



Оценка эффективности использования марковской метрики при декодировании в каналах с памятью

А. М. Вересова^а, аспирант, orcid.org/0000-0002-3792-9249, a.veresova@guap.ru

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: современные методы помехоустойчивого кодирования вплотную приблизились к теоретическим пределам, установленным шенноновскими теоремами кодирования. Тем не менее эти пределы могут быть увеличены при учете особенностей конфигурации ошибок в канале. Таким образом, актуальной является задача исследования методов передачи информации по каналам с памятью. **Цель:** провести анализ условий согласованности марковской метрики с простым марковским каналом, исследовать возможность ее применимости в более общих марковских моделях. **Результаты:** проведен анализ параметров марковского канала и длин кодирования, при которых марковская метрика является согласованной. Показано, что для большого набора параметров, представляющих практический интерес, диапазон согласованности мал или отсутствует. Предложена модификация алгоритма Витерби для использования марковской метрики. Проведены эксперименты по оценке вероятности ошибки декодирования по минимуму расстояния для блоковых кодов малой длины (несколько десятков бит) и сверточных кодов умеренной длины (несколько сотен бит). Результаты показывают, что марковская метрика позволяет значительно снизить вероятность ошибки декодирования в марковском канале даже при ее несогласованности. Однако при переходе от марковского канала к более общим моделям (канал Гилберта) выигрыш достаточно быстро исчезает. **Практическая значимость:** разработанный декодер Витерби с марковской метрикой может позволить достигать вероятности ошибки вплоть до 10^{-2} – 10^{-4} в марковском канале, где декодирование в метрике Хэмминга практически бесполезно. **Обсуждение:** полученные результаты показывают, что требование согласованности метрики не является обязательным для достижения малых вероятностей ошибки. Таким образом, возникает задача разработки правила декодирования для каналов, в которых шум описывается скрытой марковской моделью.

Ключевые слова – каналы с памятью, метрики, декодирование по максимуму правдоподобия, декодирование Витерби, канал с конечным числом состояний.

Для цитирования: Вересова А. М. Оценка эффективности использования марковской метрики при декодировании в каналах с памятью. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 1, с. 29–41. doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41, EDN: JQIBMZ

For citation: Veresova A. M. Performance evaluation of decoding in channels with memory with the use of a Markov metric. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 29–41 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41, EDN: JQIBMZ

Введение

В современных системах обработки, передачи, хранения информации одной из важнейших задач является задача обеспечения целостности информации, т. е. ее устойчивости к воздействию шумовых воздействий, рассматриваемых, как правило, как случайный процесс. Одним из основных инструментов обеспечения целостности является внесение информационной избыточности с использованием математических методов теории помехоустойчивого кодирования [1, 2]. Однако на сегодня практические характеристики современных кодов, исправляющих ошибки (турбокодов, низкоплотностных кодов, полярных кодов), вплотную приблизились к теоретически достижимым, в частности к пропускной способности канала, введенной К. Шенноном в середине XX в.

Тем не менее дальнейшее улучшение таких характеристик систем связи, как скорость передачи информации, вероятность доставки или

вероятность ошибки декодирования, возможно, если учитывать особенности ошибок, происходящих в канале связи. Так, известно, что пропускная способность каналов с памятью, в которых шумовой процесс не является независимым (а это соответствует большинству реальных каналов связи), выше, чем в каналах без памяти, на которые и ориентированы практически используемые сегодня кодовые конструкции. Это противоречие разрешается применением процедуры декорреляции канала, однако такой подход не позволяет реализовать предельно достижимые характеристики каналов с памятью. Для решения этой задачи необходима разработка как методов построения кодов, так и алгоритмов декодирования для каналов с памятью, однако данная область на сегодня исследована недостаточно.

В 60–90-е годы XX в. результаты в области каналов с памятью излагались в трудах Э. Гилберта и Э. Эллиотта, Р. Галлагера, монографиях Э. Л. Блоха, О. В. Попова, В. Я. Турина, книгах Л. М. Финка, В. И. Коржика, Л. П. Пуртова и др.

В последние годы изучалось применение современных методов кодирования в каналах с памятью. В работах [3–7] рассматривается применение низкоплотностных кодов в каналах с памятью. В [8–10] исследуются вопросы передачи по таким каналам с помощью полярных кодов. Необходимо отметить, что в этих статьях в основном затрагиваются либо очень узкие специфические случаи конкретных, достаточно специфических систем передачи, либо адаптация существующих кодовых конструкций, предполагающая дальнейшее использование стандартных методов декодирования. В работах [11–13] исследуется задача исправления пакетов ошибок, образование которых характерно для каналов с памятью.

Одним из инструментов, который может быть использован для учета особенностей канала связи как при построении кодов, так и при декодировании, является метрическое описание канала, т. е. введение функции расстояния, с одной стороны, учитывающей вероятностные характеристики шумового процесса в используемой математической модели канала, а с другой — позволяющей сформулировать критерий декодирования как оптимизационную задачу в рамках заданной метрики. Вопросам метрического описания каналов и связанных с этим методов кодирования посвящены, например, работы [14–19].

В данной статье рассматривается метрика, введенная в монографии [14] для марковских каналов, где было доказано, что метрика согласована с марковским каналом для некоторых длин кодов. Однако до сих пор не проведен более детальный анализ связи согласованности с параметрами канала и неисследованными остаются обеспечиваемые при использовании данной метрики вероятности ошибки, в том числе в случаях, когда согласованность не обеспечивается. В [19] рассматривалось применение данной метрики в каналах с двумя состояниями, но только для достаточно частного случая, когда для кода возможно построить стандартную расстановку.

Статья организована следующим образом. Описывается модель канала связи с памятью, основанная на марковской модели шума, и анализируется пропускная способность по сравнению с двоичным симметричным каналом без памяти. Описывается метрика для марковского канала, проводится анализ параметров модели канала, а также длины кода, при которых выполняется условие согласованности. Для коротких кодов проводится оценка вероятности ошибки при декодировании по минимуму расстояния в данной метрике в марковском канале. Далее предлагается модификация алгоритма Витерби для использования марковской метрики в сверточных

кодах и проводится экспериментальная оценка вероятности ошибки декодирования сверточных кодов в марковских каналах как в условиях согласованности, так и за ее пределами.

Каналы связи с конечным числом состояний

Для формулировки постановки задачи исправления ошибок необходимо задать математическую модель канала, которая описывала бы возникающие в канале связи шумовые процессы и позволяла осуществлять расчеты характеристик, например вероятности возникновения конкретных комбинаций ошибок. К. Шеннон ввел фундаментальную характеристику, называемую пропускной способностью канала, зависящую только от свойств канала, а не от методов передачи, и показывающую предельно достижимую скорость передачи информации при теоретической возможности обеспечить сколь угодно малую вероятность ошибки декодирования.

Для простейшего случая канала с двоичным входом и выходом и вероятностью искажения отдельного передаваемого бита, равной p (т. е. двоичного симметричного канала, ДСК), пропускная способность

$$C_{\text{ДСК}} = 1 - \mathcal{H}(p) = 1 + p \log p + (1 - p) \log (1 - p),$$

где $\mathcal{H}(p)$ — энтропия двоичного ансамбля. Двоичный симметричный канал, как и ряд других наиболее распространенных моделей (например, полунепрерывный канал с аддитивным белым гауссовым шумом, АБГШ), является каналом без памяти. Это означает, что если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ — вход канала, а $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ — его выход, то выполняется

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i). \quad (1)$$

В реальных системах связи шумовой процесс, как правило, обладает памятью, т. е. равенство (1) не выполняется.

