



## Коды-произведения с полуслепым декодированием для одночастотной передачи в многолучевом канале с замираниями

Ф. А. Таубин<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор, [orcid.org/0000-0002-8781-9531](https://orcid.org/0000-0002-8781-9531), [ftaubin@yahoo.com](mailto:ftaubin@yahoo.com)

А. Н. Трофимов<sup>а</sup>, канд. техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0003-1233-5222](https://orcid.org/0000-0003-1233-5222)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,

Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

**Введение:** построение кодовых конструкций для одночастотной передачи на основе кодов-произведений со сравнительно простыми внутренними кодами, обеспечивающими приемлемый уровень вероятности ошибки при отсутствии в приемнике оценок параметров канала и наличии в канале многолучевости, представляет значительный интерес в плане разработки спектрально-эффективных методов надежной передачи в каналах со случайными быстро меняющимися параметрами. **Цель:** разработать коды-произведения с полуслепым декодированием для одночастотной передачи в многолучевом канале с замираниями и выполнить анализ их помехоустойчивости. **Результаты:** приведено формализованное описание одночастотной передачи с фазовой модуляцией в многолучевом канале с замираниями; предложена кодовая конструкция в виде кода-произведения, ориентированная на использование полуслепой процедуры декодирования внутреннего кода в многолучевом канале с замираниями. Приведено описание полуслепое декодирования по максимуму правдоподобия внутреннего кода с использованием мягких решений; выполнен анализ помехоустойчивости предложенной конструкции; представлены примеры конкретных конструкций кодов-произведений, ориентированных на однолучевой и двухлучевой каналы, с последующим сравнительным анализом, включающим учет как требуемой скорости передачи, так и ряда параметров канала. Показано, что предложенные коды при полуслепое декодировании обеспечивают реализацию внутреннего разнесения, при этом многолучевому каналу, что выражается появлением существенного энергетического выигрыша. **Практическая значимость:** предложенная конструкция кода-произведения с полуслепым декодированием позволяет эффективно интегрировать помехоустойчивое кодирование с оцениванием текущих параметров многолучевого канала с замираниями, что с учетом умеренной сложности представляет практический интерес при передаче в каналах со случайными быстро меняющимися параметрами. Гибкость конструкции обеспечивает возможность адаптации схемы кодирования к требуемой скорости передачи, количеству лучей, а также величине максимального доплеровского рассеяния. Выполненный анализ помехоустойчивости позволяет получить широкий диапазон обменных соотношений между требуемой скоростью передачи, вероятностью ошибки, сложностью реализации и основными параметрами канала, что способствует рациональному выбору конкретных параметров схемы передачи.

**Ключевые слова** – канал с замираниями и многолучевым распространением, доплеровское рассеяние, одночастотная передача, коды-произведения, полуслепое декодирование, аддитивная граница вероятности ошибки, граница Чернова, состояние Бхаттачария.

**Для цитирования:** Таубин Ф. А., Трофимов А. Н. Коды-произведения с полуслепым декодированием для одночастотной передачи в многолучевом канале с замираниями. *Информационно-управляющие системы*, 2024, № 5, с. 68–80. doi:10.31799/1684-8853-2024-5-68-80, EDN: ONWDIC

**For citation:** Taubin F. A., Trofimov A. N. Product codes with semi-blind decoding for single carrier transmission over multipath fading channel. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 5, pp. 68–80 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-5-68-80, EDN: ONWDIC

### Введение

Технология беспроводных коммуникаций, поддерживающих обмен информацией между множеством пользователей и (или) устройствами, является одной из доминирующих в настоящее время и в обозримой перспективе. Растущий спрос на высокую скорость передачи данных и высокое качество обслуживания для широкого спектра мобильных приложений требуют разработки и использования гораздо более надежных и спектрально эффективных методов организации связи, включая исследование перспективных методов модуляции и кодирования [1–3].

Как известно, в беспроводных каналах передаваемые сигналы подвергаются замираниям, вызываемым наличием множества рассеивающих объектов между передатчиком и приемником, многолучевым распространением, а также относительным, и, как правило, случайным движением между передатчиком, приемником и рассеивающими объектами, порождающим доплеровское рассеяние [4, 5].

Одним из стандартных решений для компенсации влияния временного рассеяния является использование широкополосных сигналов на основе мультиплексирования с ортогональным частотным разделением (orthogonal frequency-

division multiplexing, OFDM) в качестве основного инструмента для схемы передачи на физическом уровне [4–6]. Как правило, при передаче в диапазоне до 6 ГГц длительность OFDM-сигналов оказывается много меньше величины интервала когерентности канала (которая в первом приближении обратна величине доплеровского рассеяния), поэтому полагают, что OFDM-сигнал передается по каналу со случайными, но неизменяющимися параметрами. Например, в стандарте 802.11a длительность OFDM-сигнала составляет 4 мкс, тогда как типичные значения интервала когерентности канала не опускаются ниже 0,5 мс. Технология OFDM позволяет обеспечить достаточно высокую спектральную эффективность при умеренной сложности реализации частотного компенсатора канальных искажений.

Вместе с тем технологии OFDM присущ ряд существенных недостатков, которые могут ограничить область ее возможного использования. Во-первых, это высокий уровень пик-фактора, что порождает высокую чувствительность OFDM-сигнала к нелинейным искажениям, вызванным усилителем мощности передатчика [7]. Во-вторых, помехоустойчивость OFDM-сигналов резко снижается в высокоомобильных беспроводных системах, при передаче в терагерцевом диапазоне и в нисходящих каналах спутниковых систем связи, где весьма существенным фактором оказывается влияние доплеровского рассеяния (величина которого может достигать нескольких килогерц [8, 9]). При сильном доплеровском рассеянии интервал когерентности канала может оказаться сопоставимым с длительностью OFDM-сигнала (или даже меньше его), что приводит к появлению интерференции между поднесущими OFDM-сигнала и заметному возрастанию искажений, связанных как с оценкой текущих параметров канала, так и с компенсацией канальных искажений [10–13].

В ситуациях, когда недостатки, сопряженные с использованием технологии OFDM, оказываются решающими, альтернативным вариантом является одностотная (single-carrier, SC) передача, при условии, конечно, если основные сопутствующие одностотной передаче издержки, такие как меньшая по сравнению с OFDM спектральная эффективность и существенно более высокая сложность компенсации временного рассеяния, являются приемлемыми. Следует отметить также, что одностотная передача рассматривается как наиболее подходящая в таких интенсивно развивающихся технологиях, как узкополосный интернет вещей (NB-IoT), усовершенствованная межмашинная связь (eMTC) и разработанный консорциумом 3GPP стандарт LTE-M для маломощной сотовой связи [14, 15]. Эти технологии ориентированы на передачу

в сравнительно узкой полосе частот — от 100 кГц (NB-IoT и eMTC) до 1 МГц (LTE-M).

Вне зависимости от используемого подхода — OFDM или SC, передаваемые по каналу с замираниями и частотно-временным рассеянием дискретные символы структурируются на передающей стороне посредством объединения в сравнительно короткие пакеты с встроенными в каждый пакет заранее известными в приемнике символами. С учетом указанного структурирования передаваемых символов возможны по меньшей мере три подхода к организации процедуры приема в канале со случайно изменяющимися параметрами при отсутствии информации о текущих параметрах канала.

Первый подход — использование префикса для оценивания текущих параметров канала на интервале, соответствующем длительности пакета, и последующее вынесение решений с применением полученных оценок параметров канала [16, 17]. Основным недостатком этого подхода связан с довольно большой вносимой избыточностью и сложностью учета погрешности оценивания изменяющихся (на интервале длительности пакета) параметров канала. Второй подход, в известном смысле противоположный первому, — слепое вынесение решений, при котором передаваемые пакеты не содержат каких-либо известных символов и решения выносятся только на основе вероятностной модели принятого сигнала [18, 19]. Основным и существенным недостатком слепого вынесения решений связан с тем, что для многих важных сценариев имеет место внутренне присущая этому подходу неоднозначность, проявляющаяся в том, что для нескольких различных (несовпадающих) передаваемых пакетов значения решающей функции могут оказаться идентичными. Кроме того, эффективные слепые процедуры требуют использования достаточно длинных пакетов, что сопровождается значительным ростом сложности приемника.

Промежуточное положение занимает третий подход — полуслепое вынесение решений (semi-blind detection), представляющий собой модификацию слепой процедуры в целях исключения присущей ей неоднозначности [20–22]. Для этого в передаваемый пакет, как и при первом подходе, включается префикс, который учитывается в вероятностной модели принятого сигнала, используемой для вынесения решения. Важным достоинством полуслепой процедуры вынесения решений является возможность использования более коротких префиксов. Кроме того, при анализе помехоустойчивости отсутствует необходимость учитывать погрешность оценивания параметров канала и их изменения на интервале длительности пакета. В целом полуслепая процедура вынесения решений при сравнительно

небольшой длине пакета представляется наиболее предпочтительной.

