УДК 519.72
doi:10.31799/1684-8853-2025-6-64-73
EDN: ESMBYH

Научные статьи
Articles

Методика построения информационных совокупностей с неравномерным разбиением для исправления пакетов ошибок

М. Н. Исаева[a], *старший преподаватель, orcid.org/0009-0007-6228-0617, imn@guap.ru*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ*

Введение: *задача исправления ошибок является актуальной для современных систем связи и хранения данных, особенно в каналах, для которых характерно группирование ошибок в пакеты. Малоизученной остается задача исправления более чем одного пакета ошибок, образующегося при передаче блока данных.* ***Цель:*** *разработать и проанализировать методику генерации множества информационных совокупностей для исправления двукратных пакетов ошибок.* ***Результаты:*** *в ходе исследования установлено, что плотные информационные совокупности, исследовавшиеся ранее для исправления однократных пакетов ошибок, применимы для исправления двукратных пакетов только для кодов с малой скоростью. Для кодов с более высокими скоростями проанализированы методики построения множества информационных совокупностей с различными критериями разбиения и предложена методика, использующая динамическое неравномерное разбиение. Полученные с ее помощью информационные совокупности делают возможным исправление любых комбинаций из не более чем двукратных пакетов ошибок, длина которых находится в рамках модифицированной границы Рейгера.* ***Практическая значимость:*** *результаты работы имеют практическое значение в проектировании систем связи для передачи по каналам с памятью, где частота появления пакетов достаточно велика для образования множественных пакетов за время передачи одного кодового слова. Предложенная методика позволяет повысить помехозащищенность таких каналов и может быть использована для разработки вычислительно эффективных декодеров.* ***Обсуждение:*** *результаты работы получены в предположении, что любые последовательные позиции кодового слова образуют информационную совокупность, а также что длины исправляемых пакетов лежат на модифицированной границе Рейгера. Можно ожидать, что эти два эффекта в некоторой степени компенсируют друг друга с точки зрения требований ко множествам информационных совокупностей для конкретных кодов, однако оценка параметров множеств информационных совокупностей и построение декодеров на их основе для отдельных классов кодов является направлением дальнейших исследований.*

Ключевые слова *— декодирование по информационным совокупностям, граница Рейгера, исправление многократных пакетов ошибок, плотные информационные совокупности, каналы с памятью.*

Для цитирования: Исаева М. Н. Методика построения информационных совокупностей с неравномерным разбиением для исправления пакетов ошибок. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 6, с. 64–73. doi:10.31799/1684-8853-2025-6-64-73, EDN: ESMBYH

For citation: Isaeva M. N. Methodology for constructing information sets with non-uniform partitioning for error burst correction. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 6, pp. 64–73 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-6-64-73, EDN: ESMBYH

Введение

Задача повышения надежности передачи данных в каналах связи, подверженных ошибкам, является одной из классических в теории помехоустойчивого кодирования. В то время как для каналов с независимыми ошибками разработаны и хорошо изучены методы помехоустойчивого кодирования, многие реальные системы сталкиваются с более сложной структурой ошибок. Каналы беспроводной связи, каналы с замираниями, системы хранения данных характеризуются наличием памяти, что приводит к коррелированному возникновению ошибок, которые группируются в пакеты ошибок.

Задача исправления однократных пакетов ошибок может решаться на основе кодов со специальной алгебраической структурой, таких как циклические коды Файра, коды Рида — Соломона, итеративные конструкции на их основе [1–5]. Однако во многих практических сценариях за время передачи одного кодового слова может возникать несколько независимых пакетов ошибок [6], этот случай менее изучен по сравнению с исправлением однократных пакетов. Проблема кодирования в каналах с памятью активно исследуется в современной литературе.