Одной из наиболее распространенных моделей, отражающих эффект наличия памяти в канале, является описание шумового процесса с помощью марковского процесса, тогда канал описывается множеством состояний марковской цепи и переходными вероятностями между состояниями. Такие модели называются каналами с конечным числом состояний (ККЧС). Чаще всего рассматривается дискретный двоичный канал, где число состояний равно двум: «плохое» состояние В, в котором высока вероятность η_B возникновения ошибок, и «хорошее» G, в кото-

ром ошибки возникают с существенно меньшей вероятностью η_G . При $1 \geq \eta_B > \eta_G \geq 0$ такая модель называется каналом Гилберта – Эллиотта с вероятностями переходов из одного состояния в другое: P_{BG} и P_{GB} , $P_{BB} = 1 - P_{BG}$, $P_{GG} = 1 - P_{GB}$. Безусловные вероятности состояний равны

$$P_G = \frac{P_{BG}}{P_{GB} + P_{BG}}, P_B = \frac{P_{GB}}{P_{GB} + P_{BG}},$$

безусловная вероятность битовой ошибки в таком канале может быть выражена следующим образом:

$$p_e = \eta_B P_G + \eta_G P_B = \frac{\eta_B P_{GB} + \eta_G P_{BG}}{P_{GB} + P_{BG}}. \quad (2)$$

Такая вероятность битовой ошибки была бы в ДСК, полученном путем перемежения на бесконечной длине, поэтому будем называть величину p_e эквивалентной вероятностью ошибки и использовать как параметр, характеризующий ДСК и ККЧС и позволяющий производить их сравнение. Заметим, что для задания ККЧС, помимо значения p_e , необходимо задать одно из значений переходных вероятностей, для этого будем использовать величину P_{GG} .

Важными частными случаями канала Гилберта – Эллиотта являются упрощенные модели – модель Гилберта и простая марковская модель. В канале Гилберта $\eta_G = 0$, т. е. ошибки могут происходить только в «плохом» состоянии канала, а η_B зачастую полагается равной 0,5. В простой марковской модели в «хорошем» состоянии ошибки также отсутствуют, а вероятность ошибки в «плохом» состоянии $\eta_B = 1$, т. е. передаваемый бит всегда инвертируется, если канал находится в «плохом» состоянии. Для случая простого марковского канала обозначим состояния В и G через 1 и 0 соответственно, и эквивалентная вероятность ошибки

$$p_e = P_1 = \frac{P_{01}}{P_{10} + P_{01}}. \quad (3)$$

Пропускные способности некоторых ККЧС могут быть достаточно легко вычислены. Так, для простого марковского канала

$$C_M = 1 - P_0 \mathcal{H}(P_{00}) - P_1 \mathcal{H}(P_{10}).$$

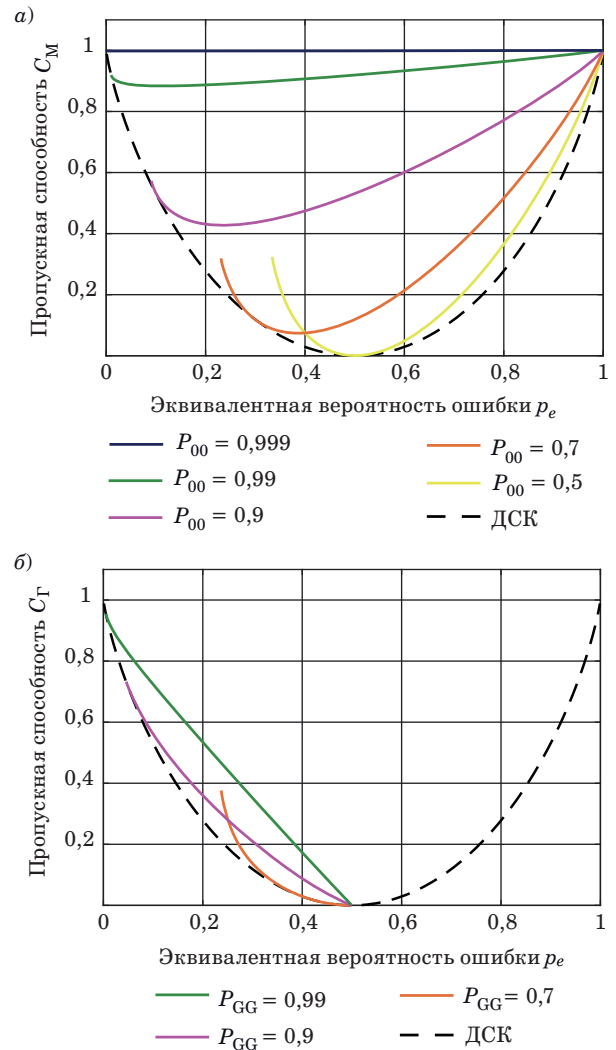
Пропускная способность канала Гилберта (состояния которого неизвестны на приемнике) может быть вычислена как

$$C_G = 1 + p_e \sum_{i=0}^{\infty} v(i) \log v(i),$$

где $v(i) = \Pr(0^i 1 | 1)$ – вероятность того, что в векторе ошибок, генерируемом каналом, после единицы и серии из i нулей снова будет получена единица. Формулы для вычисления $v(i)$ были получены самим Э. Гилбертом.

Стоит отметить, что вычисление, даже приближительное, пропускной способности канала Гилберта – Эллиотта является достаточно вычислительно нетривиальной задачей, хотя известны подходы, предлагающие для этого различные аппроксимации. Мы здесь не рассматриваем эту задачу, и в дальнейшем будем рассматривать только простую марковскую модель и канал Гилберта.

Пропускные способности $C_{ДСК}$, C_M и C_G показаны как функции от эквивалентной вероятности ошибки (рис. 1, а и б). Как можно видеть, с увеличением значений P_{00} (P_{GG}), т. е. с увели-



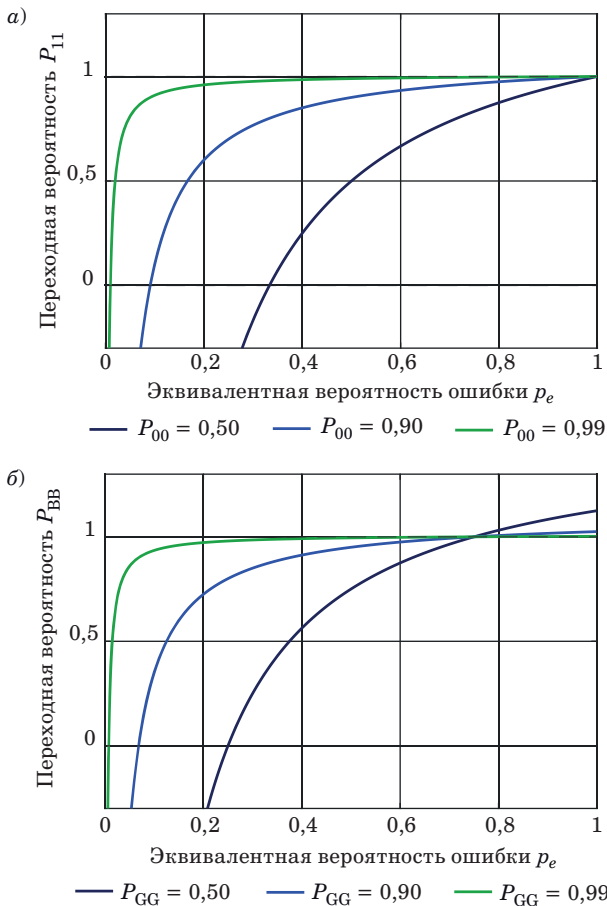
■ **Рис. 1.** Пропускная способность простого марковского канала (а) и канала Гилберта при $\eta_B = 0,5$ (б)
 ■ **Fig. 1.** Capacity of the simple Markov channel (а) and of the Gilbert channel with $\eta_B = 0,5$ (б)

чением «эффекта памяти» в канале, пропускная способность имеет тенденцию к увеличению, и во всех случаях пропускная способность ККЧС превышает или равна пропускной способности ДСК, причем равенство достигается только в двух точках касания для каждой кривой на графике.