Далее в настоящей работе рассматривается сценарий одночастотной передачи пакетов с использованием фазовой модуляции (т. е. с минимальным значением пик-фактора) и с полуслепой процедурой вынесения решений. Наряду с рациональным выбором сигнального формата адекватный выбор схемы помехоустойчивого кодирования является ключевым фактором, определяющим требуемую помехоустойчивость передачи в каналах с замираниями и частотно-временным рассеянием. Подход к организации помехоустойчивого кодирования для таких каналов, основанный на использовании одного фиксированного кода, в настоящее время не рассматривается как приоритетный. Наибольшей эффективностью как по помехоустойчивости, так и по гибкости конструкции обладают кодовые схемы, основанные на использовании нескольких кодов [23–29]. К таким схемам относятся каскадные коды и коды-произведения (product codes). В обеих схемах кодирование осуществляется с использованием двух ступеней – внешней и внутренней. Основная идея использования двух ступеней кодирования применительно к каналу с замираниями и частотно-временным рассеянием состоит в следующем. Во-первых, с помощью подходящего сравнительно простого внутреннего кода, встроенного в пакет, обеспечить некоторый, достаточно приемлемый уровень вероятности ошибки при отсутствии в приемнике оценок параметров канала и наличия в канале многолучевости. Во-вторых, учитывая, что благодаря перемежению расширенный канал (включающий кодер и декодер внутреннего кода) оказывается практически каналом с независимыми ошибками, использовать в качестве внешнего достаточно мощный двоичный код для исправления независимых ошибок с умеренной сложностью реализации декодера.

### Модель передачи

Пусть двоичная информационная последовательность кодируется с использованием кода-произведения и передается по каналу при помощи  $q$ -ичной фазовой модуляции ( $q$ -PSK). Рассматриваемый код-произведение  $G$  состоит из двух кодов: внешнего двоичного  $(n, k)$ -кода  $C$  и внутреннего кода  $V$  над кольцом  $Z_q$  целых чисел по модулю  $q, q = 2^m, m$  – целое, имеющего длину  $N$  и объем (мощность)  $2^K$ . Входные блоки, состоящие из  $kK$  двоичных символов, разбиваются на  $K$  подблоков, состоящих из  $k$  символов. Каждый подблок кодируется внешним двоичным  $(n, k)$ -кодом  $C$  со скоростью  $R_{out} = k/n$ . Полученные

$K$  кодовых слов располагаются как строки прямоугольной матрицы размера  $K \times n$ . Каждый столбец полученной матрицы кодируется внутренним кодом  $V$ . Кодовое слово  $\mathbf{g}$  кода-произведения  $G$  представляет собой прямоугольную  $(N \times n)$ -матрицу, состоящую из  $n$  столбцов  $\mathbf{g} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n), \mathbf{v}_i \in V, \mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{iN})'$ , где символ «'» означает транспонирование. Скорость кода-произведения  $G$  составляет  $kK/nN$  [бит/символ].

Пусть  $(a_1, \dots, a_s)$  и  $(z_1, \dots, z_t)$  – две последовательности символов над кольцом  $Z_q$ , которые будут добавляться к каждому слову внутреннего кода  $V$  при передаче по каналу, образуя единый пакет. А именно последовательность  $(a_1, \dots, a_s)$  представляет собой префикс, добавляемый перед началом каждого кодового слова  $\mathbf{v}_i \in V$ , тогда как последовательность  $(z_1, \dots, z_t)$  – постфикс, добавляется в конце каждого кодового слова  $\mathbf{v}_i \in V$ :

$$\mathbf{v}_i' = (v_{i1}, \dots, v_{iN}) \mapsto \mathbf{b}_i = (a_1, \dots, a_s, v_{i1}, \dots, v_{iN}, z_1, \dots, z_t), \quad (1)$$

где  $a_l, z_j \in Z_q, l = 1, \dots, s, j = 1, \dots, t, i = 1, \dots, n$ . Префикс и постфикс могут рассматриваться как пилот-символы, встраиваемые во внутренний код  $V$ . Отображение (1) иллюстрирует преобразование внутреннего кода  $V$  в удлиненный код  $V_E$  с длиной  $J = N + s + t$  и скоростью  $R_{in} = K/J$  [бит/символ]. Результирующая скорость рассматриваемого кода-произведения с встроенными пилот-символами составляет  $R = kK/(nJ)$  [бит/ $q$ -ичный символ].

Отметим, что организация передачи с добавлением префикса к каждому кодовому слову  $\mathbf{v}_i \in V$  не является единственно возможным вариантом. Альтернативный вариант – использование внутреннего кода с дополнительной избыточностью, позволяющей исключить неоднозначность, которая характерна, как указывалось выше, для слепого декодирования. В этом случае  $s = 0$  и соотношение (1) приобретает вид  $\mathbf{v}_i' = (v_{i1}, \dots, v_{iN}) \mapsto \mathbf{b}_i = (v_{i1}, \dots, v_{iN}, z_1, \dots, z_t)$ .

Таким образом, передаваемый блок, соответствующий кодовому слову  $\mathbf{g}$  кода  $G$ , состоит из  $n$  подблоков  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Будем полагать, что эти подблоки в передаваемой последовательности блоков подвергаются перемежению перед передачей по каналу. Перемежение предназначено для исключения пакетирования ошибок на входе декодера внешнего кода  $C$ . Глубина перемежения определяется статистическими характеристиками канала и выбирается таким образом, чтобы ошибки в расширенном канале (включающем внутренний кодер/декодер, модулятор/демодулятор и собственно физический канал с замираниями) можно рассматривать как независимые.

Подблок  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_j)$ , где  $b_i \in Z_q, J = N + s + t$  и каждый символ подблока определен как

$$b_i = \begin{cases} a_i, & i = 1, 2, \dots, ; \\ v_{i-s}, & i = s+1, s+2, \dots, s+N; \\ z_{i-s-N}, & i = s+N+1, s+N+2, \dots, J, \end{cases} \quad (2)$$

передается по каналу с тактовой частотой  $1/T$  с использованием  $q$ -ичной фазовой модуляции,  $T$  – длительность тактового интервала. Тактовая частота  $1/T$  определяется скоростью  $w$  генерации источником двоичных символов и скоростью  $R$  кода-произведения  $G$ :  $1/T = w/R$ .

Ограничимся далее рассмотрением формализованной модели канала с дискретным временем. Для рассматриваемой модели принятый на  $i$ -м такте сигнал  $r_i$  имеет вид

$$r_i = \sum_{l=0}^{L-1} \mu_{il} u_{i-l} + n_i, \quad (3)$$

где  $u_i = \sqrt{R\gamma_b} \exp(j2\pi b_i/q)$ ,  $\gamma_b$  – отношение сигнал/шум, приходящееся на передачу одного бита;  $n_i$  – комплексная гауссова случайная величина,  $E[n_i] = 0$ ,  $E[n_i n_i^*] = 1$ ,  $E[\cdot]$  – оператор усреднения,  $i = 1, 2, \dots, J$ . В выражении (3) совокупность комплексных коэффициентов  $(\mu_{i0}, \dots, \mu_{iL-1})$  представляет собой дискретную импульсную характеристику  $L$ -лучевого канала, соответствующую  $i$ -му такту передачи.

Будем полагать, что последовательность векторов  $\{\mu_i\}$ ,  $\mu_i = (\mu_{i0}, \dots, \mu_{iL-1})'$  есть  $L$ -мерный стационарный комплексный гауссов случайный процесс с нулевым средним и известной матричной корреляционной функцией  $\Phi(\cdot)$ . Матричная корреляционная функция  $\Phi(\cdot)$  последовательности векторов  $\{\mu_i\}$  определяется как  $\Phi(k) = \Phi_k$ ,  $k = \dots, -2, 1, 0, 1, 2, \dots$ , где  $L \times L$  корреляционная матрица  $\Phi_k = E[\mu_i \mu_{i-k}^*]$ , символ «\*» означает эрмитово сопряжение. Принятый вектор  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_J)'$  является  $J$ -мерным комплексным гауссовым вектором с плотностью распределения

$$p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r}|\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^J \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}}} \exp(-\mathbf{r}^* \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$  –  $J \times J$  корреляционная матрица вектора  $\mathbf{r}$ , соответствующая кодовому слову  $\mathbf{v}$ , т. е.  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}} = E[\mathbf{r} \mathbf{r}^* | \mathbf{v}]$ . Будем полагать, что длина постфикса  $t \geq L-1$ ; тогда элементы  $k_{lh}$ ,  $l, h = 1, \dots, J$  матрицы  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$  имеют следующий вид:

$$k_{lh} = R\gamma_b \sum_{d=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{L-1} \varphi_{l-h}(d, i) \times \exp(j2\pi(b_{l-d} - b_{h-i})/q) + \delta_{lh}, \quad (5)$$

где  $\varphi_{l-h}(d, i)$  есть  $(d, i)$ -й элемент матрицы  $\Phi_{l-h}$ ; символы  $b_p$  при  $1 \leq p \leq J$  определены правилом (2), а при  $-(L-2) \leq p \leq 0$  являются символа-

ми постфикса:  $b_{-p} = b_{J-p} = z_{t-p}$ ;  $\delta_{lh}$  – дельта Кронекера.