В работе [7] исследуются современные подходы к построению композиции кодов с малой плотностью проверок на четность (МППЧ-коды), в [8] решается задача детектирования пакетов в кодовых словах МППЧ-кодов в специальном случае канала, образованного марковской цепью с гауссовыми каналами в состояниях цепи. В [9] предлагается декодер исправления одиночных пакетов для произвольных линейных кодов, однако имеющий практически реализуемую сложность лишь для кодов с разреженными проверочными матрицами с блоковой структурой. В [10, 11] затрагиваются вопросы кодирования полярными кодами для различных каналов, в том числе с памятью. В [12] предлагается декодер полярных кодов для классического канала с памятью, задаваемого моделью Гилберта — Эллиота с неизвестными параметрами. В [13] рассматривается исправление пакетов ошибок, расположенных всегда в начале слова. В [14, 15] предлагаются методы исправления пакетов (в том числе множественных) ошибок и стираний для случая их фиксированного расположения (фазированные пакеты). В [16] ставятся и решаются вопросы построения метрик для каналов с памятью с двумя состояниями. В [17, 18] исследуется передача по каналам специального вида, память в которых обуславливается межсимвольной интерференцией и замираниями. В [19] разрабатывается подход к исправлению однократных пакетов ошибок на основе информационных совокупностей и показано, что этот метод может обладать достаточно низкой вычислительной сложностью за счет использования специальным образом построенного множества информационных совокупностей.

Целью настоящей работы является расширение и обобщение подхода с использованием информационных совокупностей на случай исправления двукратных пакетов ошибок. В статье предлагается методика построения множества информационных совокупностей для исправления двух пакетов ошибок, проводится анализ возможности уменьшения мощности полученного множества.

Статья использует следующую структуру. Вводятся основные понятия помехоустойчивого кодирования, в том числе при исправлении пакетов ошибок, используемые в дальнейшем в статье. Дается определение Δ-плотных информационных совокупностей. Рассматривается возможность использования однократных плотных информационных совокупностей, равномерного разбиения информационных совокупностей, а также неравномерного разбиения для исправления двукратных пакетов. Анализируются границы применимости каждой из методик. На основе полученных результатов предлагается методика построения множества информационных совокупностей для исправления двукратных пакетов ошибок. Проводится оценка количества требуемых информационных совокупностей для исправления пакетов ошибок в пределах границы Рейгера.

Основные понятия

Для дальнейшего изложения введем ряд формальных определений [20]. Линейный двоичный $(n,\ k)$-код определяется как k-мерное подпространство в n-мерном векторном пространстве всех векторов над полем $GF(2)$. Для задания линейных кодов используются порождающая и проверочная матрицы. Порождающая $(k \times n)$-матрица $\mathbf{G}$ ранга k используется для построения кодовых слов из информационных векторов $\mathbf{m}$ в соответствии с правилом $\mathbf{a} = \mathbf{mG}$. Для проверки корректности принятых из канала данных используется проверочная $(r \times n)$-матрица $\mathbf{H}$, где $r = n - k$. Она связана с $\mathbf{G}$ условием ортогональности $\mathbf{GH}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ и позволяет вычислить для любого принятого вектора $\mathbf{b}$ его синдром $\mathbf{s} = \mathbf{bH}^{\mathrm{T}}$. В рамках стандартной аддитивной модели канала принятый вектор можно представить в виде $\mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — вектор ошибок, в котором единицы соответствуют ошибочным битам. Если синдром равен нулю, вектор $\mathbf{b}$ является кодовым словом и считается, что ошибок не произошло. В противном случае обнаруживается ошибка и запускается процесс декодирования. Структура вектора ошибок $\mathbf{e}$ определяется статистическими свойствами канала связи.

Для каналов без памяти, например двоичного симметричного канала, ошибки являются независимыми событиями, в этом случае ненулевые компоненты вектора $\mathbf{e}$ распределены равномерным образом по символам принятого слова. Однако, как уже было сказано, для многих практических каналов с памятью ошибки имеют тенденцию группироваться в пакеты ошибок. Вектор $\mathbf{e}$ называется однократным пакетом ошибок длиной b, если все его ненулевые компоненты содержатся только в b последовательно расположенных позициях. Двукратный пакет ошибок длиной b может быть определен как вектор $\mathbf{e}$, который можно представить в виде суммы по модулю 2 двух одиночных пакетов ошибок $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ длиной b каждый: $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 \oplus \mathbf{e}_2$.