Однако, как можно видеть из рис. 1, пропускные способности ККЧС изображены не для всех значений эквивалентной вероятности ошибки p_e . Действительно, легко показать, что при фиксированном значении P_{00} величина $P_{11} \geq 0$ только при выполнении условия

$$\frac{1 - P_{00}}{2 - P_{00}} \leq p_e \leq 1,$$

для больших значений P_{00} , которые представляют особый интерес при исследовании каналов с памятью, нижняя граница величины p_e довольно мала. Например, при $P_{00} \geq 0,9$ выполняется $p_e \geq 0,09$. Аналогично для канала Гилберта при



■ **Рис. 2.** Зависимость переходных вероятностей от эквивалентной вероятности ошибки для простого марковского канала (а) и для канала Гилберта с $\eta_B = 0,75$ (б)

■ **Fig. 2.** The dependence of transition probabilities by equivalent error probability for simple Markov channel (a) and for Gilbert channel with $\eta_B = 0.75$ (b)

фиксированном P_{GG} условие $P_{BB} \geq 0$ справедливо при

$$\frac{(1 - P_{GG})\eta_B}{2 - P_{GG}} \leq p_e \leq \eta_B.$$

Этот эффект изображен с помощью зависимости P_{11} (P_{BB}) от p_e при фиксированных P_{00} (P_{GG}) на рис. 2, а и б.

Это означает, что модели ККЧС существуют не для всего диапазона значений p_e , и это необходимо учитывать при проведении исследований.

Метрика для марковского канала

Пусть для передачи информации по каналу связи используются кодовые слова \mathbf{x} некоторого кода C и на выходе канала получена последовательность \mathbf{y} . Оптимальным с точки зрения минимизации вероятности ошибки декодирования (при предположении о равновероятности кодовых последовательностей на входе канала) является правило определения кодового слова в соответствии с критерием

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in C} p(\mathbf{y} | \mathbf{x}), \quad (4)$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ – решение декодера, а вероятность $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ при фиксированном \mathbf{y} называется функцией правдоподобия от аргумента \mathbf{x} , поэтому использование выражения (4) называется декодированием по критерию максимума правдоподобия. Фактически такое декодирование эквивалентно нахождению самого вероятного в данном канале вектора ошибок $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Другим способом определения критерия декодирования является задание функции расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между двумя векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} , которая называется метрикой при выполнении следующих условий:

1) (неотрицательность) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ и $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;

2) (симметричность) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

3) (неравенство треугольника) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ для любого вектора \mathbf{z} . Тогда критерий

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in C} d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (5)$$

называется декодированием по минимуму расстояния, и такое декодирование эквивалентно нахождению кодового слова, ближайшего к принятому слову в терминах некоторой выбранной метрики. С понятием расстояния между векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} тесно связана величина $W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = W(\mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемая весом вектора \mathbf{z} , и декодирование по минимуму расстоя-

ния может рассматриваться как нахождение вектора ошибок $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ минимального веса.

Важное отличие критерия (4) от (5) состоит в том, что функция правдоподобия определяется свойствами канала связи, в то время как метрика может выбираться разработчиком системы связи исходя из различных практических соображений. Если при этом для любых векторов \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 условие $W(\mathbf{z}_1) < W(\mathbf{z}_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда $P(\mathbf{z}_1) > P(\mathbf{z}_2)$, то метрика называется согласованной с каналом связи, и нахождение самого легкого вектора совпадает с нахождением самого вероятного, и решения, принимаемые декодерами по минимуму расстояния и максимуму правдоподобия, совпадают.

Так, для ДСК согласованной является метрика Хэмминга, однако она не согласована с ККЧС.

В [14] предложен класс метрик для каналов, описываемых простой марковской моделью. Пусть $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ – некоторый вектор, а числа $l_{00}(\mathbf{z}), l_{01}(\mathbf{z}), l_{10}(\mathbf{z}), l_{11}(\mathbf{z})$ означают количество пар соседних элементов 00, 01, 10, 11 соответственно в векторе \mathbf{z} . Зададим марковский вес вектора \mathbf{z} как

$$W_M(\mathbf{z}) = \omega_0 z_0 + \omega_{00} l_{00}(\mathbf{z}) + \omega_{10} l_{10}(\mathbf{z}) + \omega_{01} l_{01}(\mathbf{z}) + \omega_{11} l_{11}(\mathbf{z}), \quad (6)$$

тогда марковское расстояние между двумя двоичными векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} определим классически как

$$d_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = W_M(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}). \quad (7)$$

В [14] приведены условия, при которых функция, заданная (6) и (7), является метрикой, и показано, что в частном случае

$$W_M(\mathbf{z}) = z_0 + l_{10}(\mathbf{z}) + 2l_{01}(\mathbf{z}) \quad (8)$$

функция (8) является метрикой, согласованной с простым марковским каналом, если $P_{11} < P_{00}$ и длина кода N удовлетворяет неравенству

$$N < N^* = \min \left\{ \frac{\ln \frac{P_{10}}{P_{01}}}{\ln \frac{1-P_{01}}{1-P_{10}}} + 3, \frac{\ln \frac{1-P_{01}}{P_{10}}}{\ln \frac{1-P_{01}}{1-P_{10}}} + 3, \frac{\ln \frac{1-P_{10}}{P_{10}}}{\ln \frac{1-P_{01}}{1-P_{10}}} + 5 \right\}.$$

В [19] рассматривались разные подходы по выбору лидеров смежных классов при декодировании по стандартной расстановке на основе марковской метрики, однако такое декодирование и анализ обеспечиваемой вероятности ошибки возможны только для очень коротких кодов.

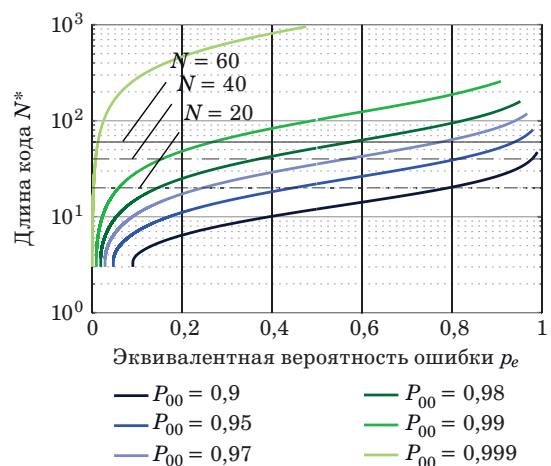
Проанализируем связь между параметрами простой марковской модели, длиной кода N^* и

согласованностью метрики. Для этого рассмотрим величину N^* в зависимости от параметров канала в терминах эквивалентной вероятности ошибки p_e . На рис. 3 показана зависимость N^* от эквивалентной вероятности ошибки p_e при фиксированных значениях P_{00} .

Отметим, что при использовании кода некоторой заданной длины N согласованность метрики выполняется при значениях p_e , для которых, с одной стороны, $N < N^*$, а с другой стороны, справедливо $P_{11} < P_{00}$. Как следует из (3), и это также можно видеть на рис. 2, а, $P_{11} < P_{00}$ справедливо тогда и только тогда, когда $p_e < 0,5$.

Рассмотрим для примера длину кода $N = 40$. Из рис. 3 можно заметить, что при $P_{00} = 0,9$ почти на всем протяжении графика (и при любых значениях $p_e \leq 0,5$) условие $N < N^*$ не выполняется, т. е. достичь согласованности метрики с простым марковским каналом при $P_{00} = 0,9$ и $N = 40$ невозможно. В таблице для выбранных длин $N = 20, N = 40$ и $N = 60$ и некоторых фиксированных значений P_{00} представлены параметры P_{11} и $p_e(N)$, при которых граница согласованности N^* достигает заданного значения N . Цветом выделены значения, при которых условие согласованности не выполняется вследствие нарушения условия $P_{11} < P_{00}$ (это происходит тогда и только тогда, когда $p_e > 0,5$). Заметим, что при $P_{00} = 0,9$ не существует простой марковской модели, при которой граница согласованности N^* достигает заданного значения $N = 60$, поэтому соответствующие ячейки таблицы содержат прочерк.