Одной из наиболее распространенных моделей матричной корреляционной функции  $\Phi(\cdot)$ , соответствующей модели многолучевого распространения, предложенной Джейксом [1, 30, 31], является модель на основе функций Бесселя первого рода нулевого порядка. Вместе с тем во многих случаях (например, при малых значениях аргумента корреляционной функции  $\Phi(\cdot)$ ) случайные процессы  $\{\mu_{il}\}$ ,  $l = 0, 1, \dots, L-1$  в модели Джейкса достаточно точно аппроксимируются авторегрессионной моделью небольшого порядка [32]. При использовании авторегрессионной модели первого порядка с независимыми лучами дискретная импульсная характеристика канала  $\mu_i$  на  $i$ -м такте определяется как

$$\mu_i = \rho \mu_{i-1} + \sqrt{1-\rho^2} \chi_i A^{1/2}, \quad (6)$$

где параметр  $\rho \in (0, 1)$ ;  $\{\chi_i\}$  –  $L$ -мерный комплексный гауссов случайный процесс с нулевым средним и матричной корреляционной функцией  $E[\chi_i \chi_j^*] = \delta_{ij} \mathbf{I}$ ,  $\forall i, j$  (символ  $\mathbf{I}$  означает единичную матрицу);  $A^{1/2} = \text{diag}(\alpha_0^{1/2}, \dots, \alpha_{L-1}^{1/2})$ ,  $\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l = 1$ ,  $\alpha_l \geq 0$ ,  $l = 0, 1, \dots, L-1$ . Из (6) следует, что  $E[\mu_i \mu_j^*] = \delta_{ij} \mathbf{A}$ ,  $\forall i, j$ , т. е. главная диагональ  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{L-1})$  матрицы  $\mathbf{A}$  определяет распределение дисперсий коэффициентов дискретной импульсной характеристики канала. Корреляционная матрица  $\Phi_k$  для этой модели имеет вид

$$\Phi_k = \rho^{|k|} \mathbf{A} = \rho^{|k|} \text{diag}(\alpha_0, \dots, \alpha_{L-1}). \quad (7)$$

Параметр  $\rho$  в (7) характеризует скорость изменения дискретной импульсной характеристики канала во времени. Как правило, этот параметр в модели (4) определяется нормализованным относительно тактовой частоты  $1/T$  максимальным доплеровским рассеянием в канале  $f_d$ ; в частности, в модели Джейкса параметр  $\rho = J_0(2\pi f_d T)$ , где  $J_0(\cdot)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка. При  $f_d T \ll 1$   $\rho \approx 1 - (\pi f_d T)^2$ . Выражение (5) для элементов  $k_{lh}$ ,  $l, h = 1, 2, \dots, J$  матрицы  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$  с учетом равенства (6) упрощается и приобретает вид

$$k_{lh} = R\gamma_b \sum_{i=0}^{L-1} \alpha_i \rho^{|l-h|} \exp(j2\pi(b_{l-i} - b_{h-i})/q) + \delta_{lh}. \quad (8)$$

Для исключения интерференции между кодовыми словами внутреннего кода  $V$  в соседних (после перемежения) передаваемых блоках будем полагать, что длина постфикса  $t \geq L-1$ . Отметим также, что при введении перемежения/деперемежения подблоков (пакетов) статистическая структура последовательности векторов  $\{\mu_i\}$ , ассоциированных с каждым передаваемым

подблоком передаваемой последовательности  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ , остается неизменной. Кроме того, принимая во внимание, что величина нормализованного (относительно тактовой частоты  $1/T$ ) максимального доплеровского рассеяния в канале примерно обратна нормализованному интервалу когерентности канала, можно заключить, что при глубине перемерения порядка  $1/(f_d T)$  практически исключается пакетирование ошибок на входе декодера внешнего кода  $C$ .

### Декодирование кода-произведения

Классическая процедура декодирования кода-произведения включает два этапа. На первом этапе декодируются принятые слова внутреннего кода  $V$ ; положим, что декодирование внутреннего кода  $V$  выполняется посредством процедуры, которую будем называть полуслепое декодирование по максимуму правдоподобия с использованием мягких решений. На втором этапе декодируются принятые слова внешнего двоичного  $(n, k)$ -кода  $C$  с использованием алгебраического декодера; будем полагать, что алгебраический декодер кода  $C$  позволяет исправить ошибки кратностью до половины минимального расстояния. Для рассматриваемого сценария передачи полуслепое декодирование по максимуму правдоподобия определяется следующим образом. Во-первых, в связи с отсутствием в декодере оценок текущих параметров канала при декодировании внутреннего кода  $V$  используются дополнительные сигналы, полученные при передаче префикса и постфикса; тем самым реализуется принцип полуслепого вынесения решений. Во-вторых, в качестве мягких решений используются компоненты вектора  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_j)'$ , определяемые выражением (3). В-третьих, декодер по принятому вектору  $\mathbf{r}$  выносит решение  $\hat{\mathbf{v}}$ , определяемое как  $\hat{\mathbf{v}} = \max_{\mathbf{v} \in V} p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r}|\mathbf{v})$ , где условная плотность  $p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r}|\mathbf{v})$  задается выражением (4). Таким образом, декодер внутреннего кода  $V$  в соответствии с выражением (4) для плотности распределения принятого вектора  $\mathbf{r}$  должен минимизировать метрику  $m(\cdot)$  вида

$$m(\mathbf{v}) = \mathbf{r}^* \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{r} + \ln \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}} \quad (9)$$

по всем словам внутреннего кода  $V$ . Отыскание минимального значения метрики  $m(\cdot)$  в (9) требует предварительного вычисления и хранения  $2^K$  обратных матриц  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1}, \mathbf{v} \in V$ . Временные затраты, возникающие при непосредственной реализации алгоритма декодирования, основанного на полном переборе, определяются числом кодовых слов внутреннего кода. Это число равно  $2^K$ , и оно, как следует из примеров, приведенных

в следующем разделе, оказывается очень небольшим, что приводит в итоге к практически реализуемым процедурам декодирования. Кроме того, отметим, что сложность вычисления значений эрмитовой квадратичной формы  $\mathbf{r}^* \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{r}$  в (9) может быть существенно уменьшена при использовании разложения Холецкого матрицы  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1}$ .

### Анализ помехоустойчивости

Для рассматриваемой схемы передачи с использованием кода-произведения  $G$  анализ помехоустойчивости включает два этапа. Вначале оценивается вероятность ошибки на бит для внутренней ступени кодирования с кодом  $V$ . Затем полученная оценка вероятности ошибки на бит для кода  $V$  используется для вычисления оценки вероятности ошибки на бит для внешнего кода  $C$ . Верхняя граница вероятности ошибки на бит  $P_b^{(in)}$  для внутреннего кода  $V$  имеет вид

$$P_b^{(in)} \leq \frac{1}{K} \sum_{\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V} p(\mathbf{v}) t(\mathbf{v}, \mathbf{v}') P(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'), \quad (10)$$

где  $p(\mathbf{v})$  — вероятность передачи кодового слова  $\mathbf{v}$ ;  $t(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  — число бит, в которых отличаются сообщения, соответствующие кодовым словам  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  внутреннего кода, и  $P(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$  — вероятность ошибки декодирования для кода из двух слов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  внутреннего кода при условии, что было передано слово  $\mathbf{v}$  (попарная вероятность ошибки). Попарная вероятность ошибки в верхней границе (10) с учетом выражения для метрики (9) определяется следующим образом:

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') = \Pr[m(\mathbf{v}) - m(\mathbf{v}') > 0] = \Pr[\mathbf{r}^* (\mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} - \mathbf{K}_{\mathbf{v}'}^{-1}) \mathbf{r} - \ln(\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}'} / \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}}) > 0], \quad (11)$$

где  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$  и  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}'}$  — корреляционные матрицы вектора  $\mathbf{r}$ , соответствующие кодовым словам  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$ . Точные формулы для попарной вероятности  $P(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$  требуют вычисления собственных чисел матрицы  $\mathbf{I} - \mathbf{K}_{\mathbf{v}} \mathbf{K}_{\mathbf{v}'}^{-1}$  и оказываются довольно сложными (с точки зрения вычислительных затрат) даже в случае простых собственных чисел этой матрицы и умеренных значений длины внутреннего кода. Кроме того, точное значение попарной вероятности весьма сложным образом зависит от конкретного вида кодовых слов, что существенно ограничивает возможности эвристического поиска подходящих внутренних кодов в совокупности с префиксом и постфиксом. В этом плане при анализе помехоустойчивости конкретных конструкций более приемлемым может оказаться использование подходящей верхней границы для вероятности  $P(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$ , например границы Чер-