Корректирующая способность кода при рассмотрении случайных независимых ошибок определяется минимальным расстоянием Хэмминга d_0, способность кода исправлять любую комбинацию до t ошибок оценивается неравенством $d_0 \geq 2t + 1$. При декодировании группированных ошибок в качестве корректирующей способности кода может быть использована минимальная длина исправляемого пакета ошибок b_0, которая может быть определена с полиномиальной сложностью согласно процедуре, описанной в [21]. Для оценки предельной способности кода исправлять пакеты ошибок используется граница Рейгера, которая устанавливает необходимое условие на количество проверочных символов $r = n - k$ для гарантированного исправления любого однократного пакета ошибок длиной до b_0 включительно: $2b_0 \le r$. Следует отметить, что данная граница является необходимым, но недостаточным условием, и многие кодовые конструкции лежат ниже этой границы. В случае исправления двукратных пакетов может быть сформулирована модифицированная граница Рейгера, в соответствии с которой длина исправляемого двукратного пакета не может превысить $b_0 \le \lfloor (n-k)/4 \rfloor$. Можно заметить, что если код исправляет все двукратные пакеты длиной до $r/4$, то он также исправляет одиночные пакеты длиной до $r/2$, так как такой пакет является конкатенацией двух более коротких пакетов. Таким образом, алгоритмы декодирования двукратных пакетов длиной на границе Рейгера исправляют также любые однократные пакеты.

Информационной совокупностью линейного (n, k)-кода называется любое множество из k позиций $\chi = \{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n\}$, однозначно задающее кодовое слово. Для того чтобы χ являлось информационной совокупностью, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие столбцы порождающей матрицы $\mathbf{G}$ были линейно независимы. Если ошибочные символы не попали на позиции информационной совокупности, то такая информационная совокупность называется свободной от ошибок, и с ее помощью можно корректно исправить принятый вектор. Поскольку места ошибок неизвестны, стратегия декодирования может заключаться в переборе по некоторому множеству X информационных совокупностей, заранее построенному так, чтобы для любых исправляемых векторов ошибки нашлась не искаженная информационная совокупность. Для уменьшения сложности декодирования размер множества X необходимо по возможности минимизировать.

В [19] исследуется применение информационных совокупностей для исправления однократных пакетов ошибок. Для минимизации количества информационных совокупностей, необходимых для декодирования, вводится понятие Δ-плотной информационной совокупности (при $\Delta = 0$ символ «Δ» опускается), т. е. из $k + \Delta$ подряд идущих позиций.

Обратим внимание, что позиции плотной информационной совокупности выбираются циклически, с учетом этого максимальное множество плотных информационных совокупностей имеет размерность n. Отметим, что в литературе иногда используется понятие циклического пакета, для исправления которого используются циклические коды. В данной статье циклический пакет не рассматривается, так как исследование не ограничивается циклическими кодами и, кроме того, однократный циклический пакет описывается моделью с двумя пакетами.

В [19] предложена методика построения множества плотных информационных совокупностей, позволяющая снизить их количество с $O(n)$ до $O(1)$ с гарантированным исправлением пакетов в рамках корректирующей способности кода. Однако следует заметить, что конкретные значения этого количества зависят от скорости кода $R = k/n$.

Необходимо отметить, что не любые k подряд идущих позиций образуют информационную совокупность. Для сохранения подхода, основанного на использовании информационных совокупностей ограниченного диаметра, понятие плотной информационной совокупности может быть расширено до $k + \Delta$ позиций. Вероятность нахождения таких информационных совокупностей в зависимости от Δ и параметров используемого кода оценена в [22]. В данной статье используется упрощенное предположение о том, что любые k позиций образуют информационную совокупность.

Использование плотных информационных совокупностей для исправления двукратных пакетов ошибок

Изучим возможность применения подхода, основанного на плотных информационных совокупностях, описанного в предыдущем разделе, для исправления двукратных пакетов ошибок. С учетом цикличности выбора позиций информационных совокупностей рассмотрим схематическое изображение пакетов (рис. 1).