С помощью приведенной таблицы можно указать диапазон значений p_e , для которых марковская метрика согласована с указанным каналом при выбранной длине кода: если $T(P_{00}, N)$ – зна-



■ Рис. 3. Зависимость длины кода от эквивалентной вероятности ошибки в простом марковском канале

■ Fig. 3. Dependence of codelength by equivalent error probability in simple Markov channel

- Оценка согласованности марковской метрики для разных длин кодов и параметров простой марковской модели
- Estimation of Markov metric matching for selected codelengths and simple Markov model parameters

P_{00}	$N = 20$		$N = 40$		$N = 60$	
	P_{11}	$p_e(N)$	P_{11}	$p_e(N)$	P_{11}	$p_e(N)$
0,9	0,9739	0,7930	0,9979	0,9794	—	—
0,95	0,9386	0,4488	0,9886	0,8143	0,9968	0,9398
0,96	0,9256	0,3497	0,9839	0,7130	0,9948	0,8850
0,97	0,9083	0,2465	0,9771	0,5671	0,9914	0,7772
0,98	0,8836	0,1466	0,9662	0,3717	0,9853	0,5764
0,99	0,8415	0,0593	0,9458	0,1558	0,9728	0,2688
0,999	0,7167	0,0035	0,8773	0,0081	0,9265	0,0134

чение $p_e(N)$ из ячейки таблицы с соответствующими параметрами N и P_{00} , то метрика согласована для значений

$$p_e \in [T(P_{00}, N); 0,5]. \quad (9)$$

Как видно из таблицы, при увеличении длины кода интервал согласованности будет непустым только для очень больших значений P_{00} . При этом P_{11} в этом диапазоне также принимает значения, близкие к единице, т. е. память в канале становится все более выраженной, и канал стремится к постоянному пребыванию в одном состоянии с редкими переключениями, что мало соответствует реальным каналам связи.

Время (число отсчетов) t_0 и t_1 нахождения в состоянии 0 и 1 простого марковского канала соответственно является случайной величиной, распределенной по геометрическому закону. Для «хорошего» состояния при $P_{00} = 0,99$ математическое ожидание данной величины $M[t_0] = 1/P_{01} = 100$ соответствует среднему времени между пакетами ошибок (последовательностями ошибочных бит). В соответствии с таблицей для длины $N = 20$ и $P_{00} = 0,99$ метрика становится согласованной с каналом при $P_{11} \geq 0,8415$, т. е. при средней длине пакета ошибок $M[t_1] \geq 6,3$. Для $N = 60$ при том же значении $P_{00} = 0,99$ метрика согласована с каналом при $P_{11} \geq 0,9728$, что соответствует среднему времени нахождения в «плохом» состоянии $M[t_1] \geq 36,7$, т. е. средняя длина пакета ошибок больше половины длины кодового слова. Стоит отметить, что вероятность возникновения пакета длиной 36 $\Pr[t_1 = 36] = 0,01$, и большая часть пакетов будет иметь малую длину, однако передача по такому каналу все равно крайне затруднительна.

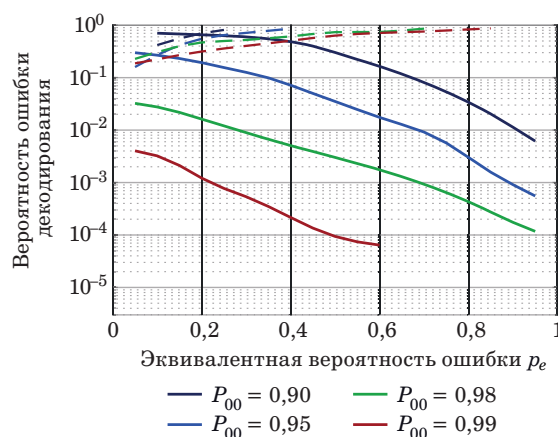
В качестве вывода из проведенного анализа можно заключить, что параметры, при которых

марковская метрика согласована с простой марковской моделью, задают достаточно ограниченный набор каналов. Однако вероятность ошибки при декодировании по минимуму расстояния может быть достаточно малой, даже если метрика не согласована, т. е. декодирование не соответствует критерию максимума правдоподобия. Вопросы экспериментальной оценки вероятности ошибки при декодировании в марковской метрике рассматриваются в следующих разделах.

Исследование вероятности ошибки декодирования по минимуму расстояния для блочного кода

Приведем результаты моделирования для каналов с памятью на примере марковского канала и канала Гилберта с использованием блочного кода при декодировании по минимуму расстояния в марковской метрике и метрике Хэмминга.

Рассмотрим передачу с использованием случайного блочного кода (40, 20) со скоростью 0,5 по марковскому каналу с фиксированным параметром P_{00} . На рис. 4 представлена зависимость вероятности ошибки декодирования от эквивалентной вероятности ошибки p_e при использовании метрики Хэмминга и марковской метрики для некоторых значений P_{00} от 0,9 до 0,99. Графики, соответствующие использованию марковской метрики, отображаются сплошной линией, метрики Хэмминга – пунктирной. Использование метрики Хэмминга в таких каналах показывает вероятность ошибки, большую 0,1 и стремящуюся к единице с ростом p_e . Можно сделать вывод, что на всем диапазоне p_e , кроме, возможно, небольшого участка, близкого к нулю, обеспечение



■ **Рис. 4.** Вероятность ошибки декодирования по минимуму расстояния в простом марковском канале для блочного кода (40, 20)

■ **Fig. 4.** Minimum distance decoding error probability of (40, 20) block code in simple Markov channel

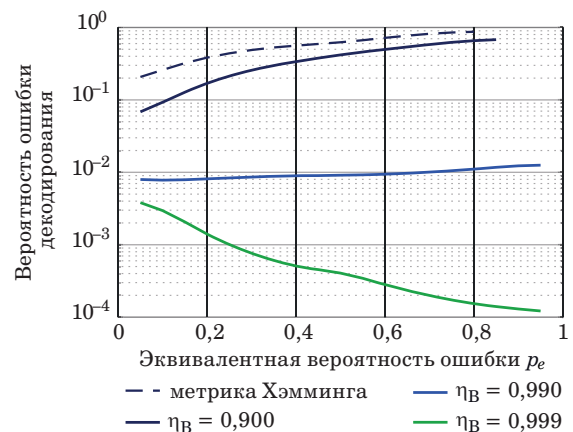
вероятностей ошибки декодирования, представляющих какой-либо практический интерес, с использованием метрики Хэмминга невозможно. В то же время декодирование с использованием марковской метрики может достигать заметно меньших вероятностей ошибки декодирования, и выигрыш тем больше, чем больше проявляется эффект памяти в канале. Напомним, что используемая марковская метрика согласована с каналом далеко не для всех значений p_e и точно не является согласованной при $p_e \geq 0,5$.

Обратим внимание на достаточно неожиданный характер поведения кривой вероятности ошибки декодирования в марковской метрике на рис. 4. Традиционно кривые вероятности ошибки декодирования стремятся к единице с увеличением параметра, характеризующего рост уровня шума (количество ошибочных бит) в канале связи. Однако парадоксальным образом чем больше вероятность битовой ошибки p_e в марковском канале, тем меньшую вероятность ошибки показывает декодирование в марковской метрике. Отчасти это можно объяснить пропускной способностью марковского канала (см. рис. 1, а). Как видно из графиков для $P_{00} \geq 0,9$, пропускная способность при значениях $p_e \geq 0,5$ превышает пропускную способность при $p_e < 0,5$, т. е. марковский канал становится «лучше» с точки зрения достижимых скоростей безошибочной передачи с ростом числа битовых ошибок. Хотя при $p_e \geq 0,5$ марковская метрика не согласована с каналом, по-видимому, этот эффект проявляется и в вероятностях ошибки декодирования. Обратим внимание, что для пропускных способностей канала Гилберта (см. рис. 1, б) указанное свойство неверно, в дальнейшем оценим вероятность ошибки декодирования в канале Гилберта.

В целом можно сделать вывод о том, что использование марковской метрики при рассмотренных параметрах марковского канала дает значительный выигрыш по сравнению с метрикой Хэмминга и позволяет понизить вероятность ошибки декодирования до значений, которые могут представлять практический интерес даже в случаях, когда марковская метрика не согласована с марковским каналом.

Вероятности ошибки декодирования по минимуму расстояния в марковской метрике в канале Гилберта с $P_{GG} = 0,99$ и различными значениями η_B представлены на рис. 5. Кривые, соответствующие использованию метрики Хэмминга, практически не отличаются для рассмотренных параметров каналов, поэтому на рисунке оставлен только один график для вероятности ошибки в метрике Хэмминга.