нова. Применяя границу Чернова для правой части формулы (11), получаем следующую оценку сверху для попарной вероятности:

$$\begin{aligned} & P(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \leq \\ & \leq \mathbb{E} \left[ \exp \left( \lambda \left( \mathbf{r}^* (\mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} - \mathbf{K}_{\mathbf{v}'}^{-1}) \mathbf{r} - \ln(\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}'}/\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}}) \right) \right) \right] = \\ & = \int_{\mathbf{r}} \frac{\exp(-\mathbf{r}^* \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{r})}{\pi^J \det(\mathbf{K}_{\mathbf{v}})} \times \\ & \times \exp \left( \lambda \left( \mathbf{r}^* (\mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} - \mathbf{K}_{\mathbf{v}'}^{-1}) \mathbf{r} - \ln(\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}'}/\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}}) \right) \right) d\mathbf{r} = \\ & = e^{-\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \lambda)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где усреднение  $\mathbb{E}[\cdot]$  производится по случайному вектору  $\mathbf{r}$  при передаваемом кодовом слове  $\mathbf{v}$ ;  $\lambda$  – параметр Чернова,  $0 < \lambda < 1$ ; величина  $\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \lambda)$  в показателе экспоненты, определяемая как

$$\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \lambda) = \ln \frac{\det((1-\lambda)\mathbf{K}_{\mathbf{v}} + \lambda\mathbf{K}_{\mathbf{v}'})}{(\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}})^{1-\lambda} (\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}'})^{\lambda}}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (13)$$

представляет собой  $\lambda$ -скошенное расстояние Бхаттачария между условными плотностями вектора  $\mathbf{r}$ , соответствующими кодовым словам  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$ :

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') < \frac{(\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}})^{1-\lambda} (\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}'})^{\lambda}}{\det((1-\lambda)\mathbf{K}_{\mathbf{v}} + \lambda\mathbf{K}_{\mathbf{v}'})}, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (14)$$

Принимая во внимание, что корреляционная матрица  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$  вектора  $\mathbf{r}$  при передаваемом кодовом слове  $\mathbf{v}$  может быть представлена как  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}} = \mathbf{H}_{\mathbf{v}} + \mathbf{I}$ , где матрица  $\mathbf{H}_{\mathbf{v}} = \mathbb{E}\{\mathbf{s}\mathbf{s}^* | \mathbf{v}\}$  есть корреляционная матрица вектора

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_J)', \quad s_i = \sqrt{R\gamma_b} \sum_{l=0}^{L-1} \mu_{il} \exp(j2\pi b_{i-l}/q),$$

$\lambda$ -скошенное расстояние Бхаттачария (13) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \lambda) = \\ & = \ln \frac{\det(\lambda\mathbf{H}_{\mathbf{v}} + (1-\lambda)\mathbf{H}_{\mathbf{v}'} + \mathbf{I})}{(\det(\mathbf{H}_{\mathbf{v}} + \mathbf{I}))^{\lambda} (\det(\mathbf{H}_{\mathbf{v}'} + \mathbf{I}))^{1-\lambda}}, \quad 0 < \lambda < 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем величину  $d_B(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ , определяемую как  $d_B(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \max_{0 < \lambda < 1} \lim_{\gamma_b \rightarrow \infty} \Delta(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \lambda)$ . Из (15) следует, что

$$d_B(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \max_{0 < \lambda < 1} \ln \frac{\det(\lambda\mathbf{H}_{\mathbf{v}} + (1-\lambda)\mathbf{H}_{\mathbf{v}'})}{(\det \mathbf{H}_{\mathbf{v}})^{\lambda} (\det \mathbf{H}_{\mathbf{v}'})^{1-\lambda}}.$$

Очевидно, что  $d_B(\mathbf{v}, \mathbf{v}') < \infty$  для любой пары кодовых слов  $(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ . Можно полагать, что при

слабом шуме в первом приближении в качестве подходящего критерия качества внутреннего кода  $V$  (в сочетании, конечно, с префиксом и постфиксом) можно рассматривать минимальное расстояние Бхаттачария  $d_B$ , определяемое как  $d_B = \min_{\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V} d_B(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ .

Декодирование внешнего кода  $C$ , как отмечалось выше, выполняется алгебраическим декодером, позволяющим исправить ошибки кратностью до половины минимального расстояния. Будем полагать, что глубина перемежения при передаче последовательности подблоков  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  имеет порядок, примерно равный величине  $1/(f_d T)$ . При такой глубине перемежения практически исключается пакетирование ошибок на входе декодера внешнего кода  $C$ , поэтому вероятность ошибки декодирования на бит на выходе внешнего декодера оценивается стандартным выражением

$$P_b^{(out)} \leq \sum_{i=t+1}^n \frac{i+t}{n} C_n^i (P_b^{(in)})^i (1 - P_b^{(in)})^{n-i}, \quad (16)$$

где  $n$  есть длина внешнего кода  $C$ ;  $t$  – максимальное число ошибок, исправляемых кодом  $C$ .

### Примеры конструкций и численные результаты

Выбор внутренних кодов для рассматриваемого сценария передачи в существенной степени определяется следующими двумя факторами. Во-первых, величиной нормализованного (относительно тактовой частоты  $1/T$ ) максимального доплеровского рассеяния в канале  $f_d$ , определяющей значение коэффициента корреляции  $\rho$  и, следовательно, глубину памяти в модели канала (3). В типичных беспроводных каналах сантиметрового и миллиметрового диапазонов максимальное доплеровское рассеяние  $f_d$  может принимать значения от нескольких герц до нескольких килогерц в зависимости от несущей частоты и скорости движения пользователей, а занимаемая полоса частот в узкополосных системах с одностотной передачей варьируется от сотни килогерц до нескольких мегагерц. Поэтому величина нормализованного максимального доплеровского рассеяния в канале  $f_d T$  может находиться в пределах от  $\sim 10^{-5}$  до  $\sim 10^{-1}$ . Это означает наличие весьма сильной памяти в канале, т. е. параметр  $\rho$  в (6), характеризующий силу памяти, может принимать значения в интервале от  $\sim 0,9$  до величины, очень близкой к 1.

Второй фактор – наличие многолучевости в канале. Влияние этого фактора на выбор кода характеризуется тем, что для любых слов  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$  внутреннего кода матрицы  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$  и  $\mathbf{K}_{\mathbf{v}'}$ , определяющие

щие попарную вероятность  $P(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}')$ , представляют собой линейные комбинации, состоящие из  $L$  матричных слагаемых. Поэтому для обеспечения «хорошего» различия матриц  $\mathbf{K}_V$  и  $\mathbf{K}_{V'}$ , следует обеспечить «хорошее» попарное различие всех соответствующих слагаемых в этих линейных комбинациях (например, посредством увеличения длины префикса  $s$ ).

Очевидно, что с учетом указанных факторов: 1) подходящие внутренние коды должны быть весьма короткими; 2) традиционные подходы к выбору кодов над кольцом  $Z_q$  целых чисел по

модулю  $q$ , основанные на рассмотрении метрик Хэмминга и Ли либо евклидовой метрики, для рассматриваемого сценария передачи не являются рациональными. Одним из возможных подходов в такой ситуации (с учетом того, что декодирование внутреннего кода выполняется перебором по всем  $2^K$  словам) является эвристический поиск подходящих, в смысле минимального расстояния Бхаттачария  $d_B$ , коротких кодов посредством направленного перебора. В табл. 1 и 2 приведены примеры коротких внутренних кодов для однолучевого и двухлучевого

■ **Таблица 1.** Параметры внутреннего кода для однолучевого канала

■ **Table 1.** Inner code parameters for one-path channel

Код	$q$	$K$	Префикс $a_1$	Код $V$		Постфикс $z_1$	Скорость $R_{in}$	Минимальное расстояние $d_B$ при	
				Порождающая матрица кода $V_0 \subseteq V$	Образующие смежных классов			$\rho = 0,9$	$\rho = 0,9999$
#1.1	2	1	0	(1)	–	–	1/2	1,7	8,5
#1.2	2	2	–	$\begin{pmatrix} 011 \\ 110 \end{pmatrix}$	–	–	2/3	1,7	8,5
#1.3	2	3	–	$\begin{pmatrix} 0111 \\ 0011 \\ 1011 \end{pmatrix}$	–	–	3/4	1,7	8,5
#1.4	4	2	0	(1)	–	–	1,0	1,1	7,8
#1.5	4	4	–	(012)	(101) (203) (300)	–	4/3	1,1	7,8
#1.6	8	3	–	(1)	–	–	1,5	0,5	6,6

■ **Таблица 2.** Параметры внутреннего кода для двухлучевого канала с равными интенсивностями лучей

■ **Table 2.** Inner code parameters for two-path channel with the equal path intensities

Код	$q$	$K$	Префикс $a_1 a_2$	Код $V$		Постфикс $z_1$	Скорость $R_{in}$	Минимальное расстояние $d_B$ при	
				Порождающая матрица кода $V_0 \subseteq V$	Образующие смежных классов			$\rho = 0,9$	$\rho = 0,9999$
#2.1	2	1	0 1	(1)	–	0	1/4	2,2	15,3
#2.2	2	2	0 1	$\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$	–	0	2/5	2,3	15,3
#2.3	2	3	0 1	$\begin{pmatrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{pmatrix}$	–	0	1/2	2,7	16,0
#2.4	4	2	0 2	(1)	–	0	1/2	2,1	14,6
#2.5	4	4	0 2	(01)	(1 0) (2 0) (3 0)	0	4/5	2,1	14,6
#2.6	8	3	0 4	(1)	–	0	3/4	2,0	13,4

каналов. Каждый внутренний код  $V$  в таблицах является либо линейным кодом над кольцом  $Z_q$ , либо объединением нескольких смежных классов линейного подкода  $V_0 \subset V$ , включая сам подкод  $V_0$ . Значения минимального расстояния Бхаттачария  $d_B$  приведены в таблицах для двух значений параметра  $\rho$  (0,9 и 0,9999) для иллюстрации существенного влияния значения этого параметра на величину  $d_B$ .

