



Анализ помехоустойчивости двухступенчатого канального кодирования при некогерентной передаче в многолучевом канале с замираниями и доплеровским рассеянием

Ф. А. Таубин^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-8781-9531

А. Н. Трофимов^а, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0003-1233-5222, andrei.trofimov@guap.ru

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: в высокомобильных системах связи некогерентные схемы передачи со сравнительно простым канальным кодированием рассматриваются в качестве перспективной альтернативы традиционным когерентным методам передачи, при которых на получение точной оценки параметров канала (например, посредством периодической передачи пилот-сигналов) тратится непропорционально большая доля ресурсов. Отсутствие в приемнике высокомобильной системы связи оценок текущих параметров канала сопровождается как появлением определенных ограничений на совместный выбор эффективных методов канального кодирования и модуляции, так и необходимостью разработки процедур достаточно точного анализа помехоустойчивости. **Цель:** анализ помехоустойчивости двухступенчатой кодированной передачи в многолучевом канале с доплеровским рассеянием с использованием амплитудно-фазовой модуляции и некогерентным приемом на внутренней ступени декодирования. **Результаты:** для канала с многолучевым распространением и доплеровским рассеянием представлен сценарий некогерентной передачи на основе двухступенчатого канального кодирования с перемежением между ступенями и внутренним кодом, ориентированным на использование с амплитудно-фазовой модуляцией. Приведено описание общей схемы декодирования двухступенчатой конструкции для общей модели канала с произвольным профилем многолучевости и доплеровским рассеянием, включая указание в явном виде возможности существенного снижения сложности декодирования на внутренней ступени в случаях медленных и быстрых замираний в канале. Выполнен анализ помехоустойчивости двухступенчатого канального кодирования на основе разработанного применительно к рассмотренному сценарию метода точного вычисления аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования, базирующегося на получении точного выражения для попарной вероятности. **Практическая значимость:** комбинирование двухступенчатой схемы канального кодирования с амплитудно-фазовой модуляцией обеспечивает возможность существенно расширить совокупность рациональных вариантов организации передачи для рассматриваемого сценария передачи, позволяя обеспечить приемлемый уровень помехоустойчивости в широком диапазоне изменения как величины доплеровского рассеяния в канале, так и профиля многолучевости. Заметное повышение точности оценивания вероятности ошибочного декодирования, достигаемое при использовании предложенного метода точного вычисления попарной вероятности ошибки, позволяет повысить эффективность процедур, связанных с выбором конкретных схем кодирования в многолучевом канале с доплеровским рассеянием.

Ключевые слова — беспроводной канал, релеевские замирания, многолучевое распространение, доплеровское рассеяние, двухступенчатое кодирование, некогерентный прием, аддитивная граница вероятности ошибки, граница Чернова, точное вычисление попарных вероятностей ошибки, характеристическая функция логарифма отношения правдоподобия.

Для цитирования: Таубин Ф. А., Трофимов А. Н. Анализ помехоустойчивости двухступенчатого канального кодирования при некогерентной передаче в многолучевом канале с замираниями и доплеровским рассеянием. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 5, с. 35–49. doi:10.31799/1684-8853-2025-5-35-49, EDN: CXVICZ

For citation: Taubin F. A., Trofimov A. N. Performance analysis of two-stage channel coding with noncoherent transmission over multipath fading channel with Doppler scattering. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 5, pp. 35–49 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-5-35-49, EDN: CXVICZ

Введение

Беспроводная связь в условиях высокой мобильности пользователей привлекает в настоящее время значительное внимание в связи с масштабным развертыванием сетей пятого поколения (5G) и высокоскоростных транспортных систем [1–8]. Типичная скорость перемещения пользователей в высокомобильных системах может составлять от нескольких сотен километров в час до 1200 км/ч. Высокая мобильность пользователей сопровождается существенным возрастанием доплеровского рассеяния, величина

которого в каналах перспективного терагерцевого диапазона может достигать нескольких килогерц [1, 9], тогда как, например, в типичных беспроводных системах четвертого поколения (4G) величина доплеровского рассеяния не превосходит нескольких десятков герц. Это приводит к резкому уменьшению величины интервала когерентности в канале, поэтому при использовании когерентной схемы передачи в высокомобильных системах для получения точной оценки параметров канала (например, посредством периодической передачи пилот-сигналов) требуется затрачивать существенно большую

долю временного и энергетического ресурсов. Кроме того, когерентная схема передачи в ряде ситуаций (например, при передаче в терагерцевом диапазоне и (или) при высокой кратности модуляции) оказывается настолько чувствительной к фазовому шуму и искажениям, связанным с выделением синфазной и квадратурной компонент сигнала (I/Q imbalance) [10–14], что возникает эффект несократимой ошибки (error floor). В результате введение периодического оценивания параметров канала в целях обеспечения когерентного приема оказывается сопряжено с существенным увеличением энергопотребления и сложности реализации приемника, включая интерфейс между блоками, осуществляющими обработку в основной полосе (baseband processing units, BBUs), и удаленным радиомодулем (remote radio head, RRH) [15–17]. Фактически, в ряде ситуаций вычислительная сложность получения надежных текущих оценок параметров канала оказывается настолько высокой, что реализация когерентной схемы передачи становится невыполнимой. В таких случаях более перспективным представляется альтернативный подход с использованием некогерентных схем передачи [18–22], в которых приемник не располагает информацией о текущих оценках параметров канала. Этот подход включает, в частности, процедуры со слепым/полуслепым вынесением решений. Один из вариантов некогерентной передачи с использованием фазовой модуляции и полуслепым декодированием рассматривался в работе [23].

В данной работе представлено обобщение схемы передачи в [23]: рассматривается сценарий двухступенчатой кодированной передачи в многолучевом канале с произвольным профилем многолучевости и доплеровским рассеянием с использованием амплитудно-фазовой модуляции и некогерентным приемом на внутренней ступени декодирования. Существенное расширение рациональных вариантов кодирования при переходе от передачи с фазовой модуляцией к передаче с амплитудно-фазовой модуляцией позволяет обеспечить приемлемый уровень помехоустойчивости в широком диапазоне изменения величины доплеровского рассеяния в канале. Для анализа помехоустойчивости в работе представлен метод точного вычисления аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования для рассматриваемого сценария передачи в многолучевом канале с доплеровским рассеянием, базирующийся на получении точного выражения для попарной вероятности ошибки. Представленный метод является обобщением предложенной в работе [24] техники точного вычисления аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования для каналов

без памяти на сценарий некогерентной передачи в многолучевом канале с доплеровским рассеянием.

Модель передачи

Пусть двоичная информационная последовательность кодируется с использованием двухступенчатого кода G , состоящего из двух кодов: внешнего двоичного $(n_{\text{out}}, k_{\text{out}})$ -кода C и внутреннего кода V длиной n_{in} над алфавитом $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, где $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_{p-1}\}$ – алфавит, используемый для представления амплитуд, $A_l \geq 0, l = 0, 1, \dots, p-1$; $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, \dots, B_{q-1}\}$ – алфавит, используемый для представления фаз, $0 \leq B_l < q, l = 0, 1, \dots, q-1$. В частном случае код V может быть представлен как $V = V_a \times V_b$, где V_a и V_b – коды над алфавитами $\mathcal{A} = \{0, \Delta, \dots, (p-1)\Delta\}$, $\Delta > 0$, и $\mathcal{B} = \{0, 1, \dots, q-1\}$, имеющие одинаковую длину n_{in} . В этом частном случае код $V_a = \{a_l | 1 \leq l \leq 2^{k_1}\}$, $a_l = (a_{l1}, \dots, a_{ln_{\text{in}}})$, $a_{lt} \in \{0, \Delta, \dots, (p-1)\Delta\}$, с параметром Δ , выбираемым из условия $E[a_l a_l'] / n_{\text{in}} = 1$, где $E[\cdot]$ – оператор усреднения по некоторому, в данном случае равномерному, распределению, символ «'» означает транспонирование; код $V_b = \{b_l | 1 \leq l \leq 2^{k_2}\}$, $b_l = (b_{l1}, \dots, b_{ln_{\text{in}}})$, $b_{ls} \in \{0, 1, \dots, q-1\}$, $s = 1, 2, \dots, n_{\text{in}}$. Тогда внутренний код $V = V_a \times V_b$ определяется как $V = \{v_l = (a_l, b_l) | 1 \leq l \leq 2^{k_{\text{in}}}, 1 \leq l_1 \leq 2^{k_1}, 1 \leq l_2 \leq 2^{k_2}\}$, $k_{\text{in}} = k_1 + k_2$. Входные блоки, состоящие из $k_{\text{out}} k_{\text{in}}$ двоичных символов, разбиваются на k_{in} подблоков, состоящих из k_{out} символов. Каждый подблок кодируется внешним двоичным $(n_{\text{out}}, k_{\text{out}})$ -кодом C со скоростью $R_{\text{out}} = k_{\text{out}}/n_{\text{out}}$. Полученные k_{in} кодовых слов располагаются как строки прямоугольной матрицы размера $k_{\text{in}} \times n_{\text{out}}$. Первые k_1 двоичных символов каждого столбца полученной матрицы кодируются кодом V_a внутреннего кода V со скоростью $R_{\text{in},1} = k_1/n_{\text{in}}$ [бит/символ]; оставшиеся k_2 двоичных символов каждого столбца кодируются кодом V_b внутреннего кода V со скоростью $R_{\text{in},2} = k_2/n_{\text{in}}$ [бит/символ]. Таким образом, результирующая скорость внутренней ступени кодирования $R_{\text{in}} = k_{\text{in}}/n_{\text{in}}$ [бит/символ]. Кодовое слово $\mathbf{g}$ двухступенчатого кода G представляет собой прямоугольную $n_{\text{in}} \times n_{\text{out}}$ матрицу, состоящую из n_{out} столбцов: $\mathbf{g} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_{\text{out}}})$, $\mathbf{v}_m \in V$, $\mathbf{v}_m = (v_{m1}, \dots, v_{mn_{\text{in}}})'$, $v_{ml} = (a_{ml}, b_{ml})$, $a_{ml} \in \{0, \Delta, \dots, (p-1)\Delta\}$, $b_{ml} \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. Скорость двухступенчатого кода G составляет $R = R_{\text{in}} R_{\text{out}} = k_{\text{out}} k_{\text{in}} / n_{\text{out}} n_{\text{in}}$ [бит/символ]. Будем полагать, что последовательность подблоков $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n_{\text{out}}}$ передаваемого блока, соответствующего кодовому слову $\mathbf{g}$ кода G , в передаваемой последовательности блоков подвергает-

ся перемежению (с использованием матрично-го перемежителя) перед передачей по каналу. Перемежение предназначено для исключения пакетирования ошибок на входе декодера внешнего кода C . Глубина перемежения определяется статистическими характеристиками канала и выбирается таким образом, чтобы ошибки в расширенном канале (включающем внутренний кодер/декодер, модулятор/демодулятор и собственно физический канал с замираниями) можно рассматривать как практически независимые.