Декодирование показывает достаточно низкие вероятности ошибки, если вероятность η_B



■ **Рис. 5.** Вероятность ошибки декодирования блочного кода (40, 20) в канале Гилберта с разной вероятностью битовой ошибки η_B

■ **Fig. 5.** Decoding error probability of block (40, 20) code in Gilbert channel with different bit error probability η_B

близка к единице, т. е. канал близок к простой марковской модели. Однако при уменьшении η_B вероятность ошибки при использовании марковской метрики стремится к результатам, полученным для метрики Хэмминга. Обратимся снова к рис. 1, б, где изображена пропускная способность канала Гилберта для $\eta_B = 0,5$. Форма кривой для пропускной способности канала Гилберта в целом следует форме кривой для ДСК, оставаясь, тем не менее, выше. На рис. 5 мы также видим, что форма кривой вероятности ошибки в марковской метрике начинает повторять форму кривой для метрики Хэмминга.

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о том, что марковская метрика может применяться и в более общих моделях ККЧС, однако с очень ограниченным набором параметров, приближающих ККЧС к простой марковской модели.

Модификация декодера Витерби в марковской метрике

Эксперименты, связанные с оценкой декодирования по максимуму правдоподобия или по минимуму расстояния, возможны только для кодов очень небольшой длины, в то время как специфика шума в каналах с памятью особенно проявляется лишь в течение некоторого времени. Чтобы оценить применение марковской метрики на больших длинах, рассмотрим решетчатое представление кода, сверточное кодирование и алгоритм Витерби.

Решетка — структура, чаще всего используемая для описания кодирования и декодирования сверточных и связанных с ними турбокодов,

однако с помощью решетки может быть задан и блочный код.

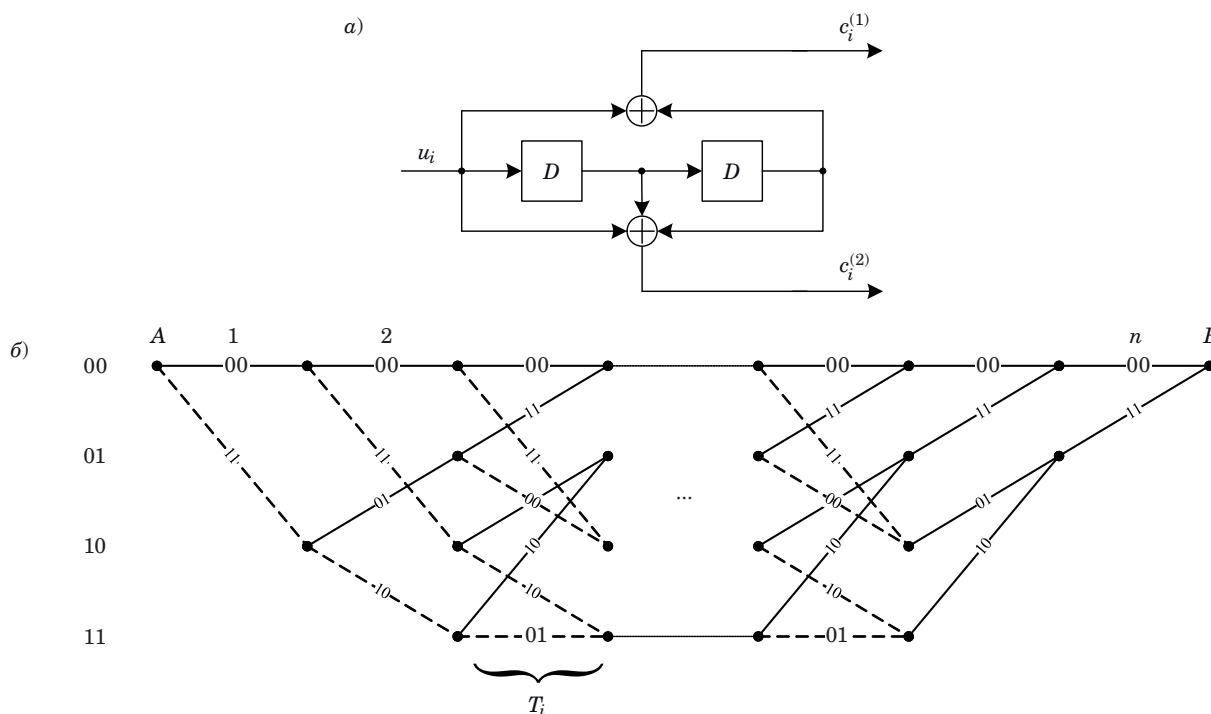
Решетку чаще всего можно представить как ориентированный граф, соединяющий две вершины, начальную A (исток) и конечную B (сток), так, что каждый путь из A в B состоит из ровно n ребер. Каждому ребру соответствует m кодовых символов, тогда последовательность символов, соответствующая некоторому пути из A в B , задает кодовое слово кода длиной $N = nm$.

Необходимо отметить, что существуют и более общие способы задания решетки, в частности с переменной величиной m , однако в дальнейшем для простоты мы будем рассматривать два широко используемых сверточных кода со скоростью 0,5, кодер которых описывается многочленами с коэффициентами в восьмеричном представлении (5, 7) и (171, 133). Кодер кода (5, 7) показан на рис. 6, а, решетка — на рис. 6, б. Символы на ребрах решетки соответствуют кодовым символам, ребро, изображенное сплошной линией, соответствует информационному биту 0, пунктирной — информационному биту 1. На рис. 6, б не изображены направления ребер, предполагается, что все ребра направлены слева направо.

Представление кода с помощью решетки дает возможность выполнять декодирование по максимуму правдоподобия, используя алгоритм Витерби. Фактически при этом исполь-

зуется декодирование по минимуму расстояния, т. е. ищется путь на решетке (задающий кодовое слово), ближайший к принятому слову в некоторой метрике. Так, для ДСК может быть использована метрика Хэмминга, для канала с АБГШ — метрика Евклида, обе эти метрики согласованы с соответствующими каналами. Поскольку нахождение наиболее вероятного пути (кодового слова) в случае согласованной метрики эквивалентно нахождению пути с минимальной метрикой, такой путь иногда называется кратчайшим.

Для нахождения такого кратчайшего пути в основе алгоритма Витерби лежит принцип динамического программирования: если в некоторый узел решетки из начального узла ведут несколько путей со своими стоимостями, можно выбрать локальный оптимальный путь (минимальной стоимости) из начального узла в текущий, и так как метрика — неотрицательная функция, оптимальность данного участка пути уже не может быть нарушена дальнейшим продвижением по решетке. Таким образом, при просмотре решетки достаточно на каждом шаге алгоритма рассматривать лишь одну секцию решетки, для левых узлов которой уже найдены оптимальные пути с их стоимостями (называемыми накопленными), и можно определить оптимальные пути до правых узлов, рассматривая только ребра секции.



■ Рис. 6. Кодер (а) и решетка (б) сверточного кода (5, 7)
 ■ Fig. 6. (5, 7) convolutional coder (a) and code trellis (b)

Для более формального описания введем некоторые обозначения, следуя статье [20] с некоторыми модификациями. Нас интересует вычисление метрики в алгоритме Витерби, поэтому опустим все вопросы, связанные с сохранением и восстановлением выживших путей, они могут быть реализованы любым из классических способов.

Определим решетку $T = (V, E)$ ранга n как орграф, каждая вершина которого находится на некоторой глубине i , $i = 0, 1, \dots, n$. Если $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,t_i}\}$ – множество вершин на глубине i , $|V_i| = t_i$, множество $V = \bigcup_{i=0}^n V_i$. Будем считать, что $t_0 = t_n = 1$, таким образом, решетка содержит единственную вершину A на глубине 0 и единственную вершину B на глубине n .

Любое ребро e решетки T связывает вершину на глубине $i-1$ с вершиной на глубине i , где $i = 1, \dots, n$. Обозначим множество ребер на одном ярусе как $E_{\{i-1, i\}}$, тогда $E = \bigcup_{i=1}^n E_{\{i-1, i\}}$. Обозначим i -й ярус решетки как $T_i = (V_{i-1} \cup V_i, E_{i-1, i})$, $i = 1, \dots, n$.

Если $e: u \rightarrow v$, введем обозначения для начала ребра $\text{init}(e) = u$ и конца ребра $\text{fin}(e) = v$.