В качестве внешних кодов при рассмотрении примеров конкретных конструкций были выбраны коды Боуза – Чоудхури – Хоквингема (коды БЧХ), которые являются одним из основных кандидатов для внешней ступени кодирования (при умеренной длине внешнего кода) благодаря приемлемой сложности реализации и хорошим обменным соотношениям между скоростью и числом исправляемых ошибок [33, 34]. Во многих случаях при умеренных длинах коды БЧХ оказываются лучшими линейными кодами; кроме того, для кодов БЧХ несложным образом могут быть получены весьма точные оценки помехоустойчивости. Для четырех значений требуемой скорости в однолучевом канале (0,25, 0,5, 0,75 и 1,0 бит/символ) и для двух значений требуемой скорости в двухлучевом канале (0,25 и 0,5 бит/символ) были сформированы соответствующие наборы вариантов конструкций с внутренними кодами, приведенными в табл. 1 и 2, и внешними кодами БЧХ. Для примера в табл. 3 приведены рассмотренные наборы вариантов при требуемой скорости  $R = 0,5$  бит/символ.

Анализ помехоустойчивости рассмотренных вариантов кодов-произведений показал следующее. Для однолучевого канала при требуемых скоростях  $R = 0,25$  бит/символ и  $R = 0,5$  бит/символ наименьшая вероятность ошибки достигается при использовании внутреннего кода #1.4; при требуемых скоростях  $R = 0,75$  бит/символ и  $R = 1,0$  бит/символ предпочтительными оказываются варианты с внутренними кодами #1.5 и

#1.6 соответственно. Для двухлучевого канала с равными интенсивностями лучей при требуемой скорости  $R = 0,25$  бит/символ наименьшая вероятность ошибки достигается при использовании внутреннего кода #2.2; при требуемой скорости  $R = 0,5$  бит/символ предпочтительным оказывается вариант с внутренним кодом #2.5. Важно отметить, что с увеличением требуемой скорости передачи и (или) величины  $L$  более предпочтительными оказываются коды с большим значением модуля  $q$  кольца  $Z_q$ .

Графики зависимости вероятности ошибки  $P_b^{(out)}$ , вычисленной по формулам (16), (10) и (14), от отношения сигнал/шум на бит  $\gamma_b$  для лучших вариантов при различных значениях параметра  $\rho$  приведены на рис. 1 для однолучевого канала и на рис. 2 для двухлучевого канала. Кроме того, показаны оценки вероятности ошибки декодирования внутреннего кода, полученные путем имитационного моделирования.

Графики позволяют сделать следующие выводы.

1. С возрастанием величины параметра  $\rho$  (т. е. уменьшением величины нормализованного максимального доплеровского рассеяния в канале  $f_d T$ ) вероятность ошибочного декодирования  $P_b^{(out)}$  снижается; при этом значение  $\rho = 0,9999$  (что соответствует  $f_d T \approx 3 \cdot 10^{-3}$ ) можно рассматривать как пороговое, так как при возрастании  $\rho$  сверх 0,9999 вероятность ошибки снижается незначительно, тогда как при снижении  $\rho$  до величины 0,999 вероятность ошибки резко возрастает.

2. При фиксированной вероятности ошибки порядка  $10^{-5} \dots 10^{-6}$  увеличение скорости передачи с 0,25 до 0,5 бит/символ в однолучевом канале сопровождается дополнительными энергетическими затратами около 1,5 дБ; дальнейшее увеличение скорости вдвое, до 1,0 бит/символ, требует около 3 дБ. При передаче в двухлучевом канале увеличение скорости передачи с 0,25 до

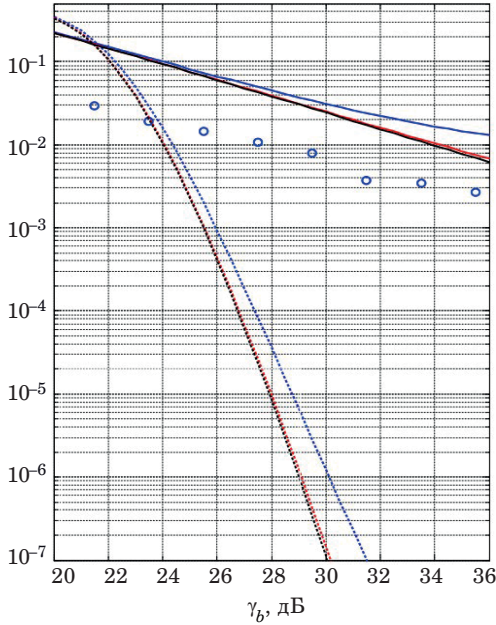
■ **Таблица 3.** Параметры вариантов конструкций при требуемой скорости  $R = 0,5$  бит/символ

■ **Table 3.** Parameters of the code construction for rate  $R = 0.5$  bit/symbol

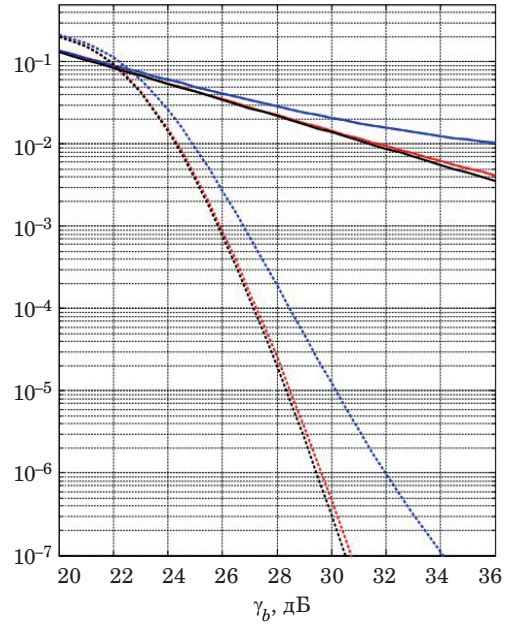
$L$	$q$	Внутренний код		Внешний код		Фактическая скорость $R$ , бит/символ
		Номер	$R_{in}$	БЧХ	$R_{out}$	
1	2	1.2	2/3	(127,92)	0,724	0,483
		1.2	2/3	(127,99)	0,780	0,520
		1.3	3/4	(127,85)	0,669	0,502
	4	1.4	1,0	(127,64)	0,504	0,504
		1.5	4/3	(127,50)	0,394	0,525
		1.6	1,5	(127,43)	0,338	0,507
2	4	2.5	4/5	(127,78)	0,614	0,491
	8	2.6	3/4	(127,85)	0,6693	0,502



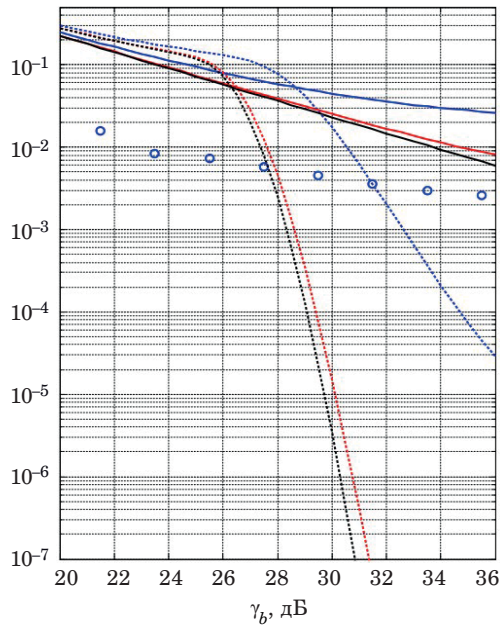
$P_b^{(out)}$ ,  $q = 4$ ; внутр. код: #1.4 (2,2);  
внешний код: (63,18);  $R = 0,286$  бит/символ;  $L = 1$



