешанного целочисленного нелинейного программирования, позволяющие включить задания из наборов в пакеты и осуществить оптимизацию их порядков для реализации операций с ними в конвейерных системах. Условиями оптимизации являются: минимизация общего времени выполнения пакетов заданий на приборах конвейерных систем; минимизация суммарного запаздывания с окончанием выполнения наборов заданий по сравнению с заданными для них директивными сроками. Полученные модели линеаризованы путем введения дополнительных переменных и соответствующих им ограничений. Предложен способ линеаризации операции определения максимума из двух значений, предусматривающий введение индикаторных переменных и позволивший повысить производительность вычислений. В целях верификации представленных моделей разработано приложение в среде IBM ILOG CPLEX. С его применением проведены исследования по оптимизации составов пакетов заданий и расписаний их выполнения для различных наборов значений параметров задач поиска эффективных решений. **Практическая значимость:** полученные результаты показали эффективность разработанных моделей при решении задач оптимизации в рассматриваемой постановке. Предложенные математические модели позволяют повысить степень использования ресурсов конвейерных систем разного вида при реализации в них производственных или вычислительных процессов.

Ключевые слова – конвейерные системы, пакеты заданий, расписания, модели смешанного целочисленного линейного программирования.

Для цитирования: Кротов К. В. Модели смешанного целочисленного линейного программирования оптимизации включения заданий в пакеты и порядков проведения операций с ними в конвейерных системах. *Информационно-управляющие системы*, 2024, № 6, с. 46–57. doi:10.31799/1684-8853-2024-6-46-57, EDN: EFCACX

For citation: Krotov K. V. Models of mixed integer linear programming for optimizing the inclusion of tasks in packages and the order of operations with them in pipeline systems. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 6, pp. 46–57 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-6-46-57, EDN: EFCACX

Введение

В многостадийных системах потокового типа (конвейерных системах, КС; системах FlowShop) требуется осуществить операции с заданиями, включенными в наборы, в порядке, соответствующем порядку приборов в системах. Типизация заданий предусматривает использование следующих временных характеристик: времени проведения операций с заданиями на приборах, времени переналадок приборов на реализацию операций с заданиями. Условием эффективной реализации процессов выполнения заданий из их наборов является формирование пакетов и определение расписаний их выполнения в КС.

При значительной размерности указанной задачи ее решение не может быть получено за ограниченное время, определяемое полиномом, включающим ее (этой задачи) параметры (задача является NP-трудной). Для задач рассматриваемого вида, имеющих большую размерность, автором предложен метод иерархической оптимизации [1], позволяющий осуществлять поиск эффективных решений по включению однотипных заданий в пакеты и по порядкам проведения операций с ними на приборах КС. Также для определения эффективных решений по включению заданий в пакеты использован метод ветвей и границ [2]. Он же применен для определения эффективных порядков пакетов заданных со-

ставов для проведения операций с ними в КС [3]. При малых размерах задач возможно использовать аппарат смешанного целочисленного линейного программирования (mixed-integer linear programming, MILP) и искать решения в соответствующих пакетах – решателях задач дискретной оптимизации. Это позволяет значительно сократить время на разработку программ поиска эффективных решений и уменьшить время получения результатов оптимизации.

При построении моделей MILP необходимо различать: 1) задачу определения лучших решений по включению однотипных заданий в пакеты (оптимизации количества заданий в пакетах); 2) задачу оптимизации распределения единичных заданий по пакетам. В настоящее время более развит подход, связанный с разработкой моделей для задач второго вида.

Современное состояние по решению рассматриваемых задач отражено в работах [4–20]. Модель MILP [4] используется для оптимизации распределения заданий по пакетам в целях последовательной их обработки на одном устройстве. Модели, рассматриваемые в [5, 6], позволяют осуществить распределение заданий по пакетам для параллельной их обработки на одном устройстве. Новизной модели [7] является введение заказов клиентов на обработку комплектов заданий. Идентификация эффективных решений по распределению заданий в пакеты реализуется с учетом сроков формирования заказов из комплектов, полученных в результате их обработки.

Исследования по построению моделей MILP, позволяющих определить лучший способ проведения операций с заданиями из пакетов, выполняемых на единственной машине, развиваются путем разработки полиномиальных алгоритмов поиска решений. Работа [8] посвящена разработке полиномиального алгоритма оптимизации составов пакетов заданий (ПЗ) и порядка их выполнения на одном приборе с учетом эффекта обучения. Эффект обучения предполагает увеличение времени выполнения заданий и времени переналадки прибора по мере реализации процесса их обработки. В пакеты задания объединяют, чтобы уменьшить общее время наладок прибора. Рассматриваемый в статье [9] полиномиальный алгоритм предусматривает оптимизацию решений путем: 1) формирования последовательности заданий с учетом директивных сроков; 2) разделения последовательности заданий по пакетам при анализе времени наладок прибора. Авторы [10] предлагают полиномиальный алгоритм включения заданий двух агентов в пакеты, для которых задается необходимое к выполнению их (заданий) количество. Составы пакетов формируются при условии совмести-

сти и несовместимости заданий. Сформирован векторный критерий с компонентами: 1) длительностью процесса выполнения заданий первого агента; 2) суммарным запаздыванием с окончанием выполнения заданий второго агента относительно директивных сроков.

В [11] рассматривается математическая модель MILP для совместного решения задач оптимизации распределения заданий, поступивших от разных заказчиков, по пакетам для их обработки и доставки в директивные сроки. Рассматривается двухприборная система.

В работе [12] модель MILP позволяет сформировать эффективные решения по объединению отдельных заданий в пакеты, которые выполняются на параллельных приборах в машинах для пакетной обработки (Batch Processing Machine, BPM). Время обработки заданий различно, наборы заданий не рассматриваются, переналадка приборов на выполнение заданий в пакетах не учитывается. Наряду с решением задачи параллельного пакетирования предложенная в [12] модель позволяет оптимизировать назначение заданий из пакетов на параллельные приборы BPM. При построении модели в [13] задания типизированы, в пакет включаются задания одного типа. Время наладки BPM постоянно и не зависит от последовательности, составы пакетов также постоянны. Порядок выполнения пакетов на BPM также не меняется. В модели использован подход с обратным планированием, который предусматривает формирование последовательности выполнения пакетов, начиная с последнего, окончание которого совпадает со сроком завершения действий со всеми заданиями. В результате сформирована нелинейная математическая модель распределения заданий по пакетам, которая не линеаризована. В силу значительного времени, затрачиваемого на получение результатов, задача имеет ограниченный размер.

Модель процесса осуществления операций с пакетами в потоковой системе, в которую включены BPM, при учете моментов времени поступления заданий получена в статье [14]. Авторы анализируют особенности процессов с одинаковыми значениями времени их выполнения на приборах, формулируют и доказывают предположения, на основе которых формулируют полиномиальный алгоритм оптимизации составов ПЗ.

Работа [15] является продолжением работы [13]. В ней также формируется нелинейная модель процесса выполнения ПЗ в системах с BPM. Линеаризация модели не выполняется.

Для идентификации лучших решений по распределению заданий по пакетам в системах смешанного типа разработаны модели MILP, рассмотренные в [16, 17]. Модели обеспечивают

идентификацию порядков проведения операций на машинах последовательной обработки, распределение заданий по пакетам для действий с ними на параллельных приборах в ВРМ.

Предложенная в [18] модель MILP позволяет оптимизировать составы пакетов, назначать ПЗ на определенные приборы не связанных машин, оптимизировать порядок выполнения пакетов на приборах.

Работа [19] также посвящена построению математической модели MILP оптимизации составов ПЗ, выполняемых в системах Flexible FlowShop, их назначению на приборы не связанных машин. Особенности модели MILP являются то, что:

- 1) задается количество частей, на которые должен быть разделен каждый набор заданий;
- 2) в каждой части набора количество заданий оптимизируется, и она назначается в пакет на определенный прибор в соответствующей позиции выполнения;
- 3) ПЗ могут быть назначены на разные приборы.

Модель MILP, предложенная в [20], оптимизирует отдельно пакеты на первой и второй стадиях с машинами последовательной обработки заданий (Job Processing Machine, JPM), а также размеры пакетов на третьей стадии с ВРМ. Размеры ПЗ на JPM одинаковы, а в пакеты на ВРМ входят задания разных типов.