Будем считать, что каждому ребру приписано неотрицательное вещественное число – метка (вес) ребра $\lambda(e)$. Обозначим через $\mu(u, v)$ сумму меток на пути из вершины u в вершину v (вообще говоря, таких путей может быть много, и в [20] величина $\mu(u, v)$ в общем случае определяется как сумма меток всех таких путей, однако в контексте декодирования Витерби речь идет об одном выжившем пути). Для простоты обозначим $\mu(A, v) = \mu(v)$, тогда $\mu(v)$ – минимальный вес пути среди всех путей из A в v , где под весом подразумевается расстояние между принятым из канала словом и кодовыми символами, соответствующими пути. Тогда $\mu(B)$ – расстояние между принятым словом и ближайшим к нему кодовым, само это ближайшее кодовое слово является результатом декодирования и задается выжившим путем минимального веса.

Пусть $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{nm-1})$ – слово, принятое из дискретного двоичного канала, т. е. $y_i \in \{0, 1\}$. Обозначим через $\mathbf{y}_i = (y_{(i-1)m}, y_{(i-1)m+1}, \dots, y_{im-1})$ подвектор \mathbf{y} , соответствующий i -му ярусу решетки T_i , $i = 1, \dots, n$.

Далее, пусть $c(e)$ – m кодовых бит, соответствующих ребру e . Тогда

$$z(e) = \mathbf{y}_i \oplus c(e) = (z_0(e), \dots, z_{m-1}(e)). \quad (10)$$

При использовании декодирования в метрике Хэмминга метка $\lambda(e)$ может быть вычислена как

$$\lambda(e) = d_H(c(e), \mathbf{y}_i) = W_H(z(e)),$$

VITERBIDECODING($T(V, E), \lambda$)

- 1: $\mu(A) = 0$;
- 2: for $i = 1$ to n
- 3: for $v \in V_i$
- 4: $\mu(v) = \min_{e: \text{fin}(e)=v} (\mu(\text{init}(e)) + \lambda(e))$;
- 5: return $\mu(B)$;

- **Рис. 7.** Алгоритм Витерби
- **Fig. 7.** Viterbi algorithm

где $d_H(\cdot, \cdot)$ и $W_H(\cdot)$ – расстояние и вес Хэмминга соответственно.

Тогда алгоритм Витерби (в части вычисления весов ребер) может быть описан следующим образом (рис. 7).

Данный алгоритм неявно использует тот факт, что если $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2)$, где $(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2)$ – конкатенация векторов \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 , то как метрика Хэмминга, так и метрика Евклида обладают следующим свойством:

$$W(\mathbf{z}) = W(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2) = W(\mathbf{z}_1) + W(\mathbf{z}_2), \quad (11)$$

таким образом, вес пути, состоящего из пути в левый узел секции и ребра из левого узла в правый, находится простым прибавлением стоимости ребра к накопленной стоимости.

Рассмотрим использование марковской метрики (6) и (7). Для этой метрики свойство (11) не выполняется. Получим для метрики общего вида (6) выражение, аналогичное выражению (11) для конкатенации двух векторов. Пусть $W_M^*(\mathbf{z}) = W_M(\mathbf{z}) - \omega_0 z_0$, т. е. метрика (6), не учитывающая значение начального символа \mathbf{z} . Если вектор $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{N-1})$, обозначим через \mathbf{z}_i^j подвектор $(z_i, z_{i+1}, \dots, z_j)$. Тогда

$$\begin{aligned} W_M(\mathbf{z}) &= W_M(\mathbf{z}_0^i | \mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) = \omega_0 z_0 + \omega_{00} l_{00}(\mathbf{z}_0^i) + \\ &+ \omega_{10} l_{10}(\mathbf{z}_0^i) + \omega_{01} l_{01}(\mathbf{z}_0^i) + \omega_{11} l_{11}(\mathbf{z}_0^i) + \omega_{z_i z_{i+1}} + \\ &+ \omega_{00} l_{00}(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) + \omega_{10} l_{10}(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) + \omega_{01} l_{01}(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) + \\ &+ \omega_{11} l_{11}(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) = W_M(\mathbf{z}_0^i) + \omega_{z_i z_{i+1}} + W_M^*(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) = \\ &= W_M(\mathbf{z}_0^i) + W_M^*(z_i | \mathbf{z}_i^{N-1}) = W_M(\mathbf{z}_0^i) + W_M^*(\mathbf{z}_i^{N-1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Из выражения (12) можно получить соответствующее выражение для согласованной метрики (8). Далее из (12) получаем

$$W_M(\mathbf{z}_0^i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m}) = W_M(\mathbf{z}_0^i) + W_M^*(z_i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m}), \quad (13)$$

где m – число кодовых бит, приходящихся на ярус решетки. Величина $W_M(\mathbf{z}_0^i)$ в (13) есть не что иное, как накопленная метрика пути, а

VITERBIDECODING($T(V, E), \lambda$)

```

1:  $\mu(A) = 0$ ;
2: for  $i = 1$  to  $n$ 
3:   for  $v \in V_i$ 
4:     for  $e: \text{fin}(e) = v$ 
5:        $\lambda(e) = \begin{cases} W_M(z(e)), & \text{init}(e) = A, \\ W_M^*(\zeta(\text{init}(e)) | z(e)), & \text{init}(e) \neq A. \end{cases}$ 
6:        $e^* = \arg \min_{e: \text{fin}(e)=v} (\mu(\text{init}(e)) + \lambda(e))$ ;
7:        $\mu(v) = \mu(\text{init}(e^*)) + \lambda(e^*)$ ;
8:        $\zeta(v) = z_{m-1}(e^*)$ ;
9: return  $\mu(B)$ ;
```

- **Рис. 8.** Алгоритм Витерби в марковской метрике
- **Fig. 8.** Viterbi algorithm using Markov metric

$W_M^*(z_i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m})$ может вычисляться как метрика ребер данного яруса. Однако для вычисления $W_M^*(z_i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m})$ для некоторого ребра e требуется знание z_i — последнего символа вектора ошибки, соответствующего выжившему пути из A в вершину $\text{init}(e)$; таким образом, для каждой вершины необходимо хранить не только метрику и выживший путь, но и значения z_i .

Заметим, что для первого яруса мы должны вычислить значение $W_M(z_0^{m-1})$, учитывающее значение z_0 , а для всех остальных ярусов вычисляется модифицированный вес $W_M^*(z_i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m})$. Тогда вычисление весов ребер $\lambda(e)$ для яруса T_1 можно выполнить следующим образом, используя $z(e)$ из (10):

$$\lambda(e) = W_M(z(e)), e \in E_{0,1}.$$

Обозначим через $\zeta(u)$ последний символ вектора ошибки, соответствующего выжившему пути из A в вершину u . Тогда для $T_i, i = 2, \dots, n$:

$$\lambda(e) = W_M^*(\zeta(\text{init}(e)) | z(e)).$$

С учетом всего вышеизложенного представим алгоритм Витерби в марковской метрике (рис. 8). Ребро e^* на шаге 6 — это ребро выжившего пути на текущем ярусе.

Необходимо отметить, что предложенный алгоритм обладает несколько большей вычислительной сложностью по сравнению с исходным вариантом, так как вовлекает дополнительные вычисления, однако данная модификация не приводит к увеличению числа состояний решетки, что может произойти при применении алгоритма Витерби к марковским каналам, и связанные с применением марковской метрики накладные расходы незначительны.