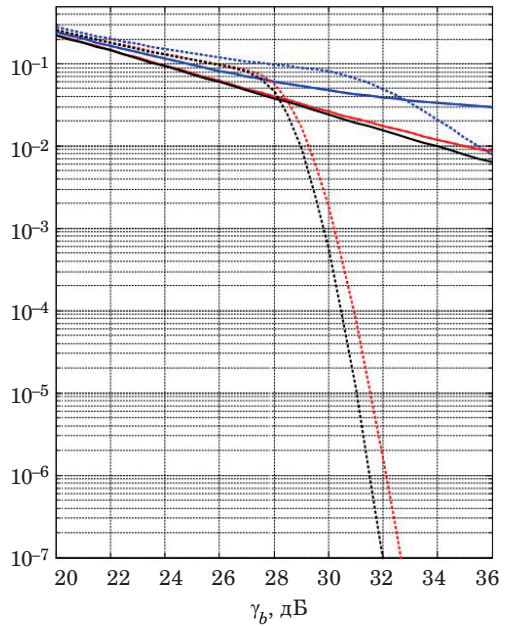
$P_b^{(out)}$ ,  $q = 4$ ; внутр. код: #1.4 (2,2);  
внешний код: (127,64);  $R = 0,504$  бит/символ;  $L = 1$



$P_b^{(out)}$ ,  $q = 4$ ; внутр. код: #1.5 (3,4);  
внешний код: (511,286);  $R = 0,746$  бит/символ;  $L = 1$



$P_b^{(out)}$ ,  $q = 8$ ; внутр. код: #1.6 (2,3);  
внешний код: (1023,678);  $R = 0,994$  бит/символ;  $L = 1$



○  $\rho = 0,999, P_b^{(in)}$ , модель    
 ---  $\rho = 0,999, P_b^{(out)}$     
 ---  $\rho = 0,9999, P_b^{(out)}$     
 ---  $\rho = 0,99999, P_b^{(out)}$   
—  $\rho = 0,999, P_b^{(in)}$     
 —  $\rho = 0,9999, P_b^{(in)}$     
 —  $\rho = 0,99999, P_b^{(in)}$

■ **Рис. 1.** Зависимости вероятности ошибки  $P_b^{(in)}$  и  $P_b^{(out)}$  от отношения сигнал/шум на бит  $\gamma_b$  для однолучевого канала

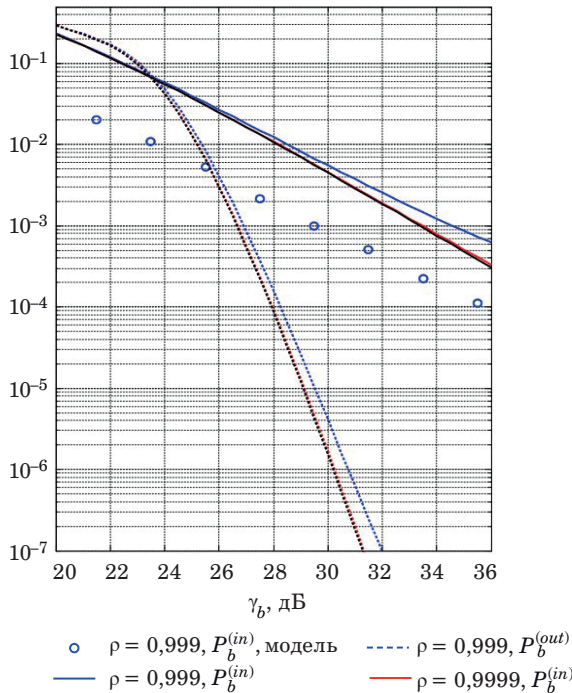
■ **Fig. 1.** Error probabilities  $P_b^{(in)}$  and  $P_b^{(out)}$  as functions of signal-to-noise ratio per bit  $\gamma_b$  for the one-path channel

0,5 бит/символ требует меньших энергетических затрат – около 0,5 дБ.

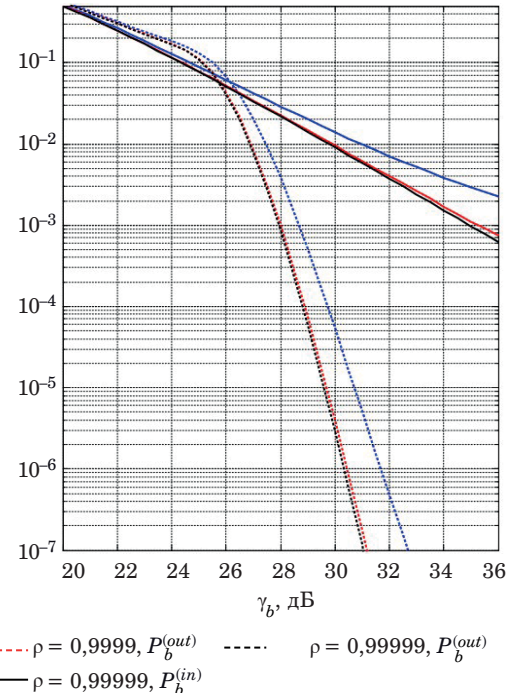
3. Представленные коды для двухлучевого канала со скоростями 0,25 и 0,5 бит/символ

обеспечивают при декодировании внутреннего кода по максимуму правдоподобия реализацию внутреннего разнесения в канале (inner diversity of the channel), что выражается появ-

$P_b^{(out)}$ ,  $q = 2$ ; внутр. код: #2.2 (4,2);  $t = 1$ ;  
внешний код: (63,39);  $R = 0,248$  бит/символ;  $L = 2$



$P_b^{(out)}$ ,  $q = 4$ ; внутр. код: #2.5 (4,4);  $t = 1$ ;  
внешний код: (127,78);  $R = 0,491$  бит/символ;  $L = 2$



■ **Рис. 2.** Зависимости вероятностей ошибки  $P_b^{(in)}$  и  $P_b^{(out)}$  от отношения сигнал/шум на бит  $\gamma_b$  для двухлучевого канала

■ **Fig. 2.** Error probabilities  $P_b^{(in)}$  and  $P_b^{(out)}$  as functions of signal-to-noise ratio per bit  $\gamma_b$  for the two-path channel

лением существенного энергетического выигрыша — порядка 5 дБ при вероятности ошибки  $10^{-5} \dots 10^{-6}$ .

### Заключение

В настоящей работе представлена и проанализирована кодовая конструкция в виде кода-произведения, предназначенного для одночастотной передачи с использованием фазовой модуляции по многолучевому каналу с коррелированными замираниями при отсутствии оценок текущих параметров канала. Внешний код кода-произведения является линейным двоичным кодом, декодирование которого выполняется алгебраическим декодером, позволяющим исправить ошибки кратностью до половины минимального расстояния. Внутренний код строится над кольцом  $Z_q$  целых чисел по модулю  $q$  и может снабжаться двумя дополнительными фиксированными последовательностями — префиксом и постфиксом. В силу отсутствия оценок текущих параметров канала для декодирования внутреннего кода применяется полуслепой вариант декодирования по максимуму правдоподобия с использованием мягких решений.

Приведено описание процедуры полуслепого декодирования по максимуму правдоподобия внутреннего кода и выполнен анализ помехоустойчивости предложенной конструкции кода-произведения.

Проведенный анализ показал, что вероятность ошибки на выходе декодера внутреннего кода в существенной степени определяется двумя факторами: характерной для рассматриваемого сценария передачи весьма сильной памятью в канале, поэтому подходящие внутренние коды должны быть весьма короткими, и наличием многолучевости. Основной характеристикой внутреннего кода, в первом приближении определяющей его помехоустойчивость, является минимальное расстояние Бхаттачария. Сравнительный анализ предложенных конкретных конструкций с короткими внутренними кодами показал, что: а) с увеличением требуемой скорости передачи и (или) числа лучей более предпочтительными оказываются коды с большим значением модуля  $q$  кольца  $Z_q$ ; б) можно указать пороговые величины нормализованного максимального доплеровского рассеяния в канале  $f_d T$ , при превышении которых вероятность ошибки начинает резко возрастать; в) представленные коды для двухлучевого канала

позволяют реализовать внутреннее разнесение, присущее многолучевому каналу. Отметим, что стандартный подход к реализации внутреннего разнесения базируется на использовании широкополосных сигналов для разделения лучей.

Одним из основных инструментов при выполнении анализа помехоустойчивости предложенной конструкции кода-произведения было использование границы Чернова, что позволило получить верхнюю границу вероятности ошибок

ки в замкнутой форме. Вместе с тем, учитывая, что точность границы Чернова и (или) ее модификаций во многих ситуациях оказывается невысокой, представляется важным получение для рассматриваемого сценария передачи точных значений попарной вероятности ошибки, вычисляемых с применением подхода, развитого в работах [35, 36], на основе аппарата характеристических функций логарифма отношения правдоподобия.