Из проведенного анализа моделей и методов идентификации решений по объединению заданий в пакеты и по порядкам осуществления операций с ними в одномашинных и многомашинных системах может быть сделан вывод, что эти модели и алгоритмы реализуют распределение единичных заданий по пакетам. В этих моделях типизация заданий с точки зрения равных значений их временных характеристик не осуществляется. Это обуславливает значительное количество ограничений в моделях, значительное время поиска эффективных решений, малый размер решаемых задач. Требуется реализация альтернативного подхода к разработке моделей MILP, предусматривающего типизацию заданий в соответствии с указанными временными параметрами заданий. При его реализации возможно значительно сократить количество ограничений в моделях MILP, упростить их вид, уменьшить время получения результатов.

Для классификации решаемой задачи построения расписаний выполнения ПЗ в КС в соответствии с [21, 22] она может быть представлена в виде $\alpha|\beta|\gamma$, где α — тип обрабатывающей системы; β — тип решаемой задачи (характеризует ее особенности); γ — вид критерия оптимизации для определения эффективных решений.

Рассматриваемая обрабатывающая система является конвейерной и с точки зрения общепринятой классификации — системой FlowShop. Тогда в качестве α указывается F . Изучаемая в работе задача предусматривает определение эффективных решений по составам пакетов заданий (в общепринятой классификации — партий), а также расписаний их выполнения в КС. В этом случае в соответствии с [22] в качестве характеристики решаемой задачи указывается $batch$. Критерием, в соответствии с которым определяются эффективные решения по составам ПЗ и их последовательностям для проведения операций с ними на приборах КС, является момент времени окончания указанного процесса, обозначенный как C_{max} . Тогда рассматриваемая задача с точки зрения [21, 22] может быть охарактеризована следующим образом: $F|batch|C_{max}$.

Для построения моделей использованы следующие обозначения для индексов [1]: i — тип заданий; l — номер прибора; j — позиция пакета в последовательностях проведения операций с ними на приборах. Параметры, характеризующие систему и выполняемые задания [1]: I — количество типов заданий; L — количество приборов; J — количество позиций (соответствует количеству пакетов в последовательностях); t_{li} — длительности проведения на l -х приборах операций с заданиями i -х типов; t_{lk}^l — длительности проведения переналадок l -х приборов на осуществление операций с заданиями k -х типов; n^i — количество заданий i -го типа ($i = 1, I$). Последовательности проведения операций на приборах с пакетами обозначены как π^l ($l = 1, L$) (R — большое число). Также при построении моделей применены следующие характеристики процессов и соответствующие им обозначения:

- 1) для пакетов, находящихся в последовательностях π^l в j -х позициях ($j = 1, J$), введены обозначения моментов времени начала проведения операций с ними q_{lj} ;
- 2) для задаваемых сроков окончания проведения операций с заданиями i -х типов в системе введены обозначения d_i ;
- 3) для окончания выполнения заданий i -х типов введены обозначения моментов времени g_i ;
- 4) для заданий i -х типов введены запаздывания с окончанием их выполнения относительно директивных сроков, обозначенные p_i .

В качестве решений выступают:

- 1) количество заданий, включаемых в пакеты в j -х позициях в последовательностях π^l ($l = 1, L$) (обозначено как m_{lj} ($j = 1, J$));
- 2) типы заданий, включаемых в пакеты, занимающие j -е позиции в последовательностях π^l ($l = 1, L$) (обозначены как x_{ij} ; $x_{ij} = 1$, если задания в пакете в j -й позиции принадлежат i -му типу; $x_{ij} = 0$ в противном случае).

Математические модели MILP идентификации лучших решений по включению заданий в пакеты и по порядкам пакетов для проведения операций с ними в КС

Разработка моделей MILP указанного вида осуществляется с точки зрения двух целей функционирования системы: 1) внутренней цели, предполагающей эффективное использование ресурсов; 2) внешней цели, предполагающей удовлетворение потребностей заказчиков, использующих результаты выполнения заданий. Достижение внутренней цели функционирования системы предусматривает минимизацию времени окончания процесса выполнения ПЗ в КС. Достижение внешней цели предусматривает минимизацию суммарного запаздывания окончания выполнения заданий в КС относительно директивных сроков. В соответствии с этим в качестве критериев оптимизации решений в моделях выступают: 1) время окончания процесса выполнения заданий в КС в составе пакетов; 2) общее запаздывание с окончанием обработки заданий относительно заданных для них сроков. Поэтому для первой модели в качестве критерия использовано время окончания процесса проведения операций с заданиями в КС C_{\max} .

Математическая модель, позволяющая идентифицировать эффективные решения по включению однотипных заданий в пакеты и по порядкам пакетов для проведения операций с ними на приборах КС, представляет собой совокупность выражений, интерпретируемых как критерий оптимизации и ограничения на множество решений.

Если пакет занимает $(j = 1)$ -ю позицию в последовательности π^l их выполнения на $(l = 1)$ -м приборе, то значение q_{11} определяется выражением

$$q_{11} \geq t_{i1}^1 x_{i1}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (1)$$

где t_{i1}^1 – время первоначальной наладки $(l = 1)$ -го прибора на осуществление операций с заданиями i -го типа, которые включены в пакет, занимающий $(j = 1)$ -ю позицию в последовательностях π^l $(l = \overline{1, L})$ их выполнения на приборах КС.

Если пакет занимает j -ю позицию в последовательности π^l их выполнения на $(l = 1)$ -м приборе, то значение q_{1j} вычисляется с использованием выражения

$$q_{1j} \geq q_{1j-1} + t_{1i} m_{j-1} x_{k,j-1} + t_{ik}^1 x_{k,j-1} x_{ij} \quad \text{при } j = \overline{2, J}, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, I}, \quad i \neq k. \quad (2)$$

Если пакет занимает $(j = 1)$ -ю позицию в последовательности π^l их выполнения на l -м приборе $(l = \overline{2, L})$, то значение q_{l1} определяется выражением

$$q_{l1} \geq \max(t_{ii}^l x_{i1}, q_{l-1,1} + t_{l-1,i} m_1 x_{i1}) \quad \text{при } i = \overline{1, I}, \quad l = \overline{2, L}. \quad (3)$$

Если пакет занимает j -ю позицию в последовательности π^l их выполнения на l -м приборе $(l = \overline{2, L})$, то значение q_{lj} вычисляется следующим образом:

$$q_{lj} \geq \max(q_{l-1,j} + t_{l-1,i} m_j x_{ij}; q_{l,j-1} + t_{lk} m_{j-1} x_{k,j-1} + t_{ki}^l x_{k,j-1} x_{ij}), \quad j = \overline{2, J}, \quad i = \overline{1, I}, \quad k = \overline{1, I}, \quad i \neq k, \quad l = \overline{2, L}. \quad (4)$$

Идентификация лучших решений по включению заданий одного типа в пакеты и по порядкам проведения операций с ними на приборах КС осуществляется при условии снижения времени окончания действий с пакетами на последнем L -м приборе. Для определения окончания выполнения разных пакетов в КС (на ее последнем L -м приборе) используется выражение $q_{Lj} + t_{Li} m_j x_{ij}$ $(i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J})$. Чтобы идентифицировать время окончания проведения операций со всеми пакетами в системе, использовано выражение

$$C_{\max} = \max_{i=1, I, j=1, J} (q_{L,j} + t_{L,i} m_j x_{ij}). \quad (5)$$

Определение составов пакетов осуществляется в соответствии со следующими предположениями:

1) количество заданий в пакете не может быть менее двух;

2) последовательности π^l $(l = \overline{1, L})$ пакетов для осуществления операций с ними на приборах КС являются одинаковыми.