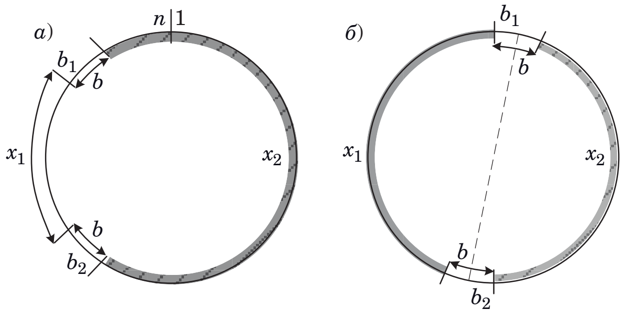
Пусть b_1, b_2 — начальные позиции пакетов, при этом $1 \le b_1 < b_2 \le n - b + 1$, где $b = \lfloor (n-k)/4 \rfloor$ — длина пакета. Пакеты занимают $2b$ из n позиций кодового слова, разбивая множество остальных позиций на два подмножества (с учетом цикличности) из x_1 и x_2 элементов (рис. 1, *а*), при этом

$$x_1 + x_2 + 2b = n. \tag{1}$$

Оценим параметры кода, при которых построение плотной информационной совокупности будет невозможно. Пусть пакеты лежат «напротив» друг друга (рис. 1, *б*), или, другими словами, $|x_1 - x_2| \le 1$, но для простоты будем считать, что $x_1 = x_2 = x$. С учетом $b = \lfloor (n-k)/4 \rfloor$ из (1) имеем

$$2x + (n - k)/2 = n. \tag{2}$$

Плотная информационная совокупность не может быть построена, если $x_1 < k$ и $x_2 < k$, т. е. $x < k$. Тогда из (2) получим $n < 3k$; с учетом, что



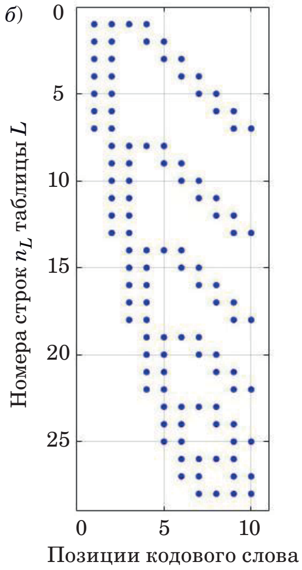
■ ***Рис. 1.*** Размеры интервалов для поиска информационных совокупностей при $x_2 \neq x_1$ (*а*) и при $x_2 = x_1$ (*б*)

■ ***Fig. 1.*** Interval sizes for searching information sets for $x_2 \neq x_1$ (*а*) and for $x_2 = x_1$ (*б*)

а)

$L =$

n_L	b_1	b_2
1	1	3
2	1	4
3	1	5
4	1	6
5	1	7
6	1	8
7	1	9
8	2	4
9	2	5
10	2	6
11	2	7
12	2	8
13	2	9
14	3	5
15	3	6
16	3	7
17	3	8
18	3	9
19	4	6
20	4	7
21	4	8
22	4	9
23	5	7
24	5	8
25	5	9
26	6	8
27	6	9
28	7	9



■ ***Рис. 2.*** Позиции двукратных пакетов ошибок в табличном (*а*) и графическом (*б*) виде

■ ***Fig. 2.*** Positions of double error bursts in table (*а*) and in graphical (*б*) form

$R = k/n$, получим $R > 1/3$. Таким образом, использование только плотных информационных совокупностей возможно лишь для низкоскоростных кодов со скоростью $R < 1/3$.

Оценим количество необходимых для декодирования плотных информационных совокупностей при $R < 1/3$. Будем использовать следующую методику. Построим таблицу L из двух столбцов, в каждой строке которой содержатся начальные позиции двух пакетов (b_1, b_2), $b_1 < b_2$.