## Литература

1. **Molisch A. F.** *Wireless Communications: From Fundamentals to Beyond 5G*. 3rd Edition. Wiley-IEEE Press, 2022. 1008 p.
2. **Durisi G., Koch T., Popovski P.** Towards massive, ultra-reliable, and low-latency wireless communications with short packets. *Proc. IEEE*, 2016, vol. 104, no. 9, pp. 1711–1726.
3. **Dahlman E., Parkvall S., Skold J.** *5G NR: The Next Generation Wireless Access Technology*. London, UK, Academic, 2020. 466 p.
4. **Goldsmith A. J.** *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2012. 644 p.
5. **Rappaport T. S.** *Wireless Communications: Principles and Practice*. 2nd Edition. Cambridge, Cambridge University Press, 2024. 732 p.
6. **Gopalam S., Pillai S. B., Whiting P., Inaltekin H., Collings I. B., Hanly S. V.** A new micro-subcarrier OFDM-based waveform for delay Doppler domain communication. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 57879–57894. doi:10.1109/ACCESS.2024.3390682
7. **Kumari N., Kaur S.** A survey on various PAPR reduction techniques in OFDM communication systems. *Int. Res. J. Eng. Technol.*, 2015, no. 2, pp. 24–28.
8. **Rappaport T. S., MacCartney G. R., Samimi M. K., Sun S.** Wideband millimeter-wave propagation measurements and channel models for future wireless communication system design. *IEEE Trans. Commun.*, 2015, vol. 63, no. 9, pp. 3029–3056.
9. **Zeng Y., Zhang R., Lim T. J.** Wireless communications with unmanned aerial vehicles: opportunities and challenges. *IEEE Commun. Mag.*, 2016, vol. 54, no. 5, pp. 36–42.
10. **Wang T., Proakis J. G., Masry E., Zeidler J. R.** Performance degradation of OFDM systems due to Doppler spreading. *IEEE Trans. on Wireless Commun.*, 2006, vol. 5, no. 6, pp. 1422–1432.
11. **Eliseev S. N., Filimonova L. N.** On the estimation of the ICI in OFDM in conditions of multipath Doppler spreading and carrier frequencies offset. *2022 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of On-Board Communications*, Moscow, 2022, pp. 1–4. doi:10.1109/IEEECONF53456.2022.9744325
12. **Arslan H.** *Wireless Communication Signals: A Laboratory-based Approach*. Wiley, 2021. 464 p.
13. **Wang X., Brink S. T.** SINR analysis of different OFDM-inspired waveforms over doubly dispersive channels. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2020, vol. 69, no. 9, pp. 9459–9468. doi:10.1109/TVT.2020.3004570
14. **Medina-Acosta G. A., Zhang L., Chen J., Uesaka K., Wang Y., Lundqvist O., Bergman J.** 3GPP Release-17 physical layer enhancements for LTE-M and NB-IoT. *IEEE Communications Standards Magazine*, 2022, vol. 6, iss. 4, pp. 80–86. doi:10.1109/MCOM-STD.0001.2100099
15. **Mahjoubi A. E., Mazri T., Hmina N.** NB-IoT and eMTC: Engineering results towards 5G/IoT mobile technologies. *2018 Intern. Symp. on Advanced Electrical and Communication Technologies (ISAECT)*, Rabat, Morocco, 2018, pp. 1–7. doi:10.1109/ISAECT.2018.8618818
16. **Vikalo H., Hassibi B., Kailath T.** Optimal training for frequency-selective fading channels. *IEEE Intern. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proc. (Cat. No. 01CH37221)*, Salt Lake City, UT, USA, 2001, vol. 4, pp. 2105–2108. doi:10.1109/ICASSP.2001.940408
17. **Chiu L.-K., Wu S.-H.** An effective approach to evaluate the training and modeling efficacy in MIMO time-varying fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2015, vol. 63, no. 1, pp. 140–155.
18. **Nabavi P., Yuksel M.** Blind detection of digital signals in MIMO communication. *2022 IEEE Wireless Communications and Networking Conf. (WCNC)*, Austin, TX, USA, 2022, pp. 2196–2201. doi:10.1109/WCNC51071.2022.9771848
19. **Walk P., Jung P., Hassibi B.** MOCZ for blind short-packet communication: Basic principles. *IEEE Transactions on Wireless*, 2019, vol. 18, no. 11, pp. 5080–5097. doi:10.1109/TWC.2019.2932668
20. **Giannakis G. B., Hua Y., Stoica P., Tong L.** Eds. *Signal Processing Advances in Wireless & Mobile Communications: Trends in Single and Multi-User Systems*. Prentice-Hall, New York, NY, USA, 2001. 448 p.
21. **Naraghi-Pour M., Rashid M., Vargas-Rosales C.** Semi-blind channel estimation and data detection for multi-cell massive MIMO systems on time-varying channels. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 161709–161722. doi:10.1109/ACCESS.2021.3132263

22. Wenjing Y., Yuan X. Semi-blind channel-and-signal estimation for uplink massive MIMO with channel sparsity. *IEEE Access*, 2021, vol. 7, pp. 95008–95020.
23. Yavasoglu O., Akcam N., Okan T. Performance analysis of concatenated BCH and convolutional coded OFDM system. *International Journal of Electronics*, 2020, vol. 107, no. 10, pp. 1574–1587. doi:10.1080/00207217.2020.1727029
24. Sadkhan S. B. Performance evaluation of concatenated codes applied in wireless channels. *2019 1st AL-Noor Intern. Conf. for Science and Technology (NICST)*, Sulimanyiah, 2019, pp. 89–93. doi:10.1109/NICST49484.2019.9043836
25. Chen J., Chen H., Li Z. A double serial concatenated code using CRC-aided error correction for highly reliable communication. *Computer Networks*, 2022, vol. 216, iss. C, Article 109260. https://doi.org/10.1016/j.comnet.2022.109260
26. Liu B., Li Y., Rong B., Gui L., Wu Y. LDPC-RS product codes for digital terrestrial broadcasting transmission system. *IEEE Trans. Broadcasting*, 2014, vol. 60, no. 1, pp. 38–49. doi:10.1109/TBC.2013.2291359.60
27. Dong P., Xiang X., Liang Y., Wang P. A block-based concatenated LDPC-RS code for UAV-to-ground SC-FDE communication systems. *Electronics*, 2023, vol. 12, no. 14, 3143. https://doi.org/10.3390/electronics12143143
28. Mukhtar H., Al-Dweik A., Shami A. Turbo product codes: Applications, challenges, and future directions. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 3052–3069. doi:10.1109/COMST.2016.2587863
29. Li Z., Miao M., Wang Z. Parallel coding scheme with turbo product code for mobile multimedia transmission in MIMO-FBMC system. *IEEE Access*, 2019, vol. 8, pp. 3772–3780. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2958482
30. Ferrand P., Amara M., Valentin S., Guillaud M. Trends and challenges in wireless channel modeling for evolving radio access. *IEEE Communications Magazine*, 2016, vol. 54, no. 7, pp. 93–99.
31. Liu H., Chen H. Simulation model of wireless channel. *Applied Mathematics*, 2015, vol. 6, no. 8, pp. 1318–1331. doi:10.4236/am.2015.68125
32. Baddour K., Beaulieu N. Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2005, vol. 4, no. 4, pp. 1650–1662.
33. Hussain G. A., Audah L. Downlink LTE system performance improvement by using BCH codes over LTE-MIMO channel. *International Journal of Integrated Engineering*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 95–101.
34. Freudenberger J., Nicolas Bailon D., Safieh M. Reduced complexity hard- and soft-input BCH decoding with applications in concatenated codes. *IET Circ. Devices Syst.*, 2021, vol. 15, no. 3, pp. 284–296.
35. Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Вычисление аддитивной границы вероятности ошибки декодирования с использованием характеристических функций. *Информационно-управляющие системы*, 2021, № 4, с. 71–85. doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85
36. Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Улучшенная граница вероятности ошибки при оптимальном приеме в канале с межсимвольной интерференцией. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 5, с. 33–42. doi:10.31799/1684-8853-2023-5-33-42, EDN: MDHOXU

UDC 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2024-5-68-80

EDN: ONWDIC

### Product codes with semi-blind decoding for single carrier transmission over multipath fading channel

F. A. Taubin<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-8781-9531, ftaubin@yahoo.comA. N. Trofimov<sup>a</sup>, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0003-1233-5222<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** Design of codes for single-carrier transmission based on product codes with relatively simple internal codes that provide an acceptable error probability in a multipath fading channel with no channel parameter estimates in the receiver is of considerable interest for developing spectrally efficient methods for reliable transmission in channels with random, rapidly changing parameters. **Purpose:** To develop product codes with semi-blind decoding for single-carrier transmission in a multipath fading channel and analyze their performance. **Results:** We propose a formal description of single-carrier transmission with PSK modulation in a multipath fading channel, as well as a product code exploiting a semi-blind procedure for decoding the inner code. We describe semi-blind maximum likelihood soft-decision decoding of the inner code, carry out the performance analysis of the proposed design and present examples of specific designs of product codes for one- and two-path channels, various transmission rates and the values for the channel parameters. We demonstrate that the proposed codes with semi-blind decoding ensure the implementation of the internal diversity inherent in a multipath channel, which is expressed in significant energy gain. **Practical relevance:** The proposed design of a product code with semi-blind decoding efficiently integrates the error-correcting coding with the channel parameter estimation and has moderate complexity, which is of practical interest for the transmission in channels with random, rapidly changing parameters. The flexibility of the design makes it possible to adapt it to the transmission rate, number of paths, and maximum Doppler spread. The performance analysis provides a wide range of possible trade-offs between transmission rate, error probability, implementation complexity, and channel parameter values, which can help to rationally select key system parameters.