В дополнение к введенным выражениям (1)–(5) сформированы выражения, ограничивающие множество допустимых решений задачи:

1) условия, определяющие возможность размещения в каждой j -й позиции $(j = \overline{1, J})$ ПЗ только одного i -го типа $(i = \overline{1, I})$:

$$\sum_{i=1}^I x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, J}; \quad (6)$$

2) условия, определяющие необходимость отличия типов заданий, включенных в пакеты в $(j - 1)$ -й и j -й позициях в последовательностях π^l $(l = \overline{1, L})$:

$$x_{i,j-1} + x_{i,j} \leq 1, \quad j = \overline{2, J}, \quad i = \overline{1, I}; \quad (7)$$

3) условия, определяющие необходимость распределения всех заданий по пакетам:

$$\sum_{j=1}^J m_j x_{ij} = n^i, \quad i = \overline{1, I}; \quad (8)$$

4) условия, определяющие значения q_{lj} :

$$q_{lj} \geq 0, \quad j = \overline{1, J}, l = \overline{1, L}; \quad (9)$$

5) условия, определяющие, что при включении однотипных заданий в пакет их количество не может быть менее двух:

$$m_j \geq 2, \quad j = \overline{1, J}; \quad (10)$$

6) условия, определяющие значения переменных x_{ij} и m_j :

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, m_j - \text{целые}, \quad i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}. \quad (11)$$

Идентификация лучших решений по включению однотипных заданий в пакеты и по порядкам проведения операций с ними на приборах КС осуществляется с учетом требования минимизации времени окончания процессов выполнения заданий. Тогда математическая модель оптимизации решений имеет следующий итоговый вид:

1) критерий оптимизации $\min C_{\max}$, где

$$C_{\max} = \max_{i=1, I, j=1, J} (q_{L,j} + t_{L,i} m_j x_{ij}); \quad (12)$$

2) выражения, ограничивающие множество решений:

$$\sum_{i=1}^I x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, J}; \quad (13)$$

$$x_{i,j-1} + x_{i,j} \leq 1, \quad i = \overline{1, I}, j = \overline{2, J}; \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^J m_j x_{ij} = n^i, \quad i = \overline{1, I}; \quad (15)$$

$$q_{11} \geq t_{11}^1 x_{11}, \quad i = \overline{1, I}; \quad (16)$$

$$q_{1j} \geq q_{1,j-1} + t_{1i} m_{j-1} x_{i,j-1} + t_{ik}^1 x_{k,j-1} x_{ij}, \quad j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k; \quad (17)$$

$$q_{l1} \geq \max(t_{ii}^l x_{i1}, q_{l-1,1} + t_{l-1,i} m_1 x_{i1}), \quad i = \overline{1, I}; \quad (18)$$

$$q_{lj} \geq \max(q_{l-1,j} + t_{l-1,i} m_j x_{ij};$$

$$q_{l,j-1} + t_{lk} m_{j-1} x_{k,j-1} + t_{ki}^l x_{k,j-1} x_{ij}),$$

$$j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (19)$$

$$q_{lj} \geq 0, \quad j = \overline{1, J}, l = \overline{1, L}; \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, J},$$

$$l = \overline{1, L}; \quad m_j > 2, \quad m_j - \text{целое}, \quad j = \overline{1, J}. \quad (20)$$

Модель (12)–(20) является нелинейной. С целью уменьшить длительности интервалов времени получения решений выполнена ее линейризация. В первую очередь нелинейным является критерий (12). Общий вид задачи определения эффективных решений по включению однотипных заданий в пакеты и по порядкам пакетов для проведения операций с ними на приборах КС следующий:

$$\min \max_{i=1, I, j=1, J} (q_{L,j} + t_{L,i} m_j x_{ij}).$$

Переменная C_{\max} используется для линейризации выражения (12). Это выражение интерпретируется как целевая функция. Для интерпретации введенного выражения с точки зрения использования в нем переменной C_{\max} введена система ограничений вида [23]

$$C_{\max} \geq q_{L,j} + t_{L,i} m_j x_{ij}, \quad i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}.$$

В полученной модели выражения (15), (17)–(19) являются нелинейными. Устранение нелинейности этих выражений обеспечивается введением дополнительных переменных и ограничений, определяющих корректность замены ими произведений. Введение дополнительных переменных реализуется при условии, что для m_j выполняется условие вида $2 \leq m_j \leq u_j$, где u_j – максимальное число заданий в пакете. В соответствии с условием, определяющим, что количество заданий каждого i -го типа ($i = \overline{1, I}$) в их наборах является одинаковым ($n^1 = n^2 = \dots = n^I = n$), значения u_j вычисляются с использованием выражения вида $u_j = n - 2$ (при учете требования к минимальному количеству заданий в пакетах, равному двум).

В целях линейризации (18) введены переменные r_{1i} ($i = \overline{1, I}$): $r_{1i} = m_1 x_{i1}$, корректность их применения обеспечивается заданием ограничений вида [23]

$$r_{1i} \leq m_1; \quad r_{1i} \leq u_1 x_{i1}; \quad r_{1i} \geq m_1 + u_1 (x_{i1} - 1);$$

$$r_{1i} \geq 0; \quad u_1 = (n - 2), \quad i = \overline{1, I}.$$

Для линейризации (15), (17), (19) введены переменные r_{ji} ($j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}$): $r_{ji} = m_j x_{ij}$, корректность их применения обеспечивается ограничениями [23]

$$r_{ji} \leq m_j; \quad r_{ji} \leq u_j x_{ij}; \quad r_{ji} \geq m_j + u_j (x_{ij} - 1); \quad r_{ji} \geq 0;$$

$$u_j = (n - 2), \quad j = \overline{2, J}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Также в целях линейризации (17), (19) в рассмотрение введены переменные $y_{k,j-1,i,j}$: $y_{k,j-1,i,j} = x_{k,j-1} x_{ij}$ ($j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k$). Для корректной замены произведений $x_{k,j-1} x_{ij}$ на переменные $y_{k,j-1,i,j}$ введены ограничения вида [23]

$$\begin{aligned}
 & y_{k,j-1,i,j} \leq x_{k,j-1}; \quad y_{k,j-1,i,j} \leq x_{ij}; \\
 & y_{k,j-1,i,j} \geq x_{k,j-1} + x_{ij} - 1, y_{k,j-1,i,j} \in \{0, 1\}, \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k.
 \end{aligned}$$

В то же время нелинейность выражений (18), (19) является следствием использования в них операции \max . Применение для их линеаризации способа, предложенного в [23, 24], не позволило значительно увеличить производительность вычислений при поиске оптимального решения по сравнению с моделью (12)–(20). Для линеаризации выражения (18) в рассмотрение введены бинарные переменные v_{l1} ($l = \overline{2, L}$): $v_{l1} = 1$, если переналадка l -го прибора на осуществление операций с заданиями i -го типа в пакете в ($j = 1$)-й позиции в π^l на этом приборе завершилась раньше, чем операции с ним на ($l - 1$)-м приборе; $v_{l1} = 0$ в противном случае. Тогда линеаризация ограничений (18) проводится путем введения выражений

$$\begin{aligned}
 & -\left[(q_{l-1,1} + t_{l-1,i}m_1x_{i1}) - t_{ii}^l x_{i1}\right] + Rv_{l1} \geq 0, \\
 & l = \overline{2, L}, i = \overline{1, I}; \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[(q_{l-1,1} + t_{l-1,i}m_1x_{i1}) - t_{ii}^l x_{i1}\right] + \\
 & + R(1 - v_{l1}) > 0, l = \overline{2, L}, i = \overline{1, I}; \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & q_{l1} \geq t_{ii}^l x_{i1} - Rv_{l1}; \\
 & q_{l1} \geq \left[(q_{l-1,1} + t_{l-1,i}m_1x_{i1}) - t_{ii}^l x_{i1}\right] - R(1 - v_{l1}), \\
 & l = \overline{2, L}, i = \overline{1, I}; \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$v_{l1} \in \{0, 1\}, l = \overline{2, L}. \quad (24)$$