Строки (b_1, b_2) в таблице L будем располагать в лексикографическом порядке. Например, при $n = 10$, $R = 0{,}2$ имеем $b = 2$. Тогда таблица L будет выглядеть, как на рис. 2, *а*. Такая таблица описывает конфигурации пакетов, графически представленных на рис. 2, *б*, где точки соответствуют позициям пакетов. Количество строк N_L в таблице L не более $C_n^2 = O\left(n^2\right)$. Будем говорить, что пакеты покрываются некоторой информационной совокупностью, если позиции информационной совокупности не пересекаются с позициями пакетов, т. е. интервалами $[b_1, b_1 + b - 1]$ и $[b_2, b_2 + b - 1]$.

Задача построения множества Χ состоит в том, чтобы информационные совокупности из Χ покрывали всю таблицу L и множество Χ имело как можно меньшее число элементов $N = |\mathrm{X}|$. Как было показано ранее, множество из n всевозможных плотных информационных совокупностей покроет все строки таблицы L. Оценим возможность уменьшения этого количества.

Рассмотрим $n = 50$ и разные значения скоростей R. Множество всех плотных информационных совокупностей содержит $N = 50$ элементов. Оценим экспериментально минимальное количество T плотных информационных совокупностей, покрывающих всю таблицу L.

Для однократных пакетов и кодов с низкими скоростями возможна ситуация, когда двух плотных информационных совокупностей достаточно для исправления всех пакетов длиной до b_0 [17]. Очевидно, для двукратных пакетов нижняя граница количества необходимых плотных информационных совокупностей T равна трем, так как любые две информационные совокупности могут быть затронуты двукратным пакетом. Эксперименты показывают, что для скоростей $R \leq 0{,}2$ эта граница может быть достигнута с равенством, с дальнейшим ростом скорости до 1/3 количество минимально необходимых информационных совокупностей растет, но не превышает n. Для скоростей кода выше 1/3 построение множества, состоящего только из плотных информационных совокупностей, невозможно.

Построение множества информационных совокупностей с равномерным разбиением для исправления двукратных пакетов ошибок

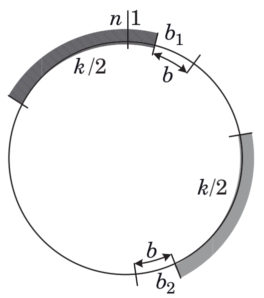
Как было показано в предыдущем разделе, при $R > 0{,}33$ всегда будут существовать такие расположения пакетов (b_1, b_2), для которых невозможно построение плотной информационной совокупности.

Разобьем плотную информационную совокупность на две равные части по $k/2$ позиций (возможностью нечетных значений k пренебрежем). Оценим условия, при которых такую информационную совокупность построить невозможно. Согласно обозначениям рис. 1, это соответствует случаю $x_1 < k/2$, $x_2 < k$ (или $x_1 < k$, $x_2 < k/2$). Тогда $x_1 + x_2 < k/2 + k$. Из (1) получим $k/2 + k + (n - k)/2 > n$, отсюда $R > 1/2$. Таким образом, равномерное разбиение информационных совокупностей для исправления двукратных пакетов ошибок имеет смысл для кодов со скоростями $R \in (1/3, 1/2)$.

Рассмотрим следующий подход к построению множества X информационных совокупностей для скоростей $R \in (1/3, 1/2)$. Для оценки исправляемых пакетов будем использовать таблицу L. При R из указанного диапазона множество, состоящее только из плотных информационных совокупностей, гарантированно оставит непокрытые пакеты. Однако начнем процедуру построения множества X с перебора всех n плотных информационных совокупностей и учета покрываемых ими пакетов.

Будем далее перебирать информационные совокупности, состоящие из двух частей по $k/2$ позиций. Методику перебора опишем следующим образом (рис. 3). Пусть (b_1, b_2) — первая непокрытая строка таблицы L (после перебора по плотным информационным совокупностям). Выберем информационную совокупность, состоящую из двух равных частей, начинающихся в позициях $((b_1 - 1) - k/2) \bmod n + 1$ и $b_2 - k/2$ с учетом $b_1 < b_2$, возможной цикличности позиций информационной совокупности и используемой нумерации позиций от 1 до n, и отметим, какие двукратные пакеты (строки таблицы L) покрываются новой информационной совокупностью. Будем повторять описанную процедуру до тех пор, пока все строки L не окажутся покрытыми.