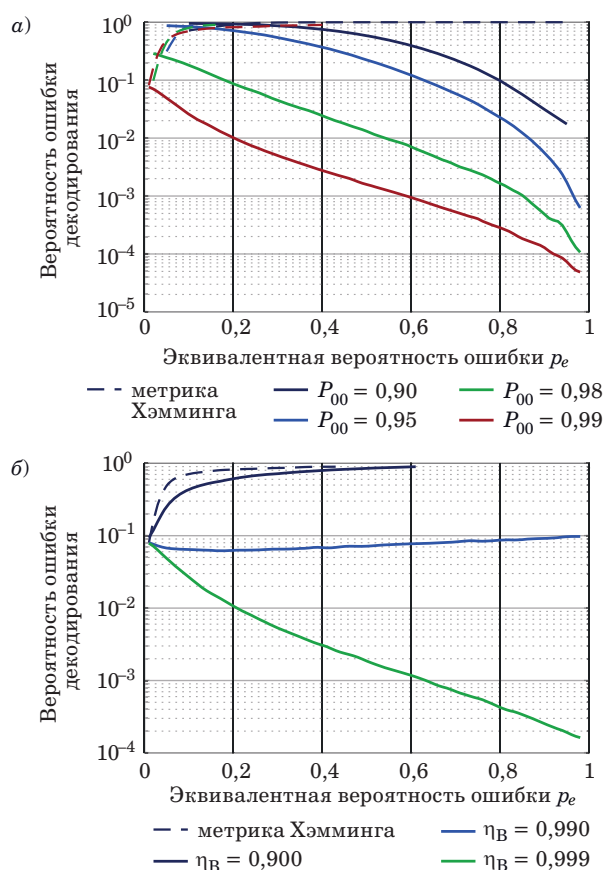
Исследование вероятности ошибки декодирования по минимуму расстояния для сверточного кода

В данном разделе приведем результаты моделирования для каналов с памятью на примере простого марковского канала и канала Гилберта с использованием сверточного кода при декодировании в марковской метрике и метрике Хэмминга.

Рассмотрим передачу с помощью сверточного кода (171, 133) со скоростью 0,5, с занулением решетки через каждые 100 информационных символов (что дает длину кодового слова $N = 200$) по марковскому каналу с $P_{00} = 0,99$. Заметим [см. рис. 3 и выражение (9)], что при таких параметрах марковская метрика не согласована с марковским каналом. На рис. 9, а показана зависимость вероятности ошибки декодирования от эквивалентной вероятности ошибки p_e при использовании метрики Хэмминга и марковской метрики. Использование метрики Хэмминга практически на всем интервале значений p_e не позволяет снизить вероятность ошибки существенно меньше единицы, кроме очень малого участка низких значений p_e , где доля ошибок крайне мала и метрика Хэмминга позволяет их исправить. Использование марковской метрики, несмотря на ее несогласованность с каналом, как и метрики Хэмминга, обеспечивает заметно меньшую вероятность ошибки по сравнению с метрикой Хэмминга. При этом необычная форма кривой вероятности ошибки, упомянутая при обсуждении рис. 4 в случае коротких блоковых кодов, сохраняется в марковском канале и для сверточных кодов большей длины.

Применим теперь декодирование Витерби в марковской метрике в канале Гилберта. Результаты декодирования в канале Гилберта с $P_{GG} = 0,99$ и различными значениями η_B представлены на рис. 9, б. Как и в случае с блоковым кодом на рис. 5, результаты для метрики Хэмминга практически не отличаются друг от друга при рассмотренных параметрах канала.

Из графиков можно видеть, что при вероятности ошибки $\eta_B = 0,9999$ кривая почти совпадает с кривой для марковского канала. Однако при уменьшении вероятности битовой ошибки в «плохом» состоянии даже до 0,99 значение вероятности ошибки хотя и остается ниже, чем у декодера в метрике Хэмминга, но не опускается ниже 0,05 на всем диапазоне p_e . При дальнейшем уменьшении η_B вероятность ошибки при использовании марковской метрики стремится к результатам, полученным для метрики Хэмминга. В целом можно сделать выводы, аналогичные сделанным при обсуждении рис. 5 и декодирования блокового кода.



■ **Рис. 9.** Вероятность ошибки декодирования сверточного кода (171, 133) в марковском канале (а) и в канале Гилберта с разной вероятностью битовой ошибки η_B (б)
 ■ **Fig. 9.** Decoding error probability of (171, 133) convolutional code in Markov channel (a) and in Gilbert channel with different bit error probability η_B (б)

Это говорит о том, что рассмотренная марковская метрика хотя и показывает значительный выигрыш в марковском канале, особенно при больших значениях p_e , плохо применима к другим моделям с конечным числом состояний, более адекватным реальным каналам. Для таких каналов требуется нахождение иных метрик или функций декодирования.

Литература

1. Lin S., Li J. *Fundamentals of Classical and Modern Error-Correcting Codes*. Cambridge, Cambridge University Press, 2022. 840 p. doi:10.1017/9781009067928
2. Moon T. K. *Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms*. Second ed. Hoboken, NJ, Wiley, 2021. 992 p.
3. Xiao X., Vasic B., Lin S., Li J., Abdel-Ghaffar K. Quasi-cyclic LDPC codes with parity-check matrices of column weight two or more for correcting phased bursts of erasures. *IEEE Trans. Commun.*, 2021,

Заключение

В данной статье рассматривается вопрос применимости марковской метрики как в простой марковской модели, для которой она предназначена, так и в более общем случае канала Гилберта. Проведен анализ значений переходных вероятностей и длин кодов, при которых марковская метрика является согласованной, который показывает, что при заданной длине используемого кода диапазон значений параметров марковского канала, при которых метрика согласована, может быть достаточно узок или отсутствовать вообще.

Проведены эксперименты по оценке вероятности ошибки декодирования в марковской метрике и сравнению с результатами, получаемыми при использовании метрики Хэмминга. Эксперименты проведены как для блочных кодов малой длины, так и для сверточных кодов длиной несколько сотен бит, для чего была разработана модификация алгоритма Витерби для декодирования в марковской метрике.

Для марковских каналов марковская метрика показывает значительный выигрыш по сравнению с метрикой Хэмминга даже для случаев, когда она не согласована с каналом. Однако при переходе от марковской модели к более общему каналу Гилберта марковская метрика не показывает выигрыша по сравнению с метрикой Хэмминга или даже проигрывает ей.

Направлением дальнейших исследований может стать разработка декодирующего правила для каналов Гилберта и Гилберта – Эллиотта, что представляет большой интерес на практике.

Финансовая поддержка

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-19-00305 «Пространственно-временные стохастические модели беспроводных сетей с большим числом абонентов».

vol. 69, no. 5, pp. 2812–2823. doi:10.1109/TCOMM.2021.3059001

4. Song L., Huang Q., Wang Z. Construction of multiple-burst-correction codes in transform domain and its relation to LDPC codes. *IEEE Trans. Commun.*, 2020, vol. 68, no. 1, pp. 40–54. doi: 10.1109/TCOMM.2019.2948341
5. Vafi S. Cyclic low density parity check codes with the optimum burst error correcting capability. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 192065–192072. doi:10.1109/ACCESS.2020.3032837
6. Veresova A. M., Isaeva M. N., Ovchinnikov A. A. Estimation of independent errors and bursts correction

- capability of linear codes. *2024 Conf. of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElCon)*, Saint-Petersburg, IEEE, 2024, pp. 23–27. doi:10.1109/ElCon61730.2024.10468456
7. Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X. Burst error identification method for LDPC coded systems. *IEEE Commun. Lett.*, 2024, pp. 1–5. doi:10.1109/LCOMM.2024.3391826
 8. Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H. D., Permuter H. H. Data-driven polar codes for unknown channels with and without memory. *2023 IEEE Intern. Symp. on Information Theory (ISIT)*, Taipei, IEEE, 2023, pp. 1890–1895. doi:10.1109/ISIT54713.2023.10206663
 9. Sasoglu E., Tal I. Polar coding for processes with memory. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2019, vol. 65, no. 4, pp. 1994–2003. doi:10.1109/TIT.2018.2885797
 10. Fang Y., Chen J. Decoding polar codes for a generalized Gilbert – Elliott channel with unknown parameter. *IEEE Trans. Commun.*, 2021, vol. 69, no. 10, pp. 6455–6468. doi:10.1109/TCOMM.2021.3095195
 11. Yang M., Pan Z., Djordjevic I. B. FPGA-based burst-error performance analysis and optimization of regular and irregular SD-LDPC codes for 50G-PON and beyond. *Opt. Express*, 2023, vol. 31, no. 6, pp. 10936–10946. doi:10.1364/OE.477546
 12. Исаева М. Н., Овчинников А. А. Исправление одиночных пакетов ошибок за пределами корректирующей способности кода с использованием информационных совокупностей. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2024, вып. 24, № 1, с. 70–80. doi:10.17586/2226-1494-2024-24-1-70-80, EDN: OMESTV
 13. Ovchinnikov A. A., Veresova A. M., Fominykh A. A. Decoding of linear codes for single error bursts correction based on the determination of certain events. *Информационно-управляющие системы*, 2022, № 6, с. 41–52. doi:10.31799/1684-8853-2022-6-41-52, EDN: UWXZHN
 14. Крук Е. А. Комбинаторное декодирование линейных блочковых кодов: монография. СПб., ГУАП, 2007. 238 с.
 15. Gabidulin E. M. Combinatorial metrics in coding theory. *Proc. of 2nd IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, Budapest, IEEE, 1971, pp. 169–176.
 16. Sidorenko V., Li W., Kramer G. On interleaved rank metric codes. *2020 Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT)*, Albena, IEEE, 2020, pp. 128–134. doi:10.1109/ACCT51235.2020.9383406
 17. Firer M., Walker J. L. Matched metrics and channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2016, vol. 62, no. 3, Art. no. 3. doi:10.1109/TIT.2015.2512596
 18. Chen T., Ma Y., Zhang X. Optimal codes with small constant weight in l_1 -metric. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2021, vol. 67, no. 7, pp. 4239–4254. doi:10.1109/TIT.2021.3052191
 19. Veresova A., Fominykh A., Ovchinnikov A. About usage of metrics in decoding of LDPC codes in two-state channels with memory. *2021 XVII Intern. Symp. Problems of Redundancy in Information and Control Systems (REDUNDANCY)*, Moscow, IEEE, 2021, pp. 143–148. doi:10.1109/REDUNDANCY52534.2021.9606474
 20. McEliece R. J. On the BCJR trellis for linear block codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1996, vol. 42, no. 4, pp. 1072–1092. doi:10.1109/18.508834