Для линеаризации ограничений (19) в рассмотрение введены переменные w_{lj} ($l = \overline{2, L}, j = \overline{2, J}$), для которых $w_{lj} = 1$ в случае, если выполнение ПЗ в j -й позиции на ($l - 1$)-м приборе в π^{l-1} завершилось ранее, чем выполнение ПЗ в ($j - 1$)-й позиции в π^l на l -м приборе; $w_{lj} = 0$ в противном случае. Линеаризация ограничений (19) реализуется путем введения в рассмотрение следующих выражений:

$$\begin{aligned}
 & -\left[(q_{l,j-1} + t_{lk}m_{j-1}x_{k,j-1} + t_{ki}^l x_{k,j-1}x_{ij}) - \right. \\
 & \left. - (q_{l-1,j} + t_{l-1,i}m_j x_{ij})\right] + R w_{lj} \geq 0, \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[(q_{l,j-1} + t_{lk}m_{j-1}x_{k,j-1} + t_{ki}^l x_{k,j-1}x_{ij}) - \right. \\
 & \left. - (q_{l-1,j} + t_{l-1,i}m_j x_{ij})\right] + R(1 - w_{lj}) > 0, \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & q_{l,j} \geq (q_{l-1,j} + t_{l-1,i}m_j x_{ij}) - R w_{lj}, \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, l = \overline{2, L}; \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & q_{lj} \geq (q_{l,j-1} + t_{lk}m_{j-1}x_{k,j-1} + t_{ki}^l x_{k,j-1}x_{ij}) - \\
 & - R(1 - w_{lj}), \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (28) \\
 & w_{lj} \in \{0, 1\}, l = \overline{2, L}, j = \overline{2, J}. \quad (29)
 \end{aligned}$$

С учетом переменных v_{l1} ($l = \overline{2, L}$), w_{lj} ($l = \overline{2, L}, j = \overline{2, J}$), ограничений (21)–(29), переменных r_{ji} ($j = \overline{1, J}, i = \overline{1, I}$), $y_{k,j-1,i,j}$ ($j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k$), соответствующих им ограничений получен итоговый вид модели MILP:

1) критерий оптимизации

$$\min C_{\max}; \quad (30)$$

2) выражения, ограничивающие множество решений:

$$\sum_{i=1}^I x_{ij} = 1, j = \overline{1, J}; \quad \sum_{j=1}^J r_{ji} = n^i, i = \overline{1, I}; \quad (31)$$

$$x_{i,j-1} + x_{i,j} \leq 1, i = \overline{1, I}, j = \overline{2, J}; \quad (32)$$

$$q_{l1} \geq t_{ii}^1 x_{i1}, i = \overline{1, I}; \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
 & q_{1j} \geq q_{1,j-1} + t_{1k}r_{j-1,k} + t_{ki}^1 y_{k,j-1,i,j}, \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k; \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left[(q_{l-1,1} + t_{l-1,i}r_{1i}) - t_{ii}^l x_{i1}\right] + Rv_{l1} \geq 0; \\
 & \left[(q_{l-1,1} + t_{l-1,i}r_{1i}) - t_{ii}^l x_{i1}\right] + R(1 - v_{l1}) > 0, \\
 & l = \overline{2, L}, i = \overline{1, I}; \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & q_{l1} \geq t_{ii}^l x_{i1} - Rv_{l1}; \\
 & q_{l1} \geq (q_{l-1,1} + t_{l-1,i}r_{1i}) - R(1 - v_{l1}); \\
 & l = \overline{2, L}, i = \overline{1, I}; \quad (36)
 \end{aligned}$$

$$v_{l1} \in \{0, 1\}, l = \overline{2, L}; \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
 & r_{1i} \leq m_1; \quad r_{1i} \leq u_1 x_{i1}; \quad r_{1i} \geq m_1 + u_1 (x_{i1} - 1); \\
 & r_{1i} \geq 0; \quad u_1 = (n - 2), i = \overline{1, I}; \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left[(q_{l,j-1} + t_{lk}r_{j-1,k} + t_{ki}^l y_{k,j-1,i,j}) - \right. \\
 & \left. - (q_{l-1,j} + t_{l-1,i}r_{ji})\right] + R w_{lj} \geq 0, \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left[(q_{l,j-1} + t_{lk}r_{j-1,k} + t_{ki}^l y_{k,j-1,i,j}) - \right. \\
 & \left. - (q_{l-1,j} + t_{l-1,i}r_{ji})\right] + R(1 - w_{lj}) > 0, \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & q_{l-1,j} \geq (q_{l-1,j} + t_{l-1,i}r_{ji}) - R w_{lj}, \\
 & j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, l = \overline{2, L}; \quad (41)
 \end{aligned}$$

$$q_{lj} \geq (q_{l,j-1} + t_{lk}r_{j-1,k} + t_{ki}^l y_{k,j-1,i,j}) - R(1 - w_{lj}),$$

$$j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (42)$$

$$w_{lj} \in \{0, 1\}, l = \overline{2, L}, j = \overline{2, J}; \quad (43)$$

$$r_{ji} \leq m_j; r_{ji} \leq u_j x_{ij}; r_{ji} \geq m_j + u_j(x_{ij} - 1);$$

$$r_{ji} \geq 0; u_j = (n - 2), j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}; \quad (44)$$

$$y_{k,j-1,i,j} \leq x_{k,j-1}; y_{k,j-1,i,j} \leq x_{ij};$$

$$y_{k,j-1,i,j} \geq x_{k,j-1} + x_{ij} - 1, y_{k,j-1,i,j} \in \{0, 1\},$$

$$j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k; \quad (45)$$

$$C_{\max} \geq q_{Lj} + t_{Li} r_{ji}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}; \quad (46)$$

$$q_{lj} \geq 0, j = \overline{1, J}, l = \overline{1, L}; \quad (47)$$

$$m_j \geq 2, m_j - \text{целое}, j = \overline{1, J}; \quad (48)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}. \quad (49)$$

Математическая модель смешанного целочисленного программирования второго вида сформирована в предположении, что для наборов заданий заданы сроки окончания их выполнения. Тогда типизация заданий осуществляется с учетом дополнительного параметра, характеризующего сроки окончания проведения операций с ними в КС. В качестве критерия оптимизации решений во второй модели использовано суммарное запаздывание G . Для определения запаздываний окончания выполнения заданий i -х типов относительно директивных сроков введены переменные z_i ($i = \overline{1, I}$): $z_i = 1$, если моменты времени g_i окончания выполнения заданий i -го типа превышают заданные сроки d_i ($g_i - d_i > 0$); $z_i = 0$ в противном случае.

Моменты g_i времени окончания проведения в системе операций со всеми заданиями i -х типов, включенными в различные пакеты, определяются с использованием выражений вида $g_i \geq (q_{Lj} + t_{Li} m_j x_{ij})$ ($i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}$), которые с учетом переменных r_{ji} преобразованы следующим образом: $g_i \geq (q_{Lj} + t_{Li} r_{ji})$ ($i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}$). Для определения запаздываний p_i с окончанием выполнения наборов заданий i -х типов относительно сроков d_i введены индикаторные переменные z_i ($i = \overline{1, I}$), с учетом которых значения p_i определяются выражениями

$$-(g_i - d_i) + Rz_i \geq 0, (g_i - d_i) + R(1 - z_i) \geq 0,$$

$$p_i \geq (g_i - d_i) - R(1 - z_i), p_i \geq -Rz_i, z_i \in \{0, 1\},$$

где $i = \overline{1, I}$.

Выражение для вычисления значений критерия G получено в виде $G = \sum_{i=1}^I p_i$. Модель (30)–(49)

модифицирована и получена в виде:

1) критерий оптимизации

$$\min G; \quad (50)$$

2) выражения, ограничивающие множество решений задачи:

$$\sum_{i=1}^I x_{ij} = 1, j = \overline{1, J}; \sum_{j=1}^J r_{ji} = n^i, i = \overline{1, I}; \quad (51)$$

$$x_{i,j-1} + x_{i,j} \leq 1, i = \overline{1, I}, j = \overline{2, J}; \quad (52)$$

$$q_{11} \geq t_{i1}^1 x_{i1}, i = \overline{1, I}; \quad (53)$$

$$q_{1j} \geq q_{1,j-1} + t_{1k} r_{j-1,k} + t_{ki}^1 y_{k,j-1,i,j},$$

$$j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k; \quad (54)$$

$$-\left[(q_{l-1,1} + t_{l-1,i} r_{1i}) - t_{ii}^l x_{i1} \right] + Rv_{l1} \geq 0;$$

$$\left[(q_{l-1,1} + t_{l-1,i} r_{1i}) - t_{ii}^l x_{i1} \right] + R(1 - v_{l1}) > 0; \quad (55)$$

$$l = \overline{2, L}, i = \overline{1, I};$$

$$q_{l1} \geq t_{ii}^l x_{i1} - Rv_{l1};$$

$$q_{l1} \geq (q_{l-1,1} + t_{l-1,i} r_{1i}) - R(1 - v_{l1}),$$

$$l = \overline{2, L}, i = \overline{1, I}; \quad (56)$$

$$v_{l1} \in \{0, 1\}, l = \overline{2, L}; \quad (57)$$

$$r_{1i} \leq m_1; r_{1i} \leq u_1 x_{i1}; r_{1i} \geq m_1 + u_1(x_{i1} - 1);$$

$$r_{1i} \geq 0; u_1 = (n - 2), i = \overline{1, I}; \quad (58)$$

$$-\left[(q_{l,j-1} + t_{lk} r_{j-1,k} + t_{ki}^l y_{k,j-1,i,j}) - \right.$$

$$\left. - (q_{l-1,j} + t_{l-1,i} r_{ji}) \right] + R w_{lj} \geq 0,$$

$$j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (59)$$

$$\left[(q_{l,j-1} + t_{lk} r_{j-1,k} + t_{ki}^l x_{k,j-1} x_{ij}) - (q_{l-1,j} + t_{l-1,i} r_{ji}) \right] +$$

$$+ R(1 - w_{lj}) > 0,$$

$$j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (60)$$

$$q_{l-1,j} \geq (q_{l-1,j} + t_{l-1,i} r_{ji}) - R w_{lj},$$

$$j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, l = \overline{2, L}; \quad (61)$$

$$q_{lj} \geq (q_{l,j-1} + t_{lk} r_{j-1,k} + t_{ki}^l y_{k,j-1,i,j}) - R(1 - w_{lj}),$$

$$j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k, l = \overline{2, L}; \quad (62)$$

$$w_{lj} \in \{0, 1\}, l = \overline{2, L}, j = \overline{2, J}; \quad (63)$$

$$g_i \geq (q_{Lj} + t_{Li} r_{ji}), i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}; \quad (64)$$

$$\begin{aligned}
 -(g_i - d_i) + Rz_i &\geq 0, (g_i - d_i) + R(1 - z_i) \geq 0, \\
 p_i &\geq (g_i - d_i) - R(1 - z_i), \\
 p_i &\geq -Rz_i, z_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, I}; \quad (65)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{ji} &\leq m_j; r_{ji} \leq u_j x_{ij}; r_{ji} \geq m_j + u_j(x_{ij} - 1); \\
 r_{ji} &\geq 0; u_j = (n - 2), j = \overline{2, J}, i = \overline{1, I}; \quad (66)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_{k,j-1,i,j} &\leq x_{k,j-1}; y_{k,j-1,i,j} \leq x_{ij}; \\
 y_{k,j-1,i,j} &\geq x_{k,j-1} + x_{ij} - 1, y_{k,j-1,i,j} \in \{0, 1\}, \\
 j &= \overline{2, J}, i = \overline{1, I}, k = \overline{1, I}, i \neq k; \quad (67)
 \end{aligned}$$

$$G = \sum_{i=1}^I p_i; q_{lj} \geq 0, j = \overline{1, J}, l = \overline{1, L}; \quad (68)$$

$$m_j \geq 2, m_j - \text{целое}, j = \overline{1, J}; \quad (69)$$

$$g_i \geq 0, p_i \geq 0, z_i \geq 0, i = \overline{1, I}; \quad (70)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J}. \quad (71)$$

Исследование применения моделей MILP для идентификации эффективных решений по включению однотипных заданий в пакеты и по порядкам пакетов для проведения операций с ними на приборах КС

Исследование моделей проводится с целью удостовериться в том, что рассматриваемый подход, предусматривающий типизацию заданий в соответствии со значениями их временных параметров, позволяет получить решения, являющиеся более эффективными, чем фиксированные пакеты, а также идентифицировать степень увеличения эффективности получаемых решений. Применимость моделей MILP исследована путем решения ряда рассматриваемых задач с различными значениями параметров $t_{i'}$ и $t_{i''}$. Значения этих параметров такие, что $\max(t_{i'}/\min(t_{i''})) \in \{4, 8\}$ и $\max(t_{i''}^l/\min(t_{i''}^l)) \in \{2, 4, 8\}$. Указанные отношения являются одинаковыми для всех приборов. Для других параметров задач заданы следующие значения: $n = 5, n^i \in \{8, 12, 16\}, L = 5$. Результатами исследований первой модели является функциональная связь отношения $C_{с.в.п} = (C_{\max}^{\text{фикс}} - C_{\max}^{\text{о.с.п}}) / C_{\max}^{\text{фикс}}$ с параметрами задачи ($C_{с.в.п}$ – степень снижения значений моментов времени окончания выполнения действий с пакетами – повышение эффективности решений при оптимизации; $C_{\max}^{\text{фикс}}$ – значение критерия для фиксированных пакетов; $C_{\max}^{\text{о.с.п}}$ – значение критерия при оптимизации составов пакетов с использованием первой из предложенных моделей). Фиксированными являются пакеты, содержащие все задания i -го типа (n фик-

сированных пакетов). Полученные зависимости $C_{с.в.п}$ от параметров задачи представлены на рис. 1.

Для второй модели результатом исследований является функциональная связь отношения $G_{с.о.з} = (G^{\text{фикс}} - G^{\text{о.с.п}}) / G^{\text{фикс}}$ от параметров задачи ($G_{с.о.з}$ – степень снижения общего запаздывания – повышение эффективности решений при оптимизации; $G^{\text{фикс}}$ – значение критерия G для фиксированных пакетов; $G^{\text{о.с.п}}$ – значение критерия G при оптимизации составов пакетов). При исследовании модели MILP второго вида для задач с определенными выше значениями параметров заданы сроки d_i окончания проведения операций с наборами, которые представлены в таблице. Полученные зависимости $G_{с.о.з}$ от параметров задачи показаны на рис. 2.

В соответствии с представленными на рис. 1 зависимостями степени роста эффективности решений по включению однотипных заданий в пакеты в сравнении с фиксированными пакетами сделаны следующие выводы, касающиеся процесса проведения операций с ними в КС:

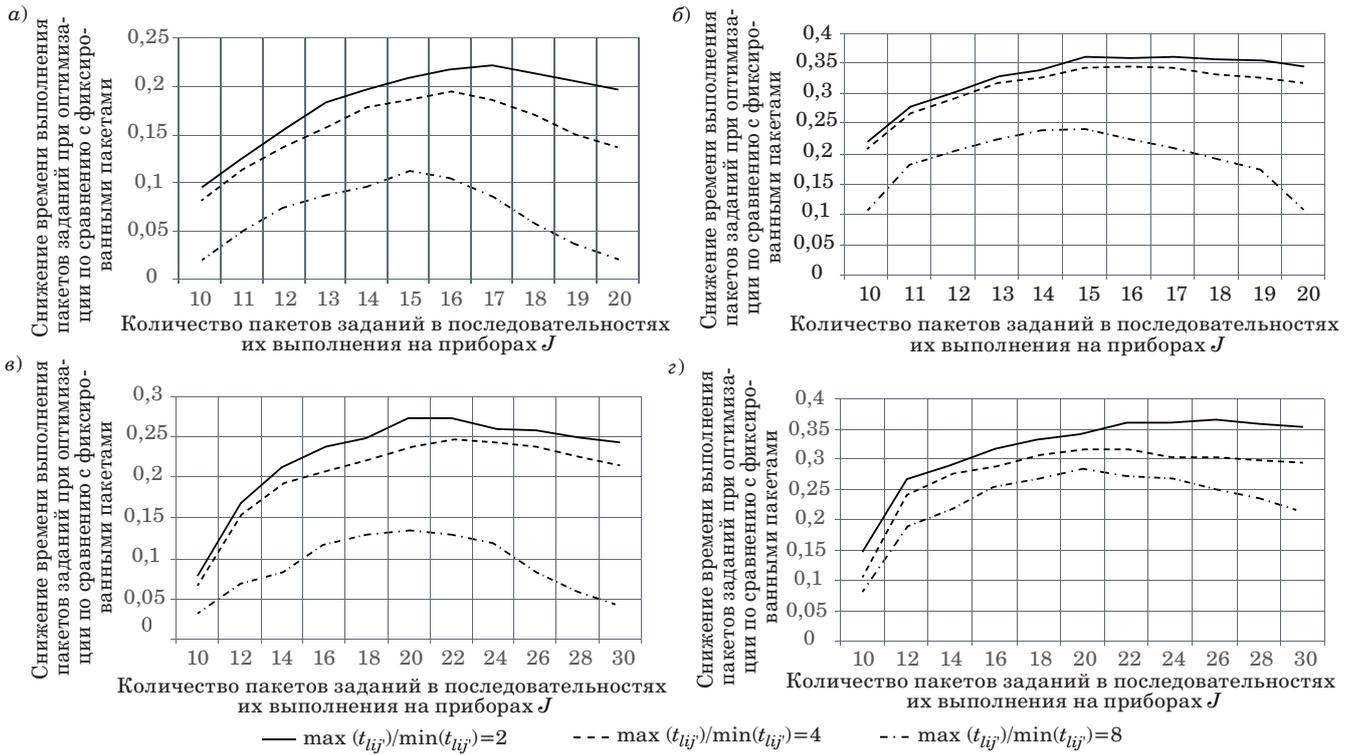
1) при росте неоднородности времени проведения операций на приборах с заданиями разных типов фиксируется повышение эффективности решений (при существенных значениях отношения $\max(t_{i'})/\min(t_{i'})$ оптимизация составов ПЗ обуславливает большую эффективность проведения операций с пакетами на приборах); при увеличении неоднородности времени выполнения заданий оптимизация составов пакетов обеспечивает большую эффективность процесса осуществления операций с ними на приборах;