Символы подблока $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n_{in}})$ передаются с использованием модуляции с дискретным изменением амплитуды и фазы — амплитудно-фазовой модуляции. Сигнал $s(t, v_i)$, соответствующий символу $v_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, n_{in}$, передается на интервале $[(i-1)T, iT)$, T — длительность тактового интервала, и имеет вид

$$s(t, v_i) = a_i \sqrt{2RE_b / T} \cos(2\pi f_0 t - 2\pi b_i / q), \quad t \in [(i-1)T, iT), \quad (1)$$

где E_b — энергия, затрачиваемая на передачу одного бита; f_0 — центральная частота, $f_0 T$ — целое и $f_0 \gg 1/T$. Из (1) следует, что каждому значению символа $v_i = (a_i, b_i)$ кодового слова внутреннего кода V соответствует точка двумерного сигнального созвездия $S = \{s_1, \dots, s_{|V|}\}$. Применительно к передаче с использованием амплитудно-фазовой модуляции код V_a можно интерпретировать как «амплитудный» код, а код V_b — как «фазовый» код. Выделим два частных случая: 1) «амплитудный» код V_a — вырожденный и состоит из одного слова $\mathbf{a} = (1, \dots, 1)$, в этом случае $k_1 = 0$, $|V| = q$ и используемая модуляция является фазовой; 2) «фазовый» код V_b — вырожденный и состоит из одного слова $\mathbf{b} = (0, \dots, 0)$, в этом случае $k_2 = 0$, $|V| = p$ и используемая модуляция является амплитудной.

Последовательность сигналов $\{s(t, v_i)\}$ передается по многолучевому каналу с релейскими замираниями. Каждый луч характеризуется значением задержки $t_l \geq 0$, $l = 0, 1, \dots, L-1$, L — число лучей. Среди лучей один — с индексом $l = 0$ — полагается основным, и для него $t_0 = 0$; луч с индексом $l = L-1$ имеет максимальную задержку, так что t_{L-1} совпадает с временем рассеяния в канале T_m . Принятый сигнал имеет вид

$$r(t) = \sqrt{2RE_b / T} \sum_{l=0}^{L-1} |\mu_{il}| a_{i(l)} \times \cos(2\pi f_0(t - t_l) - 2\pi b_{i(l)} / q + \theta_{il}) + n(t), \quad t \in [(i-1)T, iT), \quad (2)$$

где μ_{il} — комплексный гауссов коэффициент передачи l -го луча, $E[\mu_{il}] = 0$, $E[|\mu_{il}|^2] = \alpha_i$; θ_{il} — равномерно распределенный на $[0, 2\pi]$ случайный

фазовый сдвиг в l -м луче; $i(l) = \lfloor t_l/T \rfloor$ — целочисленное значение задержки сигнала в l -м луче; $n(t)$ — аддитивный белый гауссов шум со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Будем полагать, что последовательность векторов $\{\mu_i\}$, $\mu_i = (\mu_{i0}, \dots, \mu_{iL-1})'$ представляет собой L -мерный стационарный авторегрессионный случайный процесс с независимыми компонентами:

$$\mu_i = \rho \mu_{i-1} + \sqrt{1 - \rho^2} \chi_i \text{diag}(\alpha_0^{1/2}, \dots, \alpha_{L-1}^{1/2}),$$

где $\{\chi_i\}$ — L -мерный комплексный гауссов случайный процесс с нулевым средним и $E[\chi_i \chi_j^*] = \delta_{ij} \mathbf{I}_L$, $\forall i, j$, символ «*» означает эрмитово сопряжение, символ $\mathbf{I}_L$ означает единичную матрицу размера $L \times L$; параметр $\rho \in [0, 1]$ определяется максимальным доплеровским рассеянием в канале f_d ; в частности, при аппроксимации модели Джейкса, являющейся одной из наиболее распространенных моделей каналов с время-селективными замираниями — авторегрессионной моделью первого порядка, параметр $\rho = J_0(2\pi f_d T)$, где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка (см., например, [25]). Без потери общности можно положить, что $\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l = 1$. Подробный анализ рассматриваемой модели канала приведен в работах [23, 26]. Отметим лишь, что для рассматриваемой модели канала пакетирование ошибок на входе декодера внешнего кода C практически исключается при глубине перемежения порядка $1/\ln(\rho)$.

В приемнике некогерентный демодулятор на i -м такте формирует отсчет r_i , который в широком смысле может интерпретироваться как мягкое решение [для этого выполняется умножение принятого сигнала (2) на две местные $\sin$ и $\cos$ несущие и интегрирование на интервале $[(i-1)T, iT]$]. Можно показать, что отсчет r_i имеет следующий вид [26]:

$$r_i = \sqrt{R\gamma_b} \sum_{k=0}^{K-1} h_{ik} u(v_{i-k}) + n_i, \quad (3)$$

где $\gamma_b = E_b/N_0$ — среднее отношение сигнал/шум, приходящееся на передачу одного бита; $K = \lceil T_m/T \rceil + 1$; здесь и далее используется обозначение $u(v) = ae^{j2\pi b/q}$, если $v = (a, b)$;

$$h_{ik} = \begin{cases} \sum_{s \in A_0} (1 - \varepsilon_s) \mu_{is}, & k = 0, \\ \sum_{s \in A_{k-1}} \varepsilon_s \mu_{is} + \sum_{s \in A_k} (1 - \varepsilon_s) \mu_{is}, & k = 1, 2, \dots, K-1, \end{cases} \quad (4)$$

$A_0, \dots, A_{K-1}$ — непересекающиеся подмножества множества индексов $\{0, 1, \dots, L-1\}$ такие, что $A_k = \{l : i(l) = k\}$, ε_l — дробная часть отношения

t_l/T ; n_i — комплексная гауссова случайная величина, $E[n_i] = 0$, $E[n_i n_i^*] = 1$, $i = 1, 2, \dots, n_{in}$. Как показано в [26], соотношение (4), связывающее величины h_{ik} , $k = 0, 1, \dots, K-1$, и μ_{il} , $l = 0, 1, \dots, L-1$, может быть представлено в матричном виде как $\mathbf{h}_i = \mathbf{Q}\boldsymbol{\mu}_i$, где $\mathbf{h}_i = (h_{i0}, \dots, h_{iK-1})'$; $\mathbf{Q} = [q_{kl}]$ — матрица $K \times L$, $k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$, такая, что элементы q_{kl} и $q_{k+1,l}$ в l -м столбце матрицы, удовлетворяющем условию $(l-1) \in A_{k-1}$, равны $1 - \varepsilon_{l-1}$ и ε_{l-1} соответственно, тогда как остальные элементы столбца равны 0.

В дальнейшем рассмотрении значения величин ρ и γ_b предполагаются известными на приемной стороне.

Декодирование

Двухступенчатый код G декодируется в два этапа. На первом этапе по максимуму правдоподобия (МП) декодируются принятые слова внутреннего кода V с использованием мягких решений. На втором этапе декодируются принятые слова внешнего двоичного кода C с использованием алгебраического декодера; будем полагать, что алгебраический декодер кода C позволяет исправить ошибки кратностью до половины минимального расстояния. В рассматриваемом сценарии передачи, как указано выше, в приемнике отсутствует информация о текущих значениях случайных параметров канала. Поэтому некогерентный МП-декодер внутреннего кода по принятому вектору $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_{n_{in}})'$ выносит решение $\hat{\mathbf{v}}$, определяемое как $\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v} \in V} p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r}|\mathbf{v})$, где условная плотность $p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r}|\mathbf{v})$ имеет вид [23]

$$p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r}|\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi^{n_{in}} \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}}} \exp(-\mathbf{r}^* \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{r}) = \frac{1}{\pi^{n_{in}} \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}}} \exp(-\text{tr}(\mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{r} \mathbf{r}^*)).$$

Здесь $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$ — $n_{in} \times n_{in}$ корреляционная матрица вектора $\mathbf{r}$, соответствующая кодовому слову $\mathbf{v}$, т. е. $\mathbf{K}_{\mathbf{v}} = E[\mathbf{r} \mathbf{r}^* | \mathbf{v}]$; $\text{tr}(\cdot)$ означает след матрицы. Таким образом, МП-декодер внутреннего кода V должен минимизировать метрику $m(\cdot)$ вида

$$m(\mathbf{v}) = \text{tr}(\mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{r} \mathbf{r}^*) + \ln \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}}. \quad (5)$$

Будем полагать, что при передаче по каналу с числом слагаемых $K > 1$ в модели (3) используемый внутренний код V построен так, что $K-1$ последних символов каждого слова представляют собой фиксированный постфикс $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{K-1})$ с фиксированными компонентами $z_1 = (x_1, y_1), \dots, z_{K-1} = (x_{K-1}, y_{K-1})$, т. е. $v_{n_{in}-K+2} = z_1, \dots, v_{n_{in}} = z_{K-1}$. Этим достигается

устранение наложения откликов канала при последовательной передаче слов внутреннего кода, возникающего из-за многолучевого распространения. Тогда элементы k_{lm} , $l, m = 1, \dots, n_{in}$, матрицы $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$ имеют следующий вид:

$$k_{lm} = E[r_l r_m^*] = R \gamma_b \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-1} E[h_{lk} h_{mn}^*] \times \times a_{l-k} a_{m-n} \exp(j2\pi(b_{l-k} - b_{m-n})/q) + \delta_{lm}, \quad (6)$$

где δ_{lm} — дельта Кронекера; значения a_s, b_s , представляющие собой элементы символа $v_s = (a_s, b_s)$, при $-(K-2) \leq s \leq 0$ (с учетом указанного ограничения на код V) назначаются, исходя из условия $v_{-K+2} = z_1, \dots, v_0 = z_{K-1}$. Отметим, что величина $E[h_{lk} h_{mn}^*]$ есть (k, n) -й элемент вещественной матрицы $K \times K$ $\rho^{|l-m|} \mathbf{Q} \text{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{L-1}) \mathbf{Q}'$, где $\mathbf{Q} = [q_{kl}]$ — матрица $K \times L$, $k = 1, 2, \dots, K$, $l = 1, 2, \dots, L$, такая, что элементы q_{kl} и $q_{k+1,l}$ в l -м столбце матрицы, удовлетворяющем условию $(l-1) \in A_{k-1}$, равны $1 - \varepsilon_{l-1}$ и ε_{l-1} соответственно, тогда как остальные элементы столбца равны 0 [26].

В частном случае при передаче по однолучевому каналу выражение (6) существенно упрощается:

$$k_{lm} = R \gamma_b \rho^{|l-m|} a_l a_m \exp(j2\pi(b_l - b_m)/q) + \delta_{lm}.$$

Далее, если замирания в однолучевом канале являются общими замираниями на длине передаваемого подблока, т. е. $\rho \approx 1$, то $k_{lm} = R \gamma_b a_l a_m \exp(j2\pi(b_l - b_m)/q) + \delta_{lm}$ и

$$\mathbf{K}_{\mathbf{v}} = R \gamma_b \mathbf{u}(\mathbf{v}) \mathbf{u}(\mathbf{v})^* + \mathbf{I}_{n_{in}}, \quad (7)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{v}) = (u(v_1), \dots, u(v_{n_{in}}))'$.

В последующем изложении используются два матричных тождества. Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{I}_n + \mathbf{A} \mathbf{B}^*$, где $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ — некоторые матрицы, тогда $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}_n - \mathbf{A}(\mathbf{I}_m + \mathbf{B}^* \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}^*$,

$$\det \mathbf{C} = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{A} \mathbf{B}^*) = \det(\mathbf{I}_m + \mathbf{B}^* \mathbf{A}). \quad (8)$$

Первое из этих выражений представляет собой частный случай тождества Вудбери (Woodbury matrix identity) [27], а второе — частный случай выражения для определителя секционированной матрицы [27]. Применяя эти тождества к (5) и (7), нетрудно показать, что метрику $m(\mathbf{v})$ можно представить в виде

$$m(\mathbf{v}) = \text{tr} \left(\left(\mathbf{I}_{n_{in}} - \left(1/R \gamma_b + \sum_{l=1}^{n_{in}} a_l^2 \right)^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{v}) \mathbf{u}(\mathbf{v})^* \right) \mathbf{r} \mathbf{r}^* \right) +$$

$$+\ln\left(1+R\gamma_b\sum_{l=1}^{n_{in}}a_l^2\right). \quad (9)$$

Из (9) следует, что в этом частном случае ($K = 1, \rho \approx 1$)

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v} \in V} \frac{|\mathbf{u}(\mathbf{v})^* \mathbf{r}|^2}{1/R\gamma_b + \|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|^2} - \ln\left(1+R\gamma_b\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|^2\right), \quad (10)$$

где символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму. Если дополнительно все слова кода V удовлетворяют условию $\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\| = 1$, то

$$\hat{\mathbf{v}} = \arg \max_{\mathbf{v} \in V} |\mathbf{u}(\mathbf{v})^* \mathbf{r}|. \quad (11)$$

Отметим, что при передаче по каналам с доминирующим по интенсивности первым лучом и сильной корреляцией (коэффициент ρ близок к 1) правила (10) и (11) могут рассматриваться как близкая по помехоустойчивости альтернатива МП-декодированию.