UDC 519.72

doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41

EDN: JQIBMZ

Performance evaluation of decoding in channels with memory with the use of a Markov metric

A. M. Veresova^a, Post-Graduate Student, orcid.org/0000-0002-3792-9249, a.veresova@guap.ru^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Modern methods of error-correcting coding have come very close to the theoretical limits set by the Shannon coding theorems. However, these limits can be increased by taking into account the specifics of the error configuration in the channel. Thus, the relevant task is to research the methods of information transmission through channels with memory. **Purpose:** To analyze the conditions of matching a Markov metric with a simple Markov channel, as well as to explore the possibility of its applicability in more general Markov models. **Results:** We carry out the analysis of the parameters of a Markov channel and the encoding lengths at which a Markov metric is matched. We demonstrate that for a large set of parameters of practical interest, the matching range is small or absent. We propose a modification of the Viterbi algorithm for using the Markov metric. We conduct the experiments to estimate the error probability of minimal distance decoding for short-length block codes (several tens of bits) and moderate-length convolutional codes (several hundred bits). The results show that the Markov metric can significantly reduce the probability of decoding error in the Markov channel, even if the metric is unmatched. However, when changing from the Markov channel to more general models (Gilbert channel), the gain disappears. **Practical relevance:** Developed Viterbi decoder with the Markov metric makes it possible to achieve decoding error probabilities down to 10^{-2} – 10^{-4} in the Markov channel, where decoding with the use of a Hamming metric is inapplicable. **Discussion:** The results show that the requirement of metric matching is not mandatory to achieve low decoding error probability. Thus, the task of the development of the decoding rule arises for channels where noise is described with a hidden Markov model.

Keywords – channels with memory, metrics, maximum likelihood decoding, Viterbi decoding, finite state channel.

For citation: Veresova A. M. Performance evaluation of decoding in channels with memory with the use of a Markov metric. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 29–41 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41, EDN: JQIBMZ

Financial support

The paper was prepared with the financial support of the Russian Science Foundation, project No. 22-19-00305 “Spatial-temporal stochastic models of wireless networks with a large number of users”.

References

1. Lin S., Li J. *Fundamentals of Classical and Modern Error-Correcting Codes*. Cambridge, Cambridge University Press, 2022. 840 p. doi:10.1017/9781009067928
2. Moon T. K. *Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms*. Second ed. Hoboken, NJ, Wiley, 2021. 992 p.
3. Xiao X., Vasic B., Lin S., Li J., Abdel-Ghaffar K. Quasi-cyclic LDPC codes with parity-check matrices of column weight two or more for correcting phased bursts of erasures. *IEEE Trans. Commun.*, 2021, vol. 69, no. 5, pp. 2812–2823. doi:10.1109/TCOMM.2021.3059001
4. Song L., Huang Q., Wang Z. Construction of multiple-burst-correction codes in transform domain and its relation to LDPC codes. *IEEE Trans. Commun.*, 2020, vol. 68, no. 1, pp. 40–54. doi:10.1109/TCOMM.2019.2948341
5. Vafi S. Cyclic low density parity check codes with the optimum burst error correcting capability. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 192065–192072. doi:10.1109/ACCESS.2020.3032837
6. Veresova A. M., Isaeva M. N., Ovchinnikov A. A. Estimation of independent errors and bursts correction capability of linear codes. *2024 Conf. of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElCon)*, Saint-Petersburg, IEEE, 2024, pp. 23–27. doi:10.1109/ElCon61730.2024.10468456
7. Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X. Burst error identification method for LDPC coded systems. *IEEE Commun. Lett.*, 2024, pp. 1–5. doi:10.1109/LCOMM.2024.3391826
8. Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H. D., Permuter H. H. Data-driven polar codes for unknown channels with and without memory. *2023 IEEE Intern. Symp. on Information Theory (ISIT)*, Taipei, IEEE, 2023, pp. 1890–1895. doi:10.1109/ISIT54713.2023.10206663
9. Sasoglu E., Tal I. Polar coding for processes with memory. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2019, vol. 65, no. 4, pp. 1994–2003. doi:10.1109/TIT.2018.2885797
10. Fang Y., Chen J. Decoding polar codes for a generalized Gilbert – Elliott channel with unknown parameter. *IEEE Trans. Commun.*, 2021, vol. 69, no. 10, pp. 6455–6468. doi:10.1109/TCOMM.2021.3095195
11. Yang M., Pan Z., Djordjevic I. B. FPGA-based burst-error performance analysis and optimization of regular and irregular SD-LDPC codes for 50G-PON and beyond. *Opt. Express*, 2023, vol. 31, no. 6, pp. 10936–10946. doi:10.1364/OE.477546
12. Isaeva M. N., Ovchinnikov A. A. Correction of single error bursts beyond the code correction capability using information sets. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 1, pp. 70–80 (In Russian). doi:10.17586/2226-1494-2024-24-1-70-80, EDN: OMESTV
13. Ovchinnikov A. A., Veresova A. M., Fominykh A. A. Decoding of linear codes for single error bursts correction based on the determination of certain events. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2022, no. 6, pp. 41–52. doi:0.31799/1684-8853-2022-6-41-52, EDN: UWXZHN
14. Krouk E. A. *Kombinatornoe dekodirovanie lineinykh blokovykh kodov* [Combinatorial decoding of linear block codes]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2007. 238 p. (In Russian).
15. Gabidulin E. M. Combinatorial metrics in coding theory. *Proc. of 2nd IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, Budapest, IEEE, 1971, pp. 169–176.
16. Sidorenko V., Li W., Kramer G. On interleaved rank metric codes. *2020 Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT)*, Albena, IEEE, 2020, pp. 128–134. doi:10.1109/ACCT51235.2020.9383406
17. Firer M., Walker J. L. Matched metrics and channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2016, vol. 62, no. 3, Art. no. 3. doi:10.1109/TIT.2015.2512596
18. Chen T., Ma Y., Zhang X. Optimal codes with small constant weight in l_1 -metric. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2021, vol. 67, no. 7, pp. 4239–4254. doi:10.1109/TIT.2021.3052191
19. Veresova A., Fominykh A., Ovchinnikov A. About usage of metrics in decoding of LDPC codes in two-state channels with memory. *2021 XVII Intern. Symp. Problems of Redundancy in Information and Control Systems (REDUNDANCY)*, Moscow, IEEE, 2021, pp. 143–148. doi:10.1109/REDUNDANCY52534.2021.9606474
20. McEliece R. J. On the BCH trellis for linear block codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1996, vol. 42, no. 4, pp. 1072–1092. doi:10.1109/18.508834

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью – рецензию.

Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.