2) при неизменных значениях степени неоднородности времени выполнения заданий разных типов увеличение неоднородности вре-

■ Значения директивных сроков окончания выполнения наборов заданий для задач оптимизации составов пакетов и расписаний

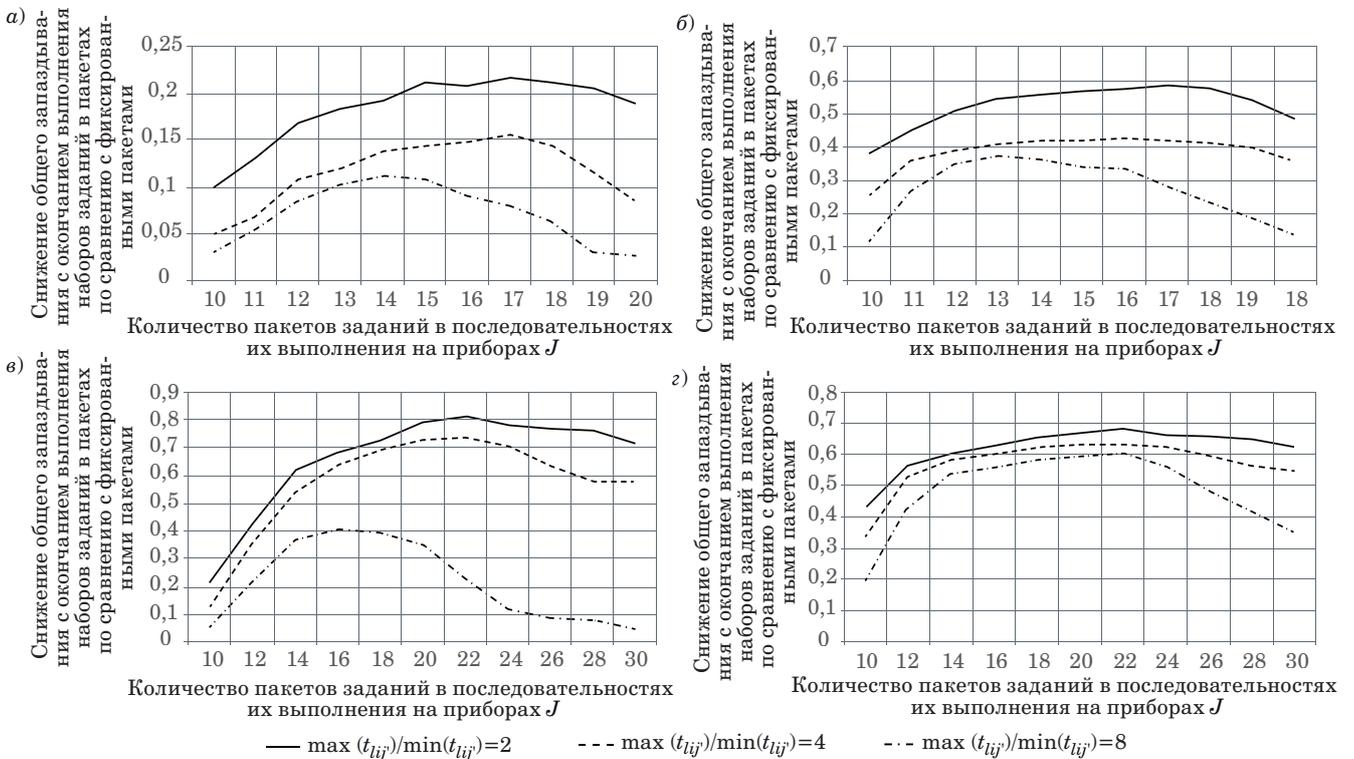
■ The values of the directive deadlines for completing task sets for optimization tasks of package compositions and schedules

n^i	$\max(t_{i'})/\min(t_{i'})$	$\max(t_{i''}^l)/\min(t_{i''}^l)$	$d_i (i = \overline{1, 5})$
8	4	2, 4	40, 80, 80, 120, 160
		8	80, 80, 120, 160, 200
	8	2, 4	80, 120, 160, 200, 240
		8	120, 160, 200, 240, 280
12	4	2, 4	40, 80, 80, 120, 160
		8	80, 80, 120, 160, 200
	8	2, 4	80, 120, 160, 200, 240
		8	120, 160, 200, 240, 280



■ **Рис. 1.** Уменьшение времени выполнения ПЗ при оптимизации их составов: а – $n^i = 8, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 4$; б – $n^i = 8, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 8$; в – $n^i = 12, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 4$; з – $n^i = 12, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 8$

■ **Fig. 1.** Reducing the execution time of packages while optimizing their compositions: а – $n^i = 8, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 4$; б – $n^i = 8, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 8$; в – $n^i = 12, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 4$; з – $n^i = 12, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 8$



■ **Рис. 2.** Уменьшение запаздывания окончания выполнения ПЗ при оптимизации составов: а – $n^i = 8, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 4$; б – $n^i = 8, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 8$; в – $n^i = 12, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 4$; з – $n^i = 12, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 8$

■ **Fig. 2.** Reducing the delay in the completion of packages when optimizing compositions: а – $n^i = 8, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 4$; б – $n^i = 8, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 8$; в – $n^i = 12, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 4$; з – $n^i = 12, \max(t_{i'})/\min(t_{i'}) = 8$

мени переналадок приборов приводит к снижению эффективности оптимизации процессов выполнения ПЗ в КС; это обусловливается большими простоями, являющимися следствием длительных переналадок отдельных приборов; однако даже при больших значениях неоднородностей времени переналадок приборов оптимизация составов пакетов обеспечивает большую эффективность процессов выполнения пакетов в КС.

Зависимости степени роста эффективности решений по включению однотипных заданий в пакеты в сравнении с фиксированными пакетами, представленные на рис. 2, позволили сделать выводы, касающиеся процесса проведения операций с ними в КС (с учетом директивных сроков):

1) при росте неоднородности времени проведения операций на приборах с заданиями разных типов фиксируется повышение эффективности решений по включению заданий в пакеты в большей степени по сравнению с первой задачей;

2) увеличение количества заданий каждого типа обуславливает более значительный рост эффективности процессов их выполнения в КС по сравнению с первой задачей (рост от 0,23 до 0,4 для второй задачи по сравнению с ростом от 0,2 до 0,27 для первой задачи).