В другом крайнем случае, когда замирания в однолучевом канале являются независимыми на длине передаваемого внутреннего кода, т. е. $\rho = 0$, матрица $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$ является диагональной и имеет вид $\mathbf{K}_{\mathbf{v}} = \text{diag}((1+R\gamma_b a_1^2), (1+R\gamma_b a_2^2), \dots, (1+R\gamma_b a_{n_{in}}^2))$. Обозначим через $Y_0(\mathbf{v}), \dots, Y_{p-1}(\mathbf{v})$ непересекающиеся подмножества множества индексов $\{1, 2, \dots, n_i\}$ такие, что $Y_k(\mathbf{v}) = \{l: a_l = k\}$. Тогда метрика $m(\mathbf{v})$ может быть представлена как

$$m(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^{p-1} \left((1+R\gamma_b k^2 \Delta^2)^{-1} \sum_{l \in Y_k(\mathbf{v})} |r_l|^2 + \text{card}(Y_k(\mathbf{v})) \ln(1+R\gamma_b k^2 \Delta^2) \right),$$

где $\text{card}(Y_k(\mathbf{v}))$ есть мощность множества $Y_k(\mathbf{v})$. Как видим, при наличии независимых замираний метрика $m(\mathbf{v})$ зависит только от «амплитудной» части кодового слова и не зависит от его «фазовой» части. Если «амплитудный» код V_a является двоичным, т. е. $p = 2$, то символы $a_l \in \{0, \Delta\}$, поэтому метрика $m(\mathbf{v})$ принимает вид

$$m(\mathbf{v}) = \sum_{l \in Y_0(\mathbf{v})} |r_l|^2 + (1+R\gamma_b \Delta^2)^{-1} \sum_{l \in Y_1(\mathbf{v})} |r_l|^2 + w_H(\mathbf{a}) \ln(1+R\gamma_b \Delta^2),$$

где $w_H(\mathbf{a})$ — вес Хэмминга «амплитудного» компонента $\mathbf{a}$ кодового слова $\mathbf{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Оценка вероятности ошибки. Граница Чернова

Верхняя граница вероятности ошибки на бит $P_b^{(in)}$ для внутреннего кода V имеет стандартный вид аддитивного неравенства:

$$\begin{aligned} P_b^{(in)} &\leq \frac{1}{k_{in}} \sum_{\substack{\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in V \\ \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{v}}} p(\mathbf{v}) t(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) = \\ &= \frac{1}{k_{in} 2^{k_{in}}} \sum_{\substack{\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in V \\ \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{v}}} t(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}), \end{aligned} \quad (12)$$

где $p(\mathbf{v})$ — вероятность передачи кодового слова $\mathbf{v}$; $t(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})$ — число бит, в которых отличаются сообщения, соответствующие кодовым словам $\mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{v}}$ внутреннего кода, и $P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}})$ — вероятность ошибки декодирования для кода из двух слов $\mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{v}}$ внутреннего кода при условии, что было передано слово $\mathbf{v}$ (попарная вероятность ошибки). Второе выражение в правой части (12) записано в предположении, что $p(\mathbf{v}) = 1/M_{in}$, где $M_{in} = 2^{k_{in}}$ — число слов внутреннего кода. Попарная вероятность ошибки в верхней границе (12) определяется как

$$\begin{aligned} P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) &= \\ &= \Pr \left[\mathbf{r}^* (\mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} - \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1}) \mathbf{r} - \ln(\det \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}} / \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}}) > 0 \right], \end{aligned}$$

где $\mathbf{K}_{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}}$ — корреляционные матрицы вектора $\mathbf{r}$, соответствующие передаче кодовых слов $\mathbf{v}$ и $\tilde{\mathbf{v}}$. В работе [23] показано, что попарную вероятность ошибки $P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}})$ можно оценить сверху с использованием границы Чернова в виде

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) < \min_{0 < \lambda < 1} \frac{(\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}})^{1-\lambda} (\det \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}})^{\lambda}}{\det((1-\lambda)\mathbf{K}_{\mathbf{v}} + \lambda\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}})}. \quad (13)$$

Подставляя правую часть (13) в правую часть аддитивной границы (12), получаем верхнюю оценку для вероятности $P_b^{(in)}$ на основе границы Чернова; при использовании этой оценки в численных расчетах оптимизация по параметру λ выполняется для каждого слагаемого в аддитивной границе.

Декодирование внешнего кода C выполняется алгебраическим декодером, позволяющим исправить ошибки кратностью до половины минимального расстояния. Как отмечалось выше, глубина перемежения выбирается из условия исключения пакетирования ошибок на входе декодера внешнего кода C , поэтому вероятность ошибки декодирования на бит на выходе внешнего декодера оценивается стандартным выражением [28]

$$P_b^{(out)} \leq \sum_{i=t+1}^{n_{out}} \frac{i+t}{n_{out}} C_{n_{out}}^i (P_b^{(in)})^i (1-P_b^{(in)})^{n_{out}-i}, \quad (14)$$

где t — максимальное число ошибок, исправляемых кодом C .

Граница Чернова (13), наряду с собственно получением оценки сверху для попарной вероятности $P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}})$, в ряде случаев может быть использована для поиска дистанционной характеристики сигнально-кодовой конструкции (включающей внутренний код V и сигнальное созвездие), которая определяет помехоустойчивость при слабом шуме. Рассмотрим два таких случая.

Первый случай. Передача ведется по однолучевому каналу с медленными замираниями на длине слова внутреннего кода, т. е. $\rho \approx 1$. Тогда граница (13) может быть приведена к более простому виду следующим образом. Используя тождество (8) [27], получаем из (7)

$$\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}} = \det(R\gamma_b \mathbf{u}(\mathbf{v})\mathbf{u}(\mathbf{v})^* + \mathbf{I}_{n_{in}}) = 1 + R\gamma_b \|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|^2. \quad (15)$$

Для выражения в знаменателе в правой части (13) с использованием тождества (8) получаем

$$\begin{aligned} \det((1-\lambda)\mathbf{K}_{\mathbf{v}} + \lambda\mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}}) &= \\ &= \det \left(\mathbf{I}_{n_{in}} + R\gamma_b [(1-\lambda)\mathbf{u}(\mathbf{v}) \quad \lambda\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{v})^* \\ \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})^* \end{bmatrix} \right) = \\ &= \det \left(\mathbf{I}_2 + R\gamma_b \begin{bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{v})^* \\ \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})^* \end{bmatrix} [(1-\lambda)\mathbf{u}(\mathbf{v}) \quad \lambda\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})] \right) = \\ &= \det \left(\mathbf{I}_2 + R\gamma_b \begin{bmatrix} (1-\lambda)\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|^2 & \lambda\mathbf{u}(\mathbf{v})^* \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}}) \\ (1-\lambda)\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})^* \mathbf{u}(\mathbf{v}) & \lambda\|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\|^2 \end{bmatrix} \right) = \\ &= (1 + R\gamma_b (1-\lambda)\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|^2) \times \\ &\times (1 + R\gamma_b \lambda\|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\|^2) - \lambda(1-\lambda) \times \\ &\times (R\gamma_b)^2 |\mathbf{u}(\mathbf{v})^* \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Подстановка (15) и (16) в (13) приводит к итоговому выражению

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) < \min_{0 < \lambda < 1} \frac{(1 + R\gamma_b \|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|^2)^{1-\lambda} (1 + R\gamma_b \|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\|^2)^{\lambda}}{\left((1 + R\gamma_b (1-\lambda)\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|^2) \times \right. \\ \times (1 + R\gamma_b \lambda\|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\|^2) - (R\gamma_b)^2 \times \\ \times \lambda(1-\lambda) |\mathbf{u}(\mathbf{v})^* \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})|^2 \left. \right)}.$$

При $\gamma_b \gg 1$ и $\lambda = 1/2$

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) < \frac{4}{R\gamma_b \|\mathbf{u}(\mathbf{v})\| \|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\| d_{\chi}^2(\mathbf{u}(\mathbf{v})/\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|, \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})/\|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\|)},$$

где величина

$$d_{\chi}(\mathbf{u}(\mathbf{v})/\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|, \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})/\|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\|) = \sqrt{1 - \left| \frac{\mathbf{u}(\mathbf{v})^* \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})}{\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\| \|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\|} \right|^2}$$

представляет собой хордальное расстояние (chordal distance) между векторами $\mathbf{u}(\mathbf{v})/\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|$ и $\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})/\|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})\|$. Если для всех слов кода V норма $\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\|$ одинакова, то $\|\mathbf{u}(\mathbf{v})\| = \sqrt{n_{in}}$ и

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) < \frac{4}{R\gamma_b n_{in} d_{\chi}^2(\mathbf{u}(\mathbf{v})/\sqrt{n_{in}}, \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})/\sqrt{n_{in}})},$$

так что максимизация минимального хордального расстояния

$$d_{\chi, \min} = \min_{\substack{\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in V \\ \mathbf{v} \neq \tilde{\mathbf{v}}}} \sqrt{1 - n_{in}^{-1} |\mathbf{u}(\mathbf{v})^* \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{v}})|}$$

эквивалентна минимизации максимального модуля коэффициента корреляции между сигналами внутреннего кода V . Поэтому минимальное хордальное расстояние может рассматриваться как подходящий критерий при выборе кода V при передаче по однолучевому каналу с коэффициентом корреляции ρ , близким к 1.

Второй случай. Передача ведется по однолучевому каналу с независимыми замираниями на длине передаваемого подблока, т. е. $\rho = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{v}} &= \text{diag}((1 + R\gamma_b a_1^2), (1 + R\gamma_b a_2^2), \dots, \\ &(1 + R\gamma_b a_{n_{in}}^2)), \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}} = \prod_{l=1}^{n_{in}} (1 + R\gamma_b a_l^2); \\ \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}} &= \text{diag}((1 + R\gamma_b \tilde{a}_1^2), (1 + R\gamma_b \tilde{a}_2^2), \dots, \\ &(1 + R\gamma_b \tilde{a}_{n_{in}}^2)), \det \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}} = \prod_{l=1}^{n_{in}} (1 + R\gamma_b \tilde{a}_l^2), \end{aligned}$$

так что граница (13) принимает вид

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) < \min_{0 < \lambda < 1} \prod_{l=1}^{n_{in}} \frac{(1 + R\gamma_b a_l^2)^{1-\lambda} (1 + R\gamma_b \tilde{a}_l^2)^{\lambda}}{(1-\lambda)(1 + R\gamma_b a_l^2) + \lambda(1 + R\gamma_b \tilde{a}_l^2)}. \quad (17)$$

Пусть «амплитудный» код V_a является двоичным, т. е. $\rho = 2$, и символы $a_l \in \{0, \Delta\}$.