Оценим экспериментально описанную методику для кода с параметрами $n = 50$, $R = 0{,}4$.



■ ***Рис. 3.*** Выбор расположения двух частей информационной совокупности

■ ***Fig. 3.*** Selection the location of the halves of the information set

Эксперименты показывают, что 97 % расположений двукратных пакетов покрываются плотными информационными совокупностями (их число $N = 50$). Для того чтобы покрыть оставшиеся расположения пакетов, достаточно три дополнительные информационные совокупности, состоящие из равных частей. Общее число информационных совокупностей для кода с такими параметрами $N_{all} = 53$.

Рассмотрим еще один пример со скоростью $R = 0{,}4$ и $n = 80$. Плотными информационными совокупностями покрывается 88 % расположений двукратных пакетов ($N = 80$), для полного покрытия требуется четыре дополнительные информационные совокупности из двух равных частей, соответственно, $N_{all} = 84$.

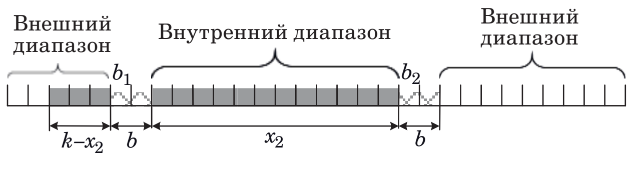
Для $n = 80$ и $R = 0{,}5$ плотными информационными совокупностями покрывается 69 % расположений пакетов, а для полного покрытия требуется 20 дополнительных информационных совокупностей, $N_{all} = 100$.

Таким образом, эксперименты показывают, что для кодов со скоростью $R \in (1/3, 1/2)$ количество информационных совокупностей, необходимых для исправления двукратных пакетов в пределах границы Рейгера, лишь незначительно превосходит длину кода.

Построение множества информационных совокупностей с неравномерным разбиением для исправления двукратных пакетов ошибок

Для кодов со скоростями, превышающими 0,5, описанные ранее методики построения множества информационных совокупностей не позволят исправлять все двукратные пакеты ошибок в рамках модифицированной границы Рейгера. Используем подход с неравномерным разбиением плотных информационных совокупностей (рис. 4).

Как и ранее, сначала будем строить плотные информационные совокупности. После того как в таблице L отмечены все покрываемые ими пакеты, рассмотрим первый непокрытый двукратный пакет (b_1, b_2).



■ ***Рис. 4.*** Выбор расположений неравных долей информационных совокупностей

■ ***Fig. 4.*** Selection the locations for unequal shares of information sets

Возьмем в информационную совокупность все позиции «внутреннего» диапазона, т. е. лежащие между пакетами в интервале $[b_1 + b, b_2 - 1]$, оставшиеся $k - b_2 + b_1 + b$ позиций («внешний» диапазон) возьмем, при необходимости циклически, слева от первого пакета, т. е. начиная с позиций $(b_2 - b - k - 1) \bmod n + 1$ (см. рис. 4).

Оценим применение этой методики для кодов с $R \in [0{,}6; 0{,}9]$, число плотных информационных совокупностей для всех случаев $N = n$ (табл. 1). Приведена доля двукратных пакетов, покрываемых первоначальным множеством X из $N = n$ плотных информационных совокупностей, в процентах. Параметр N_1 показывает количество информационных совокупностей, которые потребовалось добавить к множеству X, состоящему из плотных совокупностей, чтобы покрыть все двукратные пакеты. Наконец, параметр N_{all} показывает общую итоговую мощность множества X.

Как можно видеть, с увеличением скорости кода увеличивается количество информационных совокупностей, требуемых для покрытия всех возможных расположений двукратных пакетов ошибок. Тем не менее общее количество информационных совокупностей N_{all} растет пропорционально длине кода, хотя и с повышающим коэффициентом, что отличается от ситуации с исправлением независимых ошибок, при которых число информационных совокупностей экспоненциально.