Заключение

Современные математические модели МІLP и полиномиальные алгоритмы оптимизации расписаний выполнения заданий, входящих в наборы, предусматривают реализацию их распре-

деления по пакетам, а не оптимизацию составов пакетов однотипных заданий. Это обуславливает сложный вид моделей и ограниченный размер задач. Разработаны две модели смешанного целочисленного нелинейного программирования, позволяющие идентифицировать лучшие решения по включению заданий в пакеты (по определению количества однотипных заданий в пакетах) при учете времени завершения процесса проведения операций с пакетами и запаздывания с окончанием выполнения пакетов. Полученные модели линейризованы введением дополнительных переменных и выражений, ограничивающих множества решений, обуславливающих возможность их использования в моделях. Предложен способ исключения операций в сформированных нелинейных моделях путем введения дополнительных переменных и соответствующих им ограничений. Также предложен способ определения запаздываний с окончанием проведения операций с пакетами в системе по сравнению со сроками, которые заданы для каждого типа заданий. Способ определения запаздываний также предполагает введение бинарных переменных и соответствующих им ограничений. Итогом линейризирующих преобразований являются две математические модели МІLP, позволяющие определять эффективные решения по включению однотипных заданий в пакеты. Для исследований задач оптимизации с использованием предложенных моделей разработано приложение в пакете IBM ILOG CPLEX. Реализация подхода, связанного с типизацией заданий при разработке моделей МІLP, позволила увеличить их количество и сократить время получения результатов.

Литература

1. Кротов К. В. Комплексный метод определения эффективных решений по составам партий данных и расписаниям их обработки в конвейерных системах. *Вычислительные технологии*, 2018, т. 23, № 3, с. 58–76.
2. Кротов К. В. Математическая модель и алгоритм метода ветвей и границ для оптимизации решений по составам пакетов в многостадийных системах. *Информатика и автоматизация*, 2022, т. 21, № 1, с. 5–40.
3. Кротов К. В. Алгоритм метода ветвей и границ оптимизации расписаний выполнения пакетов заданий в конвейерных системах. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 2, с. 15–26. doi:10.31799/1684-8853-2023-2-15-26, EDN: WWXRRW
4. Suppiah Ya., Omar M. K. A hybrid tabu search for batching and sequencing decisions in a single machine environment. *Computers & Industrial Engineering*, 2014, no. 78, pp. 135–147.
5. Trindade R. S., Bassi de Araujo O. C., Fampa M. Arc-flow approach for single batch-processing machine scheduling. *Computer & Operation Research*, 2021, vol. 134, Article 105394. doi:10.1016/j.cor.2021.105394, EDN: RUTXCE
6. Yang F., Davari M., Wei W., Hermans B., Leus R. Scheduling a single parallel-batching machine with non-identical job sizes and incompatible job families. *European Journal of Operational Research*, 2022, vol. 303, no. 3–4, pp. 602–615. doi:10.1016/j.ejor.2022.03.027
7. Ogun B., Alabas-Uslu Ç. Mathematical models for a batch scheduling problem to minimize earliness and tardiness. *Journal of Industrial Engineering and Management*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 390–405. doi:10.3926/jiem.2541, EDN: YJFIVF
8. Pei J., Cheng B., Liu X., Pardalos P. M., Kong M. Single-machine and parallel-machine serial-batching

- scheduling problems with position-based learning effect and linear setup time. *Annals of Operations Research*, 2019, vol. 272, no. 1-2, pp. 217–241. doi:10.1007/s10479-017-2481-8, EDN: VBVGZU
9. **Wu W., Tangb L., Pizzuti A.** Robust scheduling for minimizing maximum lateness on a serial-batch processing machine. *Information Processing Letters*, 2024, no. 186, Article 106473. doi:10.1016/j.ipl.2024.106473
 10. **Li Sh., Li M., Khan M. I.** Algorithms for two-agent unbounded serial-batch scheduling with makespan and maximum lateness objectives. *Networks and Heterogeneous Media*, 2023, vol. 18, iss. 4, pp. 1678–1691. doi:10.3934/nhm.2023073, EDN: LTKVGD
 11. **Rostami M., Shad S.** A hybrid bee algorithm for two-machine flow-shop scheduling problems with batch delivery. *Journal of Quality Engineering and Production Optimization*, 2020, vol. 5, iss. 1, pp. 137–164. doi:10.22070/jqepo.2020.5317.1143
 12. **Matin H. N. Z., Salmasi N., Shahvari O.** Makespan minimization in flowshop batch processing problem with different batch compositions on machines. *International Journal of Production Economics*, 2017, vol. 193, pp. 832–844. doi:10.1016/j.ijpe.2017.09.015, EDN: VPBMXR
 13. **Hidayat N. P., Oktaviani T. D., Halim A. H.** Multiple item batch scheduling model on a batch processor to minimize total actual flowtime parts through the shop. *IOP Conference. Series: Materials Science and Engineering*, May 2020, vol. 830(4), Article 042007. doi:10.1088/1757-899x/830/4/042007
 14. **Hertrich Ch., Weiß Ch., Ackermann H., Heydrich S., Krumke S. O.** Scheduling a proportionate flow shop of batching machines. *Journal of Scheduling*, 2020, vol. 23, no. 5, pp. 575–593. doi:10.1007/s10951-020-00667-2, EDN: SHXFJR
 15. **Halim A. H., Hidayat N. P., Aribowo W.** Single item batch-scheduling model for a flow shop with m batch-processing machines to minimize total actual flow time. *International Journal of Technology*, 2022, vol. 13, no. 4, pp. 816–826. doi:10.14716/ijtech.v13i4.4869, EDN: YPLIBH
 16. **Zhang Y., Zhou Z., Liu J.** The production scheduling problem in a multi-page invoice printing system. *Computer & Operation Research*, 2010, vol. 37, no. 10, pp. 1814–1821. doi:10.1016/j.cor.2010.01.014, EDN: XXDRJD
 17. **Mauluddin Y.** Three-stage flow-shop scheduling model with batch processing machine and discrete processing machine. *3rd Annual Applied Sciences and Engineering Conference AASEC 2018. Series: MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 197, Article 14002. doi:10.1051/mateconf/201819714002
 18. **Shahvari O., Logendran R.** Hybrid flow shop batching and scheduling with a bi-criteria objective. *International Journal Production Economics*, 2016, no. 179, pp. 239–258. doi:10.1016/j.ijpe.2016.06.005, EDN: XZDKUD
 19. **Wang S., Kurz M., Mason S., Rashidi E.** Two-stage hybrid flow shop batching and lot streaming with variable sublots and sequence-dependent setups. *International Journal of Production Research*, 2019, vol. 57, no. 22, pp. 6893–6907. doi:10.1080/00207543.2019.1571251, EDN: DBEBPS
 20. **Suryadhini P. P., Sukoyo S., Suprayogi S., Halim A. H.** A batch scheduling model for a three-stage flow shop with job and batch processors considering a sampling inspection to minimize expected total actual flow time. *Journal of Industrial Engineering and Management*, 2021, vol. 14, no. 3, pp. 520–537. doi:10.3926/jiem.3438, EDN: VFMZBT
 21. **Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.** Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity. *Department of Operations Research, Statistics, and System Theory*, 1989, vol. R 8909, pp. 1–70.
 22. **Ковалев М. М.** *Модели и методы календарного планирования: курс лекций.* Минск, Изд-во БГУ, 2004. 63 с.
 23. **Asghari M., Fathollahi-Fard A. M., Mirzapour Al-e-hashem S. M. J., Dulebenets M. A.** Transformation and linearization techniques in optimization: A state-of-the-art survey. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 2, Article 283. doi:10.3390/math10020283, EDN: ABRVQM
 24. **Mohammadi S., Mirzapour Al-e-hashem S. M. J., Rekik Y.** An integrated production scheduling and delivery route planning with multi-purpose machines: A case study from a furniture manufacturing company. *International Journal of Production Economics*, 2019, vol. 219, iss. 1, pp. 347–359. doi:10.1016/j.ijpe.2019.05.017

UDC 004.453

doi:10.31799/1684-8853-2024-6-46-57

EDN: EFCACX

Models of mixed integer linear programming for optimizing the inclusion of tasks in packages and the order of operations with them in pipeline systems

K. V. Krotov^a, Dr. Sc., Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-9670-6141, krotov_k1@mail.ru^aSevastopol State University, 33, Universitetskaya St., Sevastopol, 299053, Russian Federation