Обозначим через $w_1(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}})$ и $w_2(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}})$ число пар $(a_l, \tilde{a}_l)$, $1 \leq l \leq n_i$, в наборе $((a_1, \tilde{a}_1), (a_2, \tilde{a}_2), \dots, (a_{n_i}, \tilde{a}_{n_i}))$ таких, что $(a_l, \tilde{a}_l) = (0, \Delta)$ и $(a_l, \tilde{a}_l) = (\Delta, 0)$ соответственно. Тогда при $\gamma_b \gg 1$ и $\lambda = 1/2$ из (17) получаем

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) < \frac{2^{(w_1(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}) + w_2(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}))/2}}{(R\gamma_b \Delta^2)^{(w_1(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}) + w_2(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}))/2}} = \frac{2^{w_H(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}})/2}}{(R\gamma_b \Delta^2)^{w_H(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}})/2}}, \quad (18)$$

где $w_H(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}) = (w_1(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}) + w_2(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}))/2$ — расстояние Хэмминга между словами $\mathbf{a}$ и $\tilde{\mathbf{a}}$. Из границы (18) следует, что минимальное расстояние Хэмминга $w_{H,\min} = \min_{\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}} \in V_a, \mathbf{a} \neq \tilde{\mathbf{a}}} w_H(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}})$ может рассматриваться как подходящий критерий для выбора кода V_a при передаче по однолучевому каналу с малым коэффициентом корреляции ρ .

Точное значение попарной вероятности ошибки $P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}})$

Практика использования границы Чернова показывает, что во многих случаях она не обеспечивает достаточной точности (см., например, численные результаты, приведенные в [24]). Вместе с тем, как отмечалось в работе [24], точное вычисление попарных вероятностей ошибки в замкнутой форме оказывается весьма сложным даже для каналов без памяти. Один из возможных подходов состоит в получении точного выражения для попарной вероятности ошибки посредством использования характеристических функций логарифма отношения правдоподобия для рассматриваемой пары кодовых слов [24]. Предложенная в работе [24] техника точного вычисления попарной вероятности ошибки для каналов без памяти может быть обобщена на рассматриваемый сценарий передачи.

Характеристическая функция (х.ф.) логарифма отношения правдоподобия, которая используется для вычисления попарной вероятности ошибки $P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}})$, где $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}$ — два слова внутреннего кода длиной n_{in} , для рассматриваемого случая имеет вид

$$C(\omega; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\mathbb{C}^{n_{\text{in}}}} \left(\frac{p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \tilde{\mathbf{v}})}{p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \mathbf{v})} \right)^{j\omega} p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \mathbf{v}) d\mathbf{r}, \quad (19)$$

где $p_{\mathbf{r}|\mathbf{v}}(\mathbf{r} | \mathbf{v}) = (\pi^{n_{\text{in}}} \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}})^{-1} \exp(-\mathbf{r}^* \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1} \mathbf{r})$. Для попарной вероятности ошибки можно указать равенство, основанное на использовании х.ф. логарифма отношения правдоподобия [24]

$$P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{C(\alpha - j\beta; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})}{\beta + j\alpha} d\alpha, \quad 0 < \beta < 1.$$

Тогда для границы вероятности ошибки декодирования по МП внутреннего кода (12) можно записать выражение

$$P_b^{(in)} \leq \frac{1}{\pi 2^{k_{\text{in}}} k_{\text{in}}} \times \sum_{\substack{\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in V \\ \mathbf{v} \neq \tilde{\mathbf{v}}}} t(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) C(\alpha - j\beta; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) \times \int_0^\infty \operatorname{Re} \frac{1}{\beta + j\alpha} d\alpha. \quad (20)$$

Задача состоит в получении замкнутого выражения для х.ф. $C(\omega; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})$, определенной выражением (19). После этого вычисление вероятности $P_b^{(in)}$ по формуле (20) может быть легко выполнено путем одномерного численного интегрирования по переменной α . Выражение (19) можно представить как

$$C(\omega; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{\pi^{n_{\text{in}}} (\det \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}})^{j\omega} (\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}})^{1-j\omega}} \times \int_{\mathbb{C}^{n_{\text{in}}}} \exp(-\mathbf{r}^* (j\omega \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} + (1-j\omega) \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1}) \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (21)$$

Обозначим $\mathbf{U}_1 = \operatorname{Re}(j\omega \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} + (1-j\omega) \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1})$, $\mathbf{U}_2 = \operatorname{Im}(j\omega \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} + (1-j\omega) \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1})$, и

$$\mathbf{U} = j\omega \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} + (1-j\omega) \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1}, \quad (22)$$

т. е. $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + j\mathbf{U}_2$. Интеграл в правой части (21) для случая, когда $\mathbf{U}$ — положительно определенная эрмитова матрица, равен

$$\int_{\mathbb{C}^{n_{\text{in}}}} \exp(-\mathbf{r}^* \mathbf{U} \mathbf{r}) d\mathbf{r} = \frac{\pi^{n_{\text{in}}}}{\det \mathbf{U}} = \frac{\pi^{n_{\text{in}}}}{\det(j\omega \mathbf{K}_{\tilde{\mathbf{v}}}^{-1} + (1-j\omega) \mathbf{K}_{\mathbf{v}}^{-1})}.$$

К сожалению, матрица $\mathbf{U}$, определенная равенством (22), не оказывается эрмитовой для требуемых значений $\omega = \alpha - j\beta$, $0 \leq \alpha < \infty$, $\beta > 0$. Поэтому дальнейшее продвижение требует рассмотрения иных ограничений на вид матрицы $\mathbf{U}$.

Поскольку $\mathbf{r} = \mathbf{x} + j\mathbf{y}$, где $\mathbf{x} = \operatorname{Re} \mathbf{r}$, $\mathbf{y} = \operatorname{Im} \mathbf{r}$, то можно записать, что

$$\mathbf{r}^* \mathbf{U} \mathbf{r} = (\mathbf{x}' - j\mathbf{y}') \mathbf{U} (\mathbf{x} + j\mathbf{y}) = \mathbf{x}' \mathbf{U} \mathbf{x} + j\mathbf{x}' \mathbf{U} \mathbf{y} - j\mathbf{y}' \mathbf{U} \mathbf{x} + \mathbf{y}' \mathbf{U} \mathbf{y}. \quad (23)$$

Рассмотрим отдельно разность $j\mathbf{x}' \mathbf{U} \mathbf{y} - j\mathbf{y}' \mathbf{U} \mathbf{x}$:

$$j\mathbf{x}' \mathbf{U} \mathbf{y} - j\mathbf{y}' \mathbf{U} \mathbf{x} =$$

$$\begin{aligned}
 &= j\mathbf{x}'(\mathbf{U}_1 + j\mathbf{U}_2)\mathbf{y} - j\mathbf{y}'(\mathbf{U}_1 + j\mathbf{U}_2)\mathbf{x} = \\
 &= j\mathbf{x}'\mathbf{U}_1\mathbf{y} - \mathbf{x}'\mathbf{U}_2\mathbf{y} - j\mathbf{y}'\mathbf{U}_1\mathbf{x} + \mathbf{y}'\mathbf{U}_2\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

В случае, когда матрицы $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ симметрические, $j\mathbf{x}'\mathbf{U}_1\mathbf{y} - j\mathbf{y}'\mathbf{U}_1\mathbf{x} = 0$, и тогда $\mathbf{r}'\mathbf{U}\mathbf{r} = \mathbf{x}'\mathbf{U}_1\mathbf{x} + \mathbf{y}'\mathbf{U}_2\mathbf{y}$. Определим условия, при которых матрицы $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ симметрические. Поскольку матрицы $\mathbf{K}_v$, $\mathbf{K}_{\tilde{v}}$ эрмитовы и положительно определенные, то и $\mathbf{K}_v^{-1}$, $\mathbf{K}_{\tilde{v}}^{-1}$ тоже эрмитовы и положительно определенные. Поэтому их можно представить в виде $\mathbf{K}_v^{-1} = \mathbf{A}_v + j\mathbf{B}_v$ и $\mathbf{K}_{\tilde{v}}^{-1} = \mathbf{A}_{\tilde{v}} + j\mathbf{B}_{\tilde{v}}$, где $\mathbf{A}_v$, $\mathbf{A}_{\tilde{v}}$ — вещественные симметрические матрицы, а $\mathbf{B}_v$, $\mathbf{B}_{\tilde{v}}$ — вещественные кососимметрические матрицы. Тогда можно записать, что с учетом равенства $\omega = \alpha - j\beta$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= j\omega\mathbf{K}_{\tilde{v}}^{-1} + (1 - j\omega)\mathbf{K}_v^{-1} = \\
 &= (\beta + j\alpha)(\mathbf{A}_{\tilde{v}} + j\mathbf{B}_{\tilde{v}}) + (1 - \beta - j\alpha)(\mathbf{A}_v + j\mathbf{B}_v),
 \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}_1 &= \text{Re } \mathbf{U} = \beta\mathbf{A}_{\tilde{v}} + (1 - \beta)\mathbf{A}_v - \alpha\mathbf{B}_{\tilde{v}} + \alpha\mathbf{B}_v; \\
 \mathbf{U}_2 &= \text{Im } \mathbf{U} = \alpha\mathbf{A}_{\tilde{v}} - \alpha\mathbf{A}_v + \beta\mathbf{B}_{\tilde{v}} + (1 - \beta)\mathbf{B}_v.
 \end{aligned}$$

Для того чтобы матрицы $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$ были симметрическими, нужно, чтобы при всех $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta > 0$ и $\tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{v}$ матрицы $-\alpha\mathbf{B}_{\tilde{v}} + \alpha\mathbf{B}_v$ и $\beta\mathbf{B}_{\tilde{v}} + (1 - \beta)\mathbf{B}_v$ были бы симметрическими, что возможно лишь при $\mathbf{B}_{\tilde{v}} = \mathbf{B}_v = \mathbf{0}$. Последнее равенство означает, что матрицы $\mathbf{K}_v^{-1}$ для всех $\mathbf{v}$ должны быть вещественными и положительно определенными, а следовательно, и матрицы $\mathbf{K}_v$ для всех $\mathbf{v}$ тоже должны быть вещественными и положительно определенными. Рассмотрим ограничения, при которых эти условия выполняются. Элементы матрицы $\mathbf{K}_v$ вычисляются по формуле (6), где величины h_{lk} определены выражением (4). Тогда можно записать, что для $l, k = 1, 2, \dots, K - 1$

$$\begin{aligned}
 E[h_{lk}h_{mn}^*] &= \sum_{s \in A_{k-1}} \sum_{t \in A_{n-1}} \varepsilon_s \varepsilon_t E[\mu_{ls}\mu_{mt}^*] + \\
 &+ \sum_{s \in A_{k-1}} \sum_{t \in A_n} \varepsilon_s (1 - \varepsilon_t) E[\mu_{ls}\mu_{mt}^*] + \\
 &+ \sum_{s \in A_k} \sum_{t \in A_{n-1}} (1 - \varepsilon_s) \varepsilon_t E[\mu_{ls}\mu_{mt}^*] + \\
 &+ \sum_{s \in A_k} (1 - \varepsilon_t)(1 - \varepsilon_s) E[\mu_{ls}\mu_{mt}^*]. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Поскольку ковариации величин μ_{ls} выражаются формулой $E[\mu_{ls}\mu_{mt}^*] = \rho^{-|l-m|} \sqrt{\alpha_s \alpha_t} \delta_{st}$, т. е. представляют собой вещественные числа, то из равенства (24) следует, что $E[h_{lk}h_{mn}^*]$ — вещественное число для всех значений индексов l, k, m, n (случаи $l = 0$ и (или) $k = 0$ доказываются