**Keywords** – fading multipath channel, Doppler spread scattering, single carrier transmission, product codes, semi-blind detection, union bound on error probability, Chernoff bound, Bhattacharyya distance.

**For citation:** Taubin F. A., Trofimov A. N. Product codes with semi-blind decoding for single carrier transmission over multipath fading channel. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 5, pp. 68–80 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-5-68-80, EDN: ONWDIC

## References

- Molisch A. F. *Wireless Communications: From Fundamentals to Beyond 5G*. 3rd Edition. Wiley–IEEE Press, 2022. 1008 p.
- Durisi G., Koch T., Popovski P. Towards massive, ultra-reliable, and low-latency wireless communications with short packets. *Proc. IEEE*, 2016, vol. 104, no. 9, pp. 1711–1726.
- Dahlman E., Parkvall S., Skold J. *5G NR: The Next Generation Wireless Access Technology*. London, UK, Academic, 2020. 466 p.
- Goldsmith A. J. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2012. 644 p.
- Rappaport T. S. *Wireless Communications: Principles and Practice*. 2nd Edition. Cambridge, Cambridge University Press, 2024. 732 p.
- Gopalam S., Pillai S. B., Whiting P., Inaltekin H., Collings I. B., Hanly S. V. A new micro-subcarrier OFDM-based waveform for delay Doppler domain communication. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 57879–57894. doi:10.1109/ACCESS.2024.3390682
- Kumari N., Kaur S. A survey on various PAPR reduction techniques in OFDM communication systems. *Int. Res. J. Eng. Technol.*, 2015, no. 2, pp. 24–28.
- Rappaport T. S., MacCartney G. R., Samimi M. K., Sun S. Wideband millimeter-wave propagation measurements and channel models for future wireless communication system design. *IEEE Trans. Commun.*, 2015, vol. 63, no. 9, pp. 3029–3056.
- Zeng Y., Zhang R., Lim T. J. Wireless communications with unmanned aerial vehicles: opportunities and challenges. *IEEE Commun. Mag.*, 2016, vol. 54, no. 5, pp. 36–42.
- Wang T., Proakis J. G., Masry E., Zeidler J. R. Performance degradation of OFDM systems due to Doppler spreading. *IEEE Trans. on Wireless Commun.*, 2006, vol. 5, no. 6, pp. 1422–1432.
- Eliseev S. N., Filimonova L. N. On the estimation of the ICI in OFDM in conditions of multipath Doppler spreading and carrier frequencies offset. *2022 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of On-Board Communications*, Moscow, 2022, pp. 1–4. doi:10.1109/IEEECONF53456.2022.9744325
- Arslian H. *Wireless Communication Signals: A Laboratory-based Approach*. Wiley, 2021. 464 p.
- Wang X., Brink S. T. SINR analysis of different OFDM-inspired waveforms over doubly dispersive channels. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2020, vol. 69, no. 9, pp. 9459–9468. doi:10.1109/TVT.2020.3004570
- Medina-Acosta G. A., Zhang L., Chen J., Uesaka K., Wang Y., Lundqvist O., Bergman J. 3GPP Release-17 physical layer enhancements for LTE-M and NB-IoT. *IEEE Communications Standards Magazine*, 2022, vol. 6, iss. 4, pp. 80–86. doi:10.1109/MCOMSTD.0001.2100099
- Mahjoubi A. E., Mazri T., Hmina N. NB-IoT and eMTC: Engineering results towards 5G/IoT mobile technologies. *2018 Intern. Symp. on Advanced Electrical and Communication Technologies (ISAECT)*, Rabat, Morocco, 2018, pp. 1–7. doi:10.1109/ISAECT.2018.8618818
- Vikalo H., Hassibi B., Kailath T. Optimal training for frequency-selective fading channels. *IEEE Intern. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proc. (Cat. No. 01CH37221)*, Salt Lake City, UT, USA, 2001, vol. 4, pp. 2105–2108. doi:10.1109/ICASSP.2001.940408
- Chiu L.-K., Wu S.-H. An effective approach to evaluate the training and modeling efficacy in MIMO time-varying fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2015, vol. 63, no. 1, pp. 140–155.
- Nabavi P., Yuksel M. Blind detection of digital signals in MIMO communication. *2022 IEEE Wireless Communications and Networking Conf. (WCNC)*, Austin, TX, USA, 2022, pp. 2196–2201. doi:10.1109/WCNC51071.2022.9771848
- Walk P., Jung P., Hassibi B. MOCZ for blind short-packet communication: Basic principles. *IEEE Transactions on Wireless*, 2019, vol. 18, no. 11, pp. 5080–5097. doi:10.1109/TWC.2019.2932668
- Giannakis G. B., Hua Y., Stoica P., Tong L. Eds. *Signal Processing Advances in Wireless & Mobile Communications: Trends in Single and Multi-User Systems*. Prentice-Hall, New York, NY, USA, 2001. 448 p.
- Naraghi-Pour M., Rashid M., Vargas-Rosales C. Semi-blind channel estimation and data detection for multi-cell massive MIMO systems on time-varying channels. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 161709–161722. doi:10.1109/ACCESS.2021.3132263
- Wenjing Y., Yuan X. Semi-blind channel-and-signal estimation for uplink massive MIMO with channel sparsity. *IEEE Access*, 2021, vol. 7, pp. 95008–95020.
- Yavasoglu O., Akcam N., Okan T. Performance analysis of concatenated BCH and convolutional coded OFDM system. *International Journal of Electronics*, 2020, vol. 107, no. 10, pp. 1574–1587. doi:10.1080/00207217.2020.1727029
- Sadkhan S. B. Performance evaluation of concatenated codes applied in wireless channels. *2019 1st AL-Noor Intern. Conf. for Science and Technology (NICST)*, Sulimanyiah, 2019, pp. 89–93. doi:10.1109/NICST49484.2019.9043836
- Chen J., Chen H., Li Z. A double serial concatenated code using CRC-aided error correction for highly reliable communication. *Computer Networks*, 2022, vol. 216, iss. C, Article 109260. https://doi.org/10.1016/j.comnet.2022.109260
- Liu B., Li Y., Rong B., Gui L., Wu Y. LDPC-RS product codes for digital terrestrial broadcasting transmission system. *IEEE Trans. Broadcasting*, 2014, vol. 60, no. 1, pp. 38–49. doi:10.1109/TBC.2013.2291359.60
- Dong P., Xiang X., Liang Y., Wang P. A block-based concatenated LDPC-RS code for UAV-to-ground SC-FDE communication systems. *Electronics*, 2023, vol. 12, no. 14, 3143. https://doi.org/10.3390/electronics12143143
- Mukhtar H., Al-Dweik A., Shami A. Turbo product codes: Applications, challenges, and future directions. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 3052–3069. doi:10.1109/COMST.2016.2587863
- Li Z., Miao M., Wang Z. Parallel coding scheme with turbo product code for mobile multimedia transmission in MIMO-FBMC system. *IEEE Access*, 2019, vol. 8, pp. 3772–3780. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2958482
- Ferrand P., Amara M., Valentin S., Guillaud M. Trends and challenges in wireless channel modeling for evolving radio access. *IEEE Communications Magazine*, 2016, vol. 54, no. 7, pp. 93–99.
- Liu H., Chen H. Simulation model of wireless channel. *Applied Mathematics*, 2015, vol. 6, no. 8, pp. 1318–1331. doi:10.4236/am.2015.68125
- Baddour K., Beaulieu N. Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2005, vol. 4, no. 4, pp. 1650–1662.
- Hussain G. A., Audah L. Downlink LTE system performance improvement by using BCH codes over LTE-MIMO channel. *International Journal of Integrated Engineering*, 2018, vol. 10, no. 4, pp. 95–101.
- Freudenberger J., Nicolas Bailon D., Safieh M. Reduced complexity hard- and soft-input BCH decoding with applications in concatenated codes. *IET Circ. Devices Syst.*, 2021, vol. 15, no. 3, pp. 284–296.
- Trofimov A. N., Taubin F. A. Evaluation of the union bound for the decoding error probability using characteristic functions. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 4, pp. 71–85 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85
- Trofimov A. N., Taubin F. A. Improved bound on optimal reception error probability for an intersymbol interference channel. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 5, pp. 33–42 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-5-33-42, EDN: MDH-OXUA