Introduction: The identification of effective execution schedules in pipeline systems for sets of the same type of tasks provides for the search for the best solutions for including tasks from these sets in packages and the best solutions according to the order of packages for performing operations with them on the devices of these systems. With a small size of the tasks, it is possible to solve them by constructing mathematical models of mixed integer linear programming. **Purpose:** To develop mathematical models of mixed integer

linear programming that allow determining the best solutions for including the same type of tasks from sets into packages and in the order of packages for performing operations with them in pipeline systems. **Results:** The development of mathematical models of this type is based on an approach related to the typing of tasks. In accordance with this approach, tasks with equal duration values for their execution on the devices of conveyor systems and with equal duration values for the changeover of devices for operations with them belong to one type. Based on this approach, mathematical models of mixed integer nonlinear programming have been developed, which make it possible to include tasks from sets into packages and optimize their orders for the implementation of operations with them in pipeline systems. The optimization conditions are: minimization of the total time for completing task packages on pipeline system devices; minimization of the total delay with the completion of task sets compared to the specified time limits for them. The resulting models are linearized by introducing additional variables and corresponding constraints. A method for linearization of the operation of determining the maximum of two values is proposed, which provides for the introduction of indicator variables and allowed to increase computing performance. In order to verify the presented models, an application has been developed in the IBM ILOG CPLEX environment. With its application, studies have been conducted to optimize the composition of task packages and schedules for their execution for various sets of parameter values for the tasks of finding effective solutions. **Practical relevance:** The obtained results showed the effectiveness of the developed models in solving optimization problems in the considered formulation. The use of the proposed mathematical models makes it possible to increase the degree of use of the resources of various types of computer systems when implementing production or computing processes in them.

Keywords – pipeline systems, task packages, schedules, models of mixed integer linear programming.

For citation: Krotov K. V. Models of mixed integer linear programming for optimizing the inclusion of tasks in packages and the order of operations with them in pipeline systems. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 6, pp. 46–57 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-6-46-57, EDN: EFCACX

References

- Krotov K. V. The complex method for determining effective solutions for data batch sizes and processing schedules in conveyor systems. *Computing Technologies*, 2018, vol. 23, no. 3, pp. 58–76 (In Russian).
- Krotov K. V. Mathematical model and algorithm of branch and boundary method for optimizing solutions for package compositions in multi-stage systems. *Informatics and Automation*, 2022, vol. 21, no. 1, pp. 5–40 (In Russian). doi:10.15622/ia.2022.21.1
- Krotov K. V. A branch and bound algorithm for the optimization of batch scheduling in pipeline systems. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 2, pp. 15–26 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-2-15-26, EDN: WWXRRW
- Suppiah Ya., Omar M. K. A hybrid tabu search for batching and sequencing decisions in a single machine environment. *Computers & Industrial Engineering*, 2014, no. 78, pp. 135–147.
- Trindade R. S., Bassi de Araujo O. C., Fampa M. Arc-flow approach for single batch-processing machine scheduling. *Computer & Operation Research*, 2021, vol. 134, Article 105394. doi:10.1016/j.cor.2021.105394, EDN: RUTXCE
- Yang F., Davari M., Wei W., Hermans B., Leus R. Scheduling a single parallel-batching machine with non-identical job sizes and incompatible job families. *European Journal of Operational Research*, 2022, vol. 303, no. 3–4, pp. 602–615. doi:10.1016/j.ejor.2022.03.027
- Ogun B., Alabas-Uslu Ç. Mathematical models for a batch scheduling problem to minimize earliness and tardiness. *Journal of Industrial Engineering and Management*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 390–405. doi:10.3926/jiem.2541, EDN: YJFIVF
- Pei J., Cheng B., Liu X., Pardalos P. M., Kong M. Single-machine and parallel-machine serial-batching scheduling problems with position-based learning effect and linear setup time. *Annals of Operations Research*, 2019, vol. 272, no. 1–2, pp. 217–241. doi:10.1007/s10479-017-2481-8, EDN: VBVGZU
- Wu W., Tang L., Pizzuti A. Robust scheduling for minimizing maximum lateness on a serial-batch processing machine. *Information Processing Letters*, 2024, no. 186, Article 106473. doi:10.1016/j.ipl.2024.106473
- Li Sh., Li M., Khan M. I. Algorithms for two-agent unbounded serial-batch scheduling with makespan and maximum lateness objectives. *Networks and Heterogeneous Media*, 2023, vol. 18, iss. 4, pp. 1678–1691. doi:10.3934/nhm.2023073, EDN: LTKVGD
- Rostami M., Shad S. A hybrid bee algorithm for two-machine flow-shop scheduling problems with batch delivery. *Journal of Quality Engineering and Production Optimization*, 2020, vol. 5, iss. 1, pp. 137–164. doi:10.22070/jqepo.2020.5317.1143
- Matin H. N. Z., Salmasi N., Shahvari O. Makespan minimization in flowshop batch processing problem with different batch compositions on machines. *International Journal of Production Economics*, 2017, vol. 193, pp. 832–844. doi:10.1016/j.ijpe.2017.09.015, EDN: VPBMXR
- Hidayat N. P., Oktaviani T. D., Halim A. H. Multiple item batch scheduling model on a batch processor to minimize total actual flowtime parts through the shop. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, May 2020, vol. 830(4), Article 042007. doi:10.1088/1757-899x/830/4/042007
- Hertrich Ch., Weiß Ch., Ackermann H., Heydrich S., Krumke S. O. Scheduling a proportionate flow shop of batching machines. *Journal of Scheduling*, 2020, vol. 23, no. 5, pp. 575–593. doi:10.1007/s10951-020-00667-2, EDN: SHXFJR
- Halim A. H., Hidayat N. P., Aribowo W. Single item batch-scheduling model for a flow shop with m batch-processing machines to minimize total actual flow time. *International Journal of Technology*, 2022, vol. 13, no. 4, pp. 816–826. doi:10.14716/ijtech.v13i4.4869, EDN: YPLIBH
- Zhang Y., Zhou Z., Liu J. The production scheduling problem in a multi-page invoice printing system. *Computer & Operation Research*, 2010, vol. 37, no. 10, pp. 1814–1821. doi:10.1016/j.cor.2010.01.014, EDN: XXDRJD
- Mauluddin Y. Three-stage flow-shop scheduling model with batch processing machine and discrete processing machine. *3rd Annual Applied Sciences and Engineering Conference AASEC 2018. Series: MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 197, Article 14002. doi:10.1051/mateconf/201819714002
- Shahvari O., Logendran R. Hybrid flow shop batching and scheduling with a bi-criteria objective. *International Journal of Production Economics*, 2016, no. 179, pp. 239–258. doi:10.1016/j.ijpe.2016.06.005, EDN: XZDKUD
- Wang S., Kurz M., Mason S., Rashidi E. Two-stage hybrid flow shop batching and lot streaming with variable sublots and sequence-dependent setups. *International Journal of Production Research*, 2019, vol. 57, no. 22, pp. 6893–6907. doi:10.1080/00207543.2019.1571251, EDN: DBEBPS
- Suryadhini P. P., Sukoyo S., Suprayogi S., Halim A. H. A batch scheduling model for a three-stage flow shop with job and batch processors considering a sampling inspection to minimize expected total actual flow time. *Journal of Industrial Engineering and Management*, 2021, vol. 14, no. 3, pp. 520–537. doi:10.3926/jiem.3438, EDN: VFMZBT
- Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B. Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity. *Department of Operations Research, Statistics, and System Theory*, 1989, vol. R 8909, pp. 1–70.
- Kovalev M. M. *Modeli i metody kalendarnogo planirovaniya* [Models and methods of calendar planning]. Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet Publ., 2004. 63 p. (In Russian).
- Asghari M., Fathollahi-Fard A. M., Mirzapour Al-e-hashem S. M. J., Dulebenets M. A. Transformation and linearization techniques in optimization: A state-of-the-art survey. *Mathematics*, 2022, vol. 10, no. 2, Article 283. doi:10.3390/math10020283, EDN: ABRVQM
- Mohammadi S., Mirzapour Al-e-hashem S. M. J., Rekić Y. An integrated production scheduling and delivery route planning with multi-purpose machines: A case study from a furniture manufacturing company. *International Journal of Production Economics*, 2019, vol. 219, iss. 1, pp. 347–359. doi:10.1016/j.ijpe.2019.05.017