аналогично). Следовательно, величины k_{lm} (6) принимают вещественные значения, если значения комплексной экспоненты в правой части (6) вещественны, т. е. если $2\pi(b_{l-n} - b_{m-n})/q = i\pi$, где i — целое. Отсюда следует, что величина $2(b_l - b_m)/q$ должна принимать целые значения для всех l и m . Это ограничение выполняется, если а) $q = 1$ и все значения $b_l = 0$, т. е. «фазовый» код отсутствует, и б) число различных значений фаз q четное и величины $b_l, b_m \in \{l, l + q/2\}$, $l = 0, 1, \dots, q/2 - 1$, т. е. принимают только два значения, которые соответствуют противоположным фазам. Указанное обстоятельство означает, что вычисление точных значений попарной вероятности ошибки $P(\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}})$ удастся провести для внутренних кодов V длиной n_{in} над алфавитом $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, где $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_{p-1}\}$ — алфавит амплитуд, $A_l \geq 0, l = 0, 1, \dots, p - 1$, а алфавит фаз $\mathcal{B} = \{0\}$ и $q = 1$ или $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ и $q = 2$. При выполнении этих условий

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{C}^{n_{\text{in}}}} \exp(-\mathbf{r}'(j\omega\mathbf{K}_{\tilde{v}}^{-1} + (1 - j\omega)\mathbf{K}_v^{-1})\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \\
 &= \int_{\mathbb{C}^{n_{\text{in}}}} \exp(-\mathbf{r}'\mathbf{U}\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^{n_{\text{in}}}} \exp(-\mathbf{x}'(\mathbf{U}_1 + j\mathbf{U}_2)\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^2, \quad (25)
 \end{aligned}$$

где $\mathbf{U}_1 = \beta\mathbf{A}_{\tilde{v}} + (1 - \beta)\mathbf{A}_v$ — вещественная положительно определенная матрица при $0 < \beta < 1$; $\mathbf{U}_2 = \alpha\mathbf{A}_{\tilde{v}} - \alpha\mathbf{A}_v$ — вещественная симметрическая матрица. Вычисление интеграла в правой части (25) выполняется с использованием следующего равенства [29]:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \exp(-\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} - j\mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{\pi^{N/2}}{\sqrt{\det(\mathbf{A} + j\mathbf{B})}},$$

где $\mathbf{A}$ — положительно определенная $N \times N$ матрица, а $\mathbf{B}$ — симметрическая $N \times N$ матрица. С использованием этого равенства получаем, что

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{C}^{n_{\text{in}}}} \exp(-\mathbf{r}'(j\omega\mathbf{K}_{\tilde{v}}^{-1} + (1 - j\omega)\mathbf{K}_v^{-1})\mathbf{r}) d\mathbf{r} &= \\
 &= \frac{\pi^{n_{\text{in}}}}{\det(j\omega\mathbf{K}_{\tilde{v}}^{-1} + (1 - j\omega)\mathbf{K}_v^{-1})}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Подставляя правую часть (26) в выражение (21), получаем, что

$$\begin{aligned}
 C(\omega; \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) &= \frac{1}{(\det \mathbf{K}_{\tilde{v}})^{j\omega} (\det \mathbf{K}_v)^{1-j\omega}} \times \\
 &\times \frac{1}{\det(j\omega\mathbf{K}_{\tilde{v}}^{-1} + (1 - j\omega)\mathbf{K}_v^{-1})},
 \end{aligned}$$

и после умножения правой части на

$$1 = \det \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}} \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}} / (\det \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}} \det \mathbf{K}_{\mathbf{v}})$$

получаем окончательное выражение

$$C(\omega; \mathbf{v}, \hat{\mathbf{v}}) = \frac{(\det \mathbf{K}_{\mathbf{v}})^{j\omega} (\det \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}})^{1-j\omega}}{\det(j\omega \mathbf{K}_{\mathbf{v}} + (1-j\omega) \mathbf{K}_{\hat{\mathbf{v}}})}. \quad (27)$$

Равенство (27) далее используется в выражении (20) для численного вычисления вероятности $P_b^{(in)}$ при любом $0 < \beta < 1$.

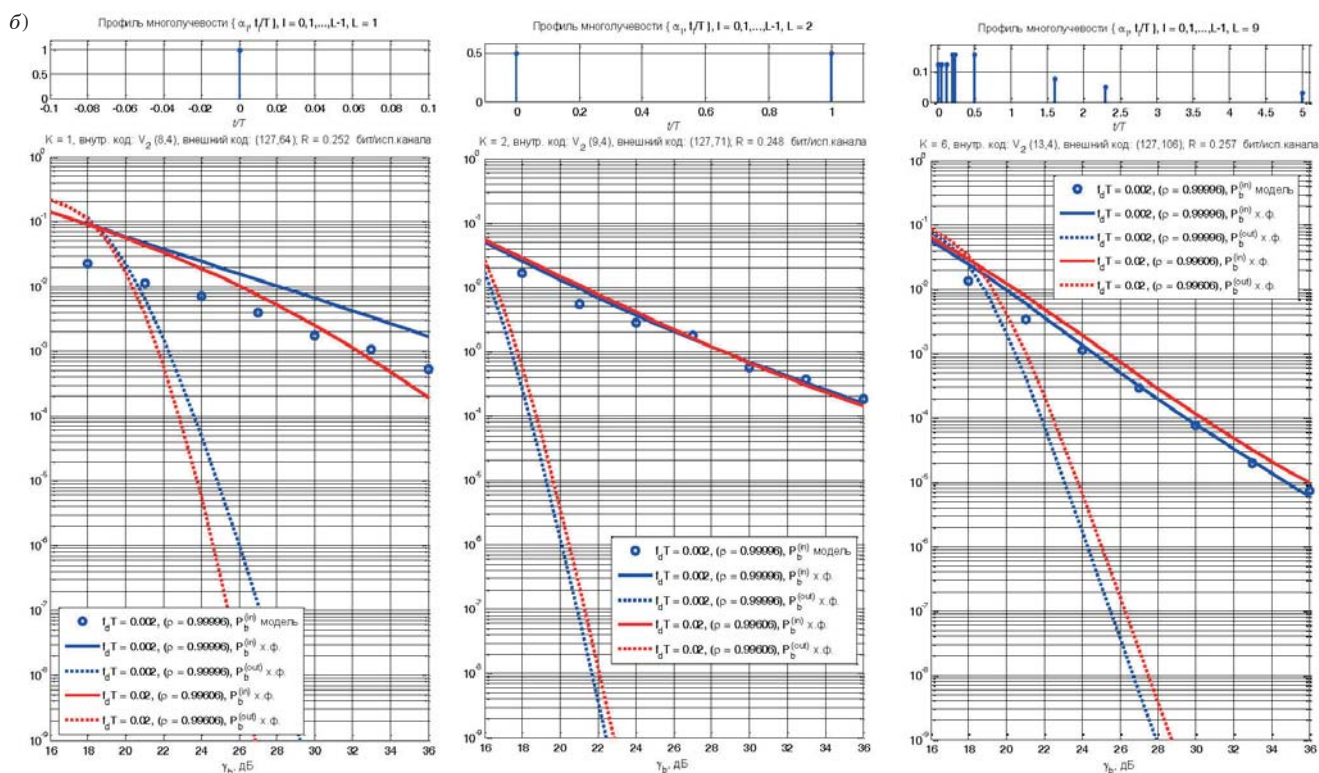
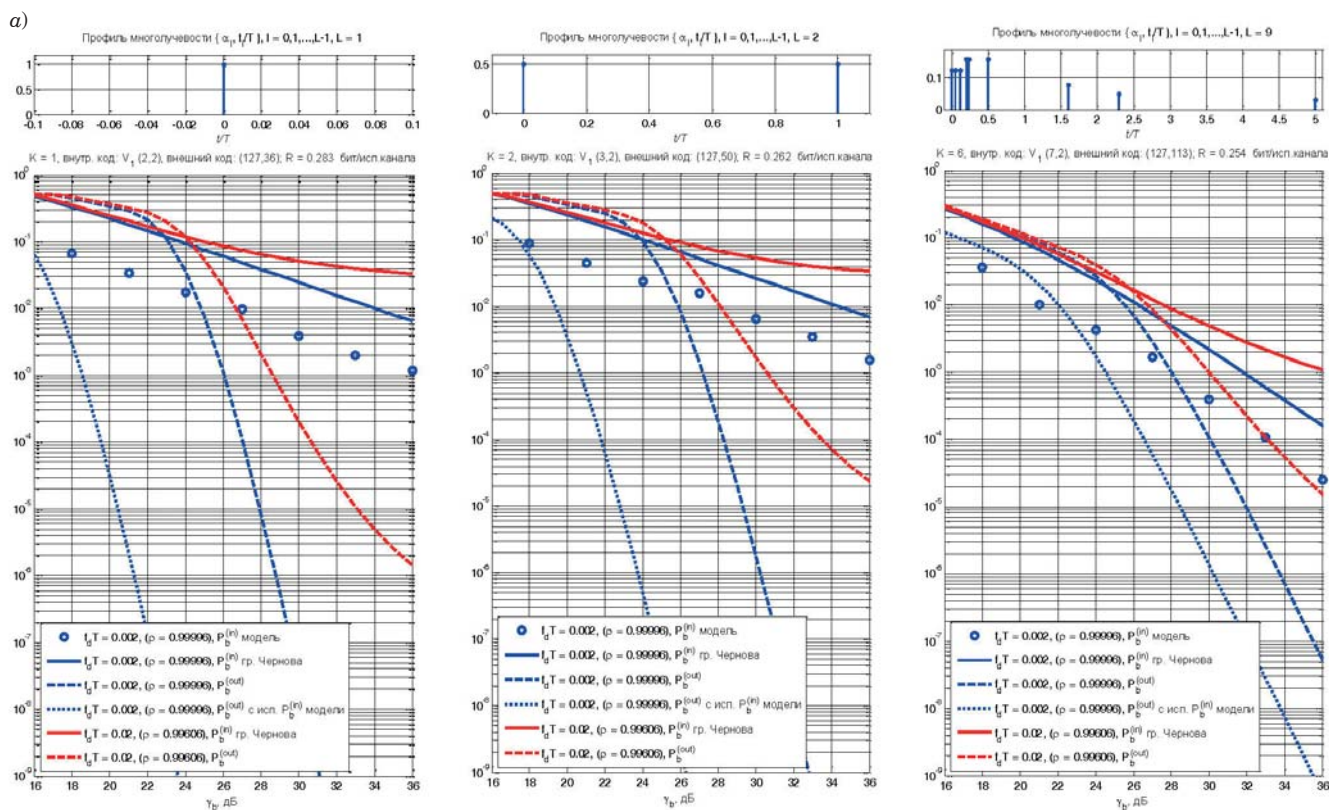
Численные результаты

Помехоустойчивость рассматриваемой схемы передачи определяется тремя основными параметрами: отношением сигнал/шум γ_b , профилем многолучевости и нормированным значением доплеровского рассеяния $f_d T$. Рассмотрим влияние профиля многолучевости и доплеровского рассеяния применительно к следующим трем моделям канала: 1) однолучевому каналу со значениями параметров $t_0 = 0$, $\alpha_0 = 1$, $L = 1$, $K = 1$; 2) двухлучевому каналу с $t_0 = 0$, $t_1 = T$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$, $L = 2$, $K = 2$, т. е. с равными интенсивностями независимых лучей, и 3) каналу, задаваемому моделью Extended Typical Urban (ETU) model [30] с девятью независимыми лучами со значениями параметров $L = 9$, $(t_0, \dots, t_8) = (0, 50, 120, 200, 230, 500, 1600, 2300, 5000)$ нс, $(\alpha_0, \dots, \alpha_8)_{\text{дБ}} = (-1, -1, -1, 0, 0, 0, -3, -5, -7)$, что соответствует для принятой в настоящей работе нормировке $\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l = 1$ значениям $(\alpha_0, \dots, \alpha_8) = (0,1241; 0,1241; 0,1241; 0,1563; 0,1563; 0,1563; 0,0783; 0,0494; 0,0312)$. При рассмотрении ETU model будем полагать, для определенности, что длительность тактового интервала $T = 1$ мкс; в этом случае в модели канала с дискретным временем (3) число слагаемых $K = 6$. Величина нормализованного максимального доплеровского рассеяния $f_d T$ для типичных сценариев передачи в беспроводных каналах сантиметрового и миллиметрового диапазонов может находиться, как отмечалось в работе [23], в пределах от $\sim 10^{-5}$ до $\sim 10^{-1}$.

Рассмотрим три варианта коротких внутренних кодов. Для всех вариантов кодов выберем постфикс $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{K-1}) = ((x_1, y_1), \dots, (x_{K-1}, y_{K-1})) = ((0, 0), \dots, (0, 0))$. Такой постфикс не увеличивает энергетические затраты на передачу слова внутреннего кода и представляет собой, по сути, нулевой защитный интервал. Первый вариант — с вырожденным «амплитудным» кодом V_a — имеет вид $V_1 = V_a \times V_b$, где $V_a = \{(1, \mathbf{x})\}$; $V_b = \{(0, 0, \mathbf{y}), (0, 1, \mathbf{y}), (0, 2, \mathbf{y}), (0, 3, \mathbf{y})\}$,

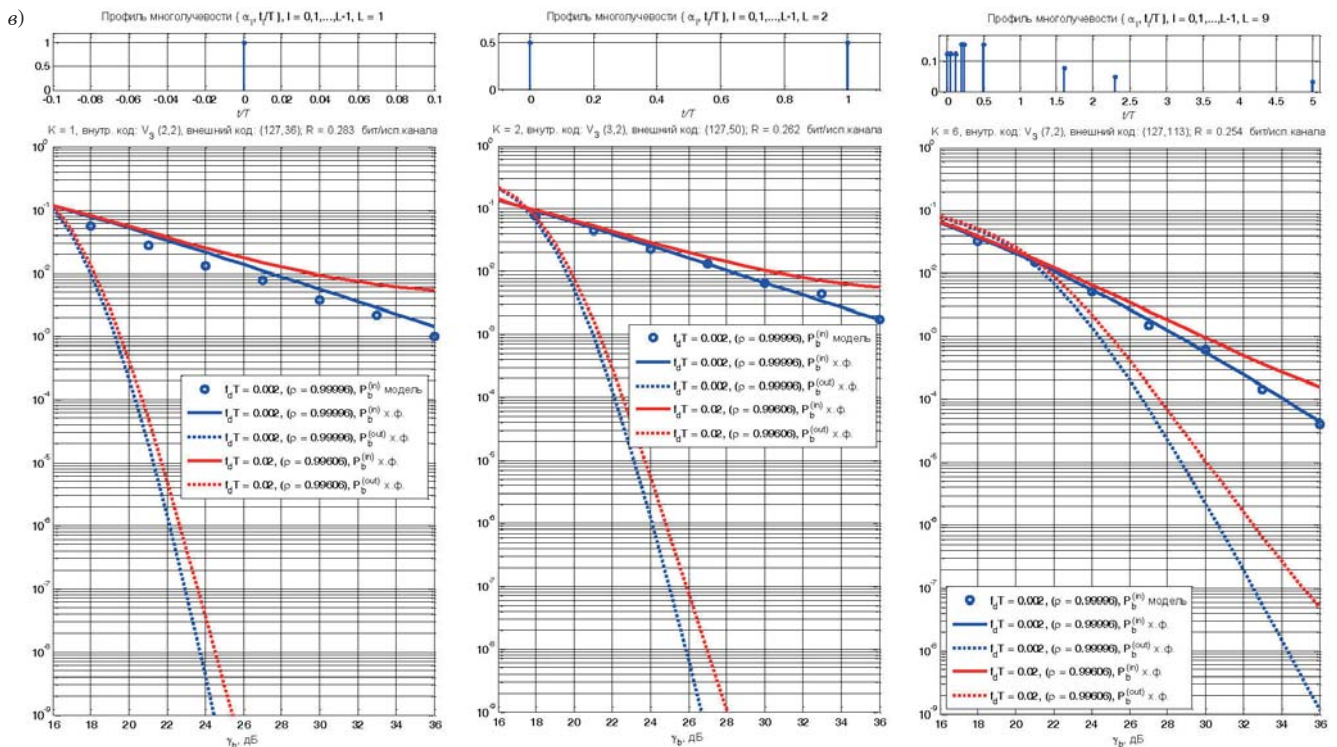
с параметрами: $\Delta = 1$, $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_{in} = 2$, $n_{in} = 2 + K - 1$, $R_{in} = 2/(2 + K - 1)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{K-1})$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{K-1})$. Второй вариант — с вырожденным «фазовым» кодом V_b — имеет вид $V_2 = V_a \times V_b$, где $V_a = \{(\Delta \mathbf{c}_i, \mathbf{x}) \mid i = 1, 2, \dots, 16\}$, $\mathbf{c}_i$ — слово двоичного кода Хэмминга (8, 4); $V_b = \{(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \mathbf{y})\}$, с параметрами: $\Delta = 2^{1/2}$, $k_1 = 4$, $k_2 = 0$, $k_{in} = 4$, $n_{in} = 8 + K - 1$, $R_{in} = 4/(8 + K - 1)$. Третий вариант, в котором присутствуют оба кода, задан как $V_3 = V_a \times V_b$, где $V_a = \{(\Delta, 2\Delta, \mathbf{x}), (2\Delta, \Delta, \mathbf{x})\}$, $\Delta = 2 \cdot 10^{-1/2}$; $V_b = \{(0, 0, \mathbf{y}), (0, 1, \mathbf{y})\}$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $k_{in} = 2$, $n_{in} = 2 + K - 1$, $R_{in} = 2/(2 + K - 1)$. Для указанных трех моделей канала на рисунке, а–в представлены графики зависимости оценки вероятностей $P_b^{(in)}$ и $P_b^{(out)}$ от отношения сигнал/шум на бит γ_b и нормированного значения доплеровского рассеяния $f_d T$. Результаты, приведенные на рисунке, а, получены с использованием выражений (14), (12) и (13), т. е. основаны на применении границы Чернова, а на рисунке, б и в — с использованием выражений (14), (12), (20) и (27), обеспечивающих точное вычисление попарной вероятности ошибки. Применение разной техники оценивания [выражение (13) в одном случае и (20), (27) — в другом] обусловлено тем, что для первого варианта внутреннего кода не выполняются условия $\mathcal{B} = \{0\}$ и $q = 1$ или $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ и $q = 2$ [см. замечание перед формулой (25)]. Поэтому для оценки вероятности ошибки декодирования для первого варианта внутреннего кода приходится применять границу Чернова (13), а не вычислять точное значение попарной вероятности ошибки согласно выражениям (20) и (27). Кроме вычисленных оценок вероятностей $P_b^{(in)}$ и $P_b^{(out)}$, на рисунке показаны также результаты моделирования процедуры декодирования слова внутреннего кода. Во всех рассмотренных случаях предполагалось использование на внешней ступени двоичных кодов БЧХ длиной $n_{out} = 127$, скорость которых выбиралась так, чтобы обеспечить значение общей скорости двухступенчатого кода $R = R_{in} R_{out} \approx 1/4$ бит/использование канала.

Замечание. Как видно из графиков рисунка, а, оценки вероятности $P_b^{(in)}$ для первого кода, которые были получены с использованием границы Чернова, довольно существенно, в 4–6 раз, превосходят значения, полученные при моделировании. В этой связи для данного примера более адекватным является оперирование с оценкой вероятности $P_b^{(out)}$, полученной заменой в границе (14) оценки вероятности $P_b^{(in)}$, полученной с использованием границы Чернова, на оценку, полученную путем моделирования. Такая поправка выражается в сдвиге влево графиков для вероятности $P_b^{(out)}$, полученных на основе границы Чернова. Так, при вероятности ошибки $P_b^{(out)}$ порядка $10^{-5} \dots 10^{-6}$ и нормированном значении доплеровского рассеяния $f_d T = 0,002$ такой сдвиг



■ Зависимости вероятностей ошибки $P_b^{(in)}$ и $P_b^{(out)}$ от отношения сигнал/шум на бит γ_b для трех моделей канала и первого (а), второго (б) и третьего (в) варианта внутреннего кода

■ Error probabilities $P_b^{(in)}$ and $P_b^{(out)}$ vs signal-to-noise ratio per bit γ_b for three channel models and the first (а), second (б) and third (в) inner code



■ Зависимости вероятностей ошибки $P_b^{(in)}$ и $P_b^{(out)}$ от отношения сигнал/шум на бит γ_b для трех моделей канала и первого (а), второго (б) и третьего (в) варианта внутреннего кода (окончание рисунка)

■ Error probabilities $P_b^{(in)}$ and $P_b^{(out)}$ vs signal-to-noise ratio per bit γ_b for three channel models and the first (a), second (б) and third (в) inner code (Ending of the Figure)

влево составляет примерно 7,5 дБ для однолучевого канала, 6,5 дБ для двухлучевого канала и 3,5 дБ для канала, задаваемого ETU model.

Приведенные графики позволяют сделать следующие выводы.

1. *Влияние профиля многолучевости.* Прежде всего отметим, что для всех вариантов внутреннего кода наименьшая вероятность ошибки на внутренней ступени кодирования $P_b^{(in)}$ достигается в канале, задаваемом ETU model. Однако необходимость введения постфикса с длиной $K = 5$ оборачивается необходимостью использовать более «слабые» внешние коды с большей скоростью в этом канале, в результате чего итоговое влияние профиля многолучевости оказывается более сложным. В однолучевом канале более эффективными оказались первый и третий варианты кодирования. С появлением дополнительных лучей в профиле многолучевости помехоустойчивость этих вариантов кодирования снижается, и более предпочтительным оказывается второй вариант кодирования, при котором внутренний код имеет большую длину $n_{in} = 8 + K - 1$, чем внутренние коды в первом и третьем вариантах с $n_{in} = 2 + K - 1$. Важно отметить, что этот вариант кодирования обеспечивает энергетический выигрыш при передаче в многолучевом канале относительно однолучевого канала, который до-

стигает примерно 6 дБ для двухлучевого канала и 1,5 дБ для канала, задаваемого ETU model (при вероятности ошибки порядка $10^{-5} \dots 10^{-6}$). Можно предположить, что для достижения указанного эффекта (использования разнесения лучей в канале) длина внутреннего кода должна быть заметно больше числа слагаемых K в модели (3).

При анализе влияния профиля многолучевости на каждый из представленных вариантов кодирования можно отметить следующее: 1) помехоустойчивость первого варианта кодирования снижается с увеличением числа лучей; 2) помехоустойчивость второго варианта оказывается максимальной для двухлучевого канала и примерно одинаковой в канале, задаваемом ETU model, и однолучевом канале (с энергетическим проигрышем примерно 4–5 дБ относительно двухлучевого канала); 3) помехоустойчивость третьего варианта кодирования (как и первого) оказывается максимальной в однолучевом канале и довольно резко снижается с увеличением числа лучей.

Если сценарий передачи несколько обобщить в том плане, что а) профиль многолучевости канала может изменяться с течением времени, принимая, скажем, вид одной из трех указанных конфигураций, и б) кодер располагает информацией о текущем профиле, то второй вариант коди-

вания окажется наиболее предпочтительным для такого сценария. Действительно, как видно из графиков, при нормированном значении доплеровского рассеяния $f_d T = 0,002$ для обеспечения вероятности ошибки не более 10^{-6} при втором варианте кодирования требуется отношение сигнал/шум не менее 26 дБ, тогда как при первом и третьем вариантах кодирования требуемые значения отношения сигнал/шум должны быть не менее 30 и 30,5 дБ соответственно.

2. *Влияние величины максимального доплеровского рассеяния.* Наиболее чувствительным к возрастанию величины максимального доплеровского рассеяния оказался первый вариант кодирования. Так, с увеличением нормированного значения доплеровского рассеяния $f_d T$ на порядок, от 0,002 до 0,02, энергетический проигрыш при вероятности ошибки порядка $10^{-5} \dots 10^{-6}$ составляет примерно от 5 дБ в однолучевом канале до 7 дБ в многолучевом канале. Второй и третий варианты кодирования намного менее чувствительны к возрастанию величины $f_d T$: дополнительные энергетические затраты на компенсацию такого увеличения величины $f_d T$ при использовании этих вариантов не превосходят примерно 1 дБ.

3. *Влияние отношения сигнал/шум.* При использовании первого и третьего вариантов кодирования, имеющих «фазовую» составляющую, для вероятности ошибки $P_b^{(m)}$ наблюдается эффект «несократимой ошибки», или error floor, при $\gamma_b > 35$ дБ (в канале, задаваемом ETU model, это пороговое значение, вероятно, заметно выше). Наличие «амплитудной» составляющей в третьем варианте кодирования позволяет снизить величину error floor почти на порядок. Важно отметить, что эффект «несократимой ошибки» на внутренней ступени легко снижается с помощью довольно простого кода на внешней ступени. В целом для всех схем кодирования характерна довольно высокая эластичность помехоустойчивости к увеличению отношения сигнал/шум γ_b ; так, увеличение отношения сигнал/шум γ_b на 3 дБ может приводить к снижению вероятности ошибки почти на четыре порядка в однолучевом канале и примерно на 2–3 порядка в многолучевом канале. Меньшая «крутизна» снижения вероятности ошибки при росте отношения сигнал/шум γ_b в многолучевом канале объясняется указанной выше причиной — использованием в таком канале более «слабых» внешних кодов.

4. *Точность оценивания помехоустойчивости.* Предложенный метод точного вычисления аддитивной границы обеспечивает существенное повышение точности оценивания помехоустойчивости по сравнению с границей Чернова в комбинации с обычной аддитивной границей. Так, для второго варианта кодирования в много-

лучевом канале, а также для третьего варианта кодирования во всех рассмотренных моделях канала точная аддитивная граница вероятности ошибки практически полностью совпадает с результатами, полученными при моделировании.

Заключение

В данной работе рассмотрена схема двухступенчатой кодированной некогерентной передачи в многолучевом канале с произвольным профилем многолучевости и доплеровским рассеянием с использованием амплитудно-фазовой модуляции и некогерентным приемом на внутренней ступени декодирования. Некогерентные схемы передачи со сравнительно простым канальным кодированием рассматриваются в качестве перспективной альтернативы традиционным когерентным методам передачи в каналах с быстроменяющимися параметрами. В работе детально изложена процедура двухступенчатого канального кодирования с перемежением между ступенями и внутренним кодом, ориентированным на использование с амплитудно-фазовой модуляцией. Приведено описание схемы декодирования двухступенчатой конструкции для общей модели канала с произвольным профилем многолучевости и доплеровским рассеянием, включая указание в явном виде возможности существенного снижения сложности декодирования на внутренней ступени в случаях медленных и быстрых замираний в канале. Отличительной особенностью представленного сценария передачи является гибкость кодовой конструкции, достигаемая посредством использования как двух ступеней кодирования, так и внутреннего кода, согласованного с основными особенностями канала — профилем многолучевости и величиной максимального доплеровского рассеяния. Комбинирование двухступенчатой схемы канального кодирования с амплитудно-фазовой модуляцией обеспечивает возможность существенно расширить совокупность рациональных вариантов организации передачи для рассматриваемого сценария передачи.

В работе выполнен анализ помехоустойчивости двухступенчатого канального кодирования на основе разработанного, применительно к рассмотренному сценарию передачи в многолучевом канале с доплеровским рассеянием, метода точного вычисления аддитивной границы вероятности ошибочного декодирования, базирующегося на получении точного выражения для попарной вероятности ошибки. Заметное повышение точности оценивания вероятности ошибочного декодирования, достигаемое при использовании предложенного метода точного вычисления по-

парной вероятности ошибки, позволяет повысить эффективность процедур, связанных с выбором конкретных схем кодирования в многолучевом канале с доплеровским рассеянием.

Приведены численные результаты анализа помехоустойчивости представленной двухступенчатой кодовой конструкции для трех моделей канала с различными профилями многолучевости, позволяющие оценить влияние различных компонентов кодовой конструкции на вероятность ошибочного декодирования в зависимости от конфигурации профиля многолучевости

и величины максимального доплеровского рассеяния. В частности, выделены варианты кодирования, позволяющие обеспечить приемлемый уровень помехоустойчивости (при достаточно большой величине γ_b) в широком диапазоне значений доплеровского рассеяния. Показано, что для ряда рассмотренных сценариев передачи точная аддитивная граница вероятности ошибки практически полностью совпадает с результатами, полученными при моделировании.

Литература

1. **Wu J., Fan P.** A survey on high mobility wireless communications: Challenges, opportunities and solutions. *IEEE Access*, 2016, vol. 4, pp. 450–476.
2. **Jaffry S., Hussain R., Gui X., Hasan S. F.** A Comprehensive survey on moving networks. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2021, vol. 23, no. 1, pp. 110–136. doi:10.1109/COMST.2020.3029005
3. **Li J., Niu Y., Wu H., Ai B., Chen S., Feng Z., Zhong Z., Wang N.** Mobility support for millimeter wave communications: Opportunities and challenges. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 1816–1842. doi:10.1109/COMST.2022.3176802
4. **Suyama S., Okuyama T., Kishiyama Y., Nagata S., Asai T.** A study on extreme wideband 6G radio access technologies for achieving 100 Gbps data rate in higher frequency bands. *IEICE Transactions on Communications*, 2021, vol. 104, iss. 9, pp. 992–999. doi:10.1587/transcom.2020FGI0002
5. **Tavsanoglu A., Briso C., Carmena-Cabanillas D., Arancibia R. B.** Concepts of hyperloop wireless communication at 1200 km/h: 5G, Wi-Fi, propagation, Doppler and handover. *Energies*, 2021, vol. 14, iss. 4, p. 983. doi:10.3390/en14040983
6. **Li P., Niu Y., Wu H., Han Z., Wang N., Xiong L., Ai B., Yuen C.** Secure high-speed train-to-ground communications through ISAC. *IEEE Internet of Things Journal*, 2024, vol. 11, iss. 19, pp. 31235–31248. doi:10.1109/JIOT.2024.3416494
7. **Kim J., Schmieder M., Peter M., Chung H., Choi S., Kim I., Han Y.** A comprehensive study on mmWave-Based mobile hotspot network system for high-speed train communications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, vol. 68, no. 3, pp. 2087–2101. doi:10.1109/TVT.2018.2865700
8. **Clancy J., Mullins D., Deegan B., Horgan J., Ward E., Eising C., Denny P., Jones E., Glavin M.** Wireless access for V2X communications: Research, challenges and opportunities. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 2082–2119. doi:10.1109/COMST.2024.3384132
9. **Deng X., Meng H., Gao Z., Zou X., Li P., Pan W., Yan L.** Wideband Doppler channel modeling for wireless communications with high mobility. *2023 IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC)*, 2023, Dalian, China, pp. 1–6. doi:10.1109/ICCC57788.2023.10233384
10. **Selim B., Muhaidat S., Sofotasios P. C., Sharif B. S., Stouraitis T., Karagiannidis G. K., Al-Dhahir N.** Performance analysis of single-carrier coherent and noncoherent modulation under I/Q imbalance. *Proc. IEEE 87th Veh. Technol. Conf. (VTC Spring)*, 2018, pp. 1–5.
11. **Bhardwaj P., Zafaruddin S. M.** Exact performance analysis of THz link under transceiver hardware impairments. *IEEE Communications Letters*, 2023, vol. 27, no. 8, pp. 2197–2201. doi:10.1109/LCOMM.2023.3283417
12. **Kim J., Jo H.-S., Lee K.-J., Lee D.-H., Choi D.-H., Kim S.** A low-complexity I/Q imbalance calibration method for quadrature modulator. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 974–977. doi:10.1109/TVLSI.2018.2883758
13. **Jie M., Houjun W., Lianping G., Peng Y., Yu Z.** Estimation and compensation of I/Q linear phase imbalance based on the generalized cross correlation and cross-power spectrum phase method. *2019 14th IEEE International Conference on Electronic Measurement & Instruments (ICEMI)*, 2019, Changsha, China, pp. 1861–1866. doi:10.1109/ICEMI46757.2019.9101881
14. **Mouchtak Y., El Bouanani F., Qaraqe K. A.** Performance analysis of I/Q imbalance with hardware impairments over Hyper-Fox's H-fading channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2022, vol. 21, no. 11, pp. 9519–9536. doi:10.1109/TWC.2022.3177530
15. **Kuo P.-H., Alain A. M. Mourad.** Millimeter wave for 5G mobile fronthaul and backhaul. *2017 European Conference on Networks and Communications (EuCNC)*, 2017, pp. 1–5.
16. **Jiang M., Cezanne J., Sampath A., Shental O., Wu Q., Koymen O. H., Bedewy A. M., Li J.** Wireless fronthaul for 5G and future radio access networks: Challenges and enabling technologies. *IEEE Wireless Communications*, 2022, vol. 29, iss. 2, pp. 108–114. doi:10.1109/MWC.003.2100482

17. Townend D., Husbands R., Walker S. D., Sutton A. Challenges and opportunities in wireless fronthaul. *IEEE Access*, 2023, vol. 11, pp. 106607–106619. doi:10.1109/ACCESS.2023.3319073
18. Warriar D., Madhow U. Spectrally efficient noncoherent communication. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2002, vol. 48, iss. 3, pp. 651–668. doi:10.1109/18.985996
19. Chao X., Ishikawa N., Rajashekar R., Sugiura S., Maunder R. G., Wang Z., Yang L., Hanzo L. Sixty years of coherent versus non-coherent tradeoffs and the road from 5G to wireless futures. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 178246–178299. doi:10.1109/ACCESS.2019.2957706
20. Östman J., Durisi G., Ström E. G., Coşkun M. C., Liva G. Short packets over block-memoryless fading channels: Pilot-assisted or noncoherent transmission? *IEEE Transactions on Communications*, 2019, vol. 67, no. 2, pp. 1521–1536. doi:10.1109/TCOMM.2018.2874993
21. Huang J., Lan M., Zhang H., Huang C., Zhang W., Cui S. Design of noncoherent communications: From statistical method to machine learning. *IEEE Wireless Communications*, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 76–83. doi:10.1109/MWC.001.1900284
22. Yuan P., Coşkun M. C., Kramer G. Polar-coded non-coherent communication. *IEEE Communications Letters*, 2021, vol. 25, no. 6, pp. 1786–1790. doi:10.1109/LCOMM.2021.3061650
23. Таубин Ф. А., Трофимов А. Н. Коды-произведения с полуслепым декодированием для одночастотной передачи в многолучевом канале с замираниями. *Информационно-управляющие системы*, 2024, № 5, с. 68–80. doi:10.31799/1684-8853-2024-5-68-80, EDN: ONWDIC
24. Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Вычисление аддитивной границы вероятности ошибки декодирования с использованием характеристических функций. *Информационно-управляющие системы*, 2021, № 4, с. 71–85. doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85
25. Baddour K., Beaulieu N. Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2005, vol. 4, iss. 4, pp. 1650–1662. doi:10.1109/TWC.2005.850327
26. Трофимов А. Н., Таубин Ф. А. Модель с дискретным временем для релевского канала с произвольным профилем многолучевости. Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве: IV Международный форум: сб. тезисов докл. В 2 ч. СПб., ГУАП, 2024. Ч. 1, с. 232–235.
27. Harville D. A. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Second ed. Springer, New York, 2008. 650 p.
28. Clark G. C., Jr., Cain J. B. *Error-Correction Coding for Digital Communications*. Plenum Press, New York, 1981. 435 p.
29. Bellman R. *Introduction to Matrix Analysis*. Second ed. McGraw Hill, New York, 1970. 403 p.
30. 3GPP Technical Specification TS 36.116, version 11.4.0, Release 11. Technical Specification Group RAN, E-UTRA. Relay radio transmission and reception. 2015. 36 p. <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=2417> (дата обращения: 24.05.2025).

UDC 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2025-5-35-49

EDN: CXVICZ

Performance analysis of two-stage channel coding with noncoherent transmission over multipath fading channel with Doppler scattering

F. A. Taubin^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-8781-9531A. N. Trofimov^a, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0003-1233-5222, andrei.trofimov@guap.ru^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: In high mobility communication systems noncoherent transmission schemes with relatively simple channel coding are considered to be a promising alternative to traditional coherent transmission methods where the accurate estimation of the channel parameters (for example, using periodic transmission of pilot signals) consumes a disproportionately large share of resources. The absence of estimates of current channel parameters in the receiver of a high mobility communication system is accompanied by the emergence of certain restrictions on the joint selection of effective methods of channel coding and modulation, as well as the need to develop procedures for a sufficiently accurate analysis of noise immunity. **Purpose:** To carry out a noise immunity analysis of two-stage coded transmission in a multipath channel with Doppler scattering using amplitude-phase modulation and non-coherent reception at the inner decoding stage. **Results:** For a multipath channel with Doppler scattering, we present a scenario of noncoherent transmission based on two-stage channel coding with interleaving between stages and an inner code with amplitude-phase modulation. We provide a description of the general decoding scheme of the two-stage design for a general channel model with an arbitrary multipath profile and Doppler scattering, which includes an explicit indication of significantly reducing the decoding complexity at the inner stage in cases of slow and fast fading in the channel. We present the analysis of the performance of the two-stage channel coding based on the developed method for the accurate calculation of the union bound on the decoding error probability for the considered scenario of transmission in a multipath channel with Doppler scattering. **Practical relevance:** The combination of a two-stage channel coding scheme with the amplitude-phase modulation significantly expands the set of rational options for the transmission scenario under consideration, and allows an acceptable level of reliable communication in a wide range of Doppler scattering and multipath profile. The proposed method for accurate calculating the pairwise error probability increases the efficiency of selecting specific coding schemes in a multipath channel with Doppler scattering.

Keywords — wireless channel, Rayleigh fading, multipath propagation, Doppler scattering, two-stage coding, noncoherent reception, union bound on error probability, Chernoff bound, exact calculation of pairwise error probabilities, log-likelihood ratio characteristic function.

For citation: Taubin F. A., Trofimov A. N. Performance analysis of two-stage channel coding with noncoherent transmission over multipath fading channel with Doppler scattering. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 5, pp. 35–49 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-5-35-49, EDN: CXVICZ

References

- Wu J., Fan P. A survey on high mobility wireless communications: Challenges, opportunities and solutions. *IEEE Access*, 2016, vol. 4, pp. 450–476.
- Jaffry S., Hussain R., Gui X., Hasan S. F. A Comprehensive survey on moving networks. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2021, vol. 23, no. 1, pp. 110–136. doi:10.1109/COMST.2020.3029005
- Li J., Niu Y., Wu H., Ai B., Chen S., Feng Z., Zhong Z., Wang N. Mobility support for millimeter wave communications: Opportunities and challenges. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 1816–1842. doi:10.1109/COMST.2022.3176802
- Suyama S., Okuyama T., Kishiyama Y., Nagata S., Asai T. A study on extreme wideband 6G radio access technologies for achieving 100 Gbps data rate in higher frequency bands. *IEICE Transactions on Communications*, 2021, vol. 104, iss. 9, pp. 992–999. doi:10.1587/transcom.2020FGI0002
- Tavsanoglu A., Briso C., Carmena-Cabanillas D., Arancibia R. B. Concepts of hyperloop wireless communication at 1200 km/h: 5G, Wi-Fi, propagation, Doppler and handover. *Energies*, 2021, vol. 14, iss. 4, p. 983. doi:10.3390/en14040983
- Li P., Niu Y., Wu H., Han Z., Wang N., Xiong L., Ai B., Yuen C. Secure high-speed train-to-ground communications through ISAC. *IEEE Internet of Things Journal*, 2024, vol. 11, iss. 19, pp. 31235–31248. doi:10.1109/JIOT.2024.3416494
- Kim J., Schmieder M., Peter M., Chung H., Choi S., Kim I., Han Y. A comprehensive study on mmWave-Based mobile hotspot network system for high-speed train communications. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, vol. 68, no. 3, pp. 2087–2101. doi:10.1109/TVT.2018.2865700
- Clancy J., Mullins D., Deegan B., Horgan J., Ward E., Eising C., Denny P., Jones E., Glavin M. Wireless access for V2X communications: Research, challenges and opportunities. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2024, vol. 26, no. 3, pp. 2082–2119. doi:10.1109/COMST.2024.3384132
- Deng X., Meng H., Gao Z., Zou X., Li P., Pan W., Yan L. Wideband Doppler channel modeling for wireless communications with high mobility. *2023 IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC)*, 2023, Dalian, China, pp. 1–6. doi:10.1109/ICCC57788.2023.10233384
- Selim B., Muhaidat S., Sofotasios P. C., Sharif B. S., Stouraitis T., Karagiannidis G. K., Al-Dhahir N. Performance analysis of single-carrier coherent and noncoherent modulation under I/Q imbalance. *Proc. IEEE 87th Veh. Technol. Conf. (VTC Spring)*, 2018, pp. 1–5.
- Bhardwaj P., Zafaruddin S. M. Exact performance analysis of THz link under transceiver hardware impairments. *IEEE Communications Letters*, 2023, vol. 27, no. 8, pp. 2197–2201. doi:10.1109/LCOMM.2023.3283417
- Kim J., Jo H.-S., Lee K.-J., Lee D.-H., Choi D.-H., Kim S. A low-complexity I/Q imbalance calibration method for quadrature modulator. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 974–977. doi:10.1109/TVLSI.2018.2883758
- Jie M., Houjun W., Lianping G., Peng Y., Yu Z. Estimation and compensation of I/Q linear phase imbalance based on the generalized cross correlation and cross-power spectrum phase method. *2019 14th IEEE International Conference on Electronic Measurement & Instruments (ICEMI)*, 2019, Changsha, China, pp. 1861–1866. doi:10.1109/ICEMI46757.2019.9101881
- Mouchtak Y., El Bouanani F., Qaraqe K. A. Performance analysis of I/Q imbalance with hardware impairments over Hyper-Fox's H-fading channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2022, vol. 21, no. 11, pp. 9519–9536. doi:10.1109/TWC.2022.3177530
- Kuo P.-H., Alain A. M. Mourad. Millimeter wave for 5G mobile fronthaul and backhaul. *2017 European Conference on Networks and Communications (EuCNC)*, 2017, pp. 1–5.
- Jiang M., Cezanne J., Sampath A., Shental O., Wu Q., Koy-men O. H., Bedewy A. M., Li J. Wireless fronthaul for 5G and future radio access networks: Challenges and enabling technologies. *IEEE Wireless Communications*, 2022, vol. 29, iss. 2, pp. 108–114. doi:10.1109/MWC.003.2100482
- Townend D., Husbands R., Walker S. D., Sutton A. Challenges and opportunities in wireless fronthaul. *IEEE Access*, 2023, vol. 11, pp. 106607–106619. doi:10.1109/ACCESS.2023.3319073
- Warrier D., Madhow U. Spectrally efficient noncoherent communication. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2002, vol. 48, iss. 3, pp. 651–668. doi:10.1109/18.985996
- Chao X., Ishikawa N., Rajashekar R., Sugiyama S., Maunder R. G., Wang Z., Yang L., Hanzo L. Sixty years of coherent versus non-coherent tradeoffs and the road from 5G to wireless futures. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 178246–178299. doi:10.1109/ACCESS.2019.2957706
- Östman J., Durisi G., Ström E. G., Coşkun M. C., Liva G. Short packets over block-memoryless fading channels: Pilot-assisted or noncoherent transmission? *IEEE Transactions on Communications*, 2019, vol. 67, no. 2, pp. 1521–1536. doi:10.1109/TCOMM.2018.2874993
- Huang J., Lan M., Zhang H., Huang C., Zhang W., Cui S. Design of noncoherent communications: From statistical method to machine learning. *IEEE Wireless Communications*, 2020, vol. 27, no. 1, pp. 76–83. doi:10.1109/MWC.001.1900284
- Yuan P., Coşkun M. C., Kramer G. Polar-coded non-coherent communication. *IEEE Communications Letters*, 2021, vol. 25, no. 6, pp. 1786–1790. doi:10.1109/LCOMM.2021.3061650
- Taubin F. A., Trofimov A. N. Product codes with semi-blind decoding for single carrier transmission over multipath fading channel. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2024, no. 5, pp. 68–80 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2024-5-68-80, EDN: ONWDIC
- Trofimov A. N., Taubin F. A. Evaluation of the union bound for the decoding error probability using characteristic functions. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 4, pp. 71–85 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2021-4-71-85
- Baddour K., Beaulieu N. Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2005, vol. 4, iss. 4, pp. 1650–1662. doi:10.1109/TWC.2005.850327
- Trofimov A. N., Taubin F. A. Discrete-time model for Rayleigh channel with arbitrary multipath profile. *Teziy dokladov IV Mezhdunarodnogo foruma "Matematicheskie metody i modeli v vysokotekhnologichnom proizvodstve"* [Proc. of the IV Intern. Forum "Mathematical Methods and Models in High-Tech Production"]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2024, Part 1, pp. 232–235 (In Russian).
- Harville D. A. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Second ed. Springer, New York, 2008. 650 p.
- Clark G. C., Jr., Cain J. B. *Error-Correction Coding for Digital Communications*. Plenum Press, New York, 1981. 435 p.
- Bellman R. *Introduction to Matrix Analysis*. Second ed. McGraw Hill, New York, 1970. 403 p.
- 3GPP Technical Specification TS 36.116, version 11.4.0, Release 11. Technical Specification Group RAN, E-UTRA. Relay radio transmission and reception. 2015. 36 p. Available at: <https://portal.3gpp.org/desktopmodules/Specifications/SpecificationDetails.aspx?specificationId=2417> (accessed 24 May 2025).