Указанная методика, использующая вначале внутренний диапазон позиций между пакетами, не учитывает то, что фактически при циклическом выборе позиций в информационные совокупности позиции слева от первого пакета и справа от второго, т. е. внешний диапазон, также могут рассматриваться как интервал между пакетами. Таким образом, размеры частей, на которые разбивается изначально плотная информационная совокупность, варьируются в зависимости от размера внутреннего диапазона, который изменяется в процессе построения непредсказуемо. Воспользуемся эвристикой, в соответствии с которой из двух диапазонов между пакетами, внутренним и внешним, вначале будет выбираться больший. Это обусловлено тем, чтобы полученные части были по возможности более неравномерны и, таким образом, более близки к плотной информационной совокупности, что позволяет надеяться покрыть больше расположений пакетов меньшим числом совокупностей.

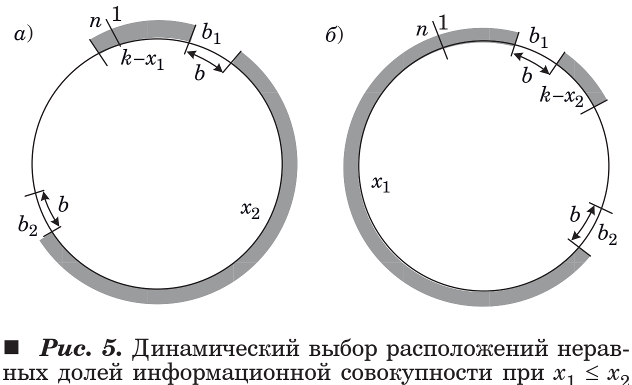
Основываясь на этих рассуждениях, приведем методику построения множества информационных совокупностей для исправления двукратных пакетов ошибок, в некотором смысле обобщающую предыдущие. Для заданных начальных позиций пакетов (b_1, b_2) определим число циклических позиций между ними (см. рис. 1, *а*). Получим $x_1 = n + b_1 - b_2 - b$ и $x_2 = b_2 - b_1 - b$ позиций, используя обозначения из рис. 1, *а*. Пусть $x_1 \le x_2$, тогда выберем x_2 позиций между пакетами в информационную совокупность, оставшиеся $k - x_2$ позиций, как и ранее, выберем слева (при необходимости — циклически) от пакета с началом b_1 (рис. 5, *а*). При $x_1 > x_2$ выполним зеркальные действия (рис. 5, *б*).

Заметим, что при $x_1 > k$ или $x_2 > k$ вследствие использования такой методики будут получены

■ ***Таблица 1.*** Количество информационных совокупностей при использовании методики с неравномерным разбиением

■ ***Table 1.*** Number of information sets when using the non-uniform partitioning method

Параметры кода		Доля расположений, покрытых плотными совокупностями, %	Количество дополнительных информационных совокупностей N_1	Количество всех информационных совокупностей N_{all}
Длина n	Скорость R			
50	0,6	54	49	99
	0,7	44	75	125
	0,8	30	130	180
	0,9	16	275	325
80	0,6	52	79	159
	0,7	38	146	226
	0,8	25	259	339
	0,9	13	553	633
100	0,6	52	99	199
	0,7	40	178	278
	0,8	24	329	429
	0,9	14	618	718



■ ***Рис. 5.*** Динамический выбор расположений неравных долей информационной совокупности при $x_1 \le x_2$ (*а*) и при $x_1 > x_2$ (*б*)

■ ***Fig. 5.*** Dynamic selection the locations for unequal shares of the information set for $x_1 \le x_2$ (*а*) and for $x_1 > x_2$ (*б*) плотные информационные совокупности. Это позволяет исключить как отдельный этап построение первоначального множества плотных информационных совокупностей. Результаты использования такой методики приведены в табл. 2.

Как видно из таблицы, количество информационных совокупностей, построенных по данной методике, меньше, чем в случае первоначального выбора внутреннего диапазона (см. табл. 1). Кроме того, особенностью данной методики является то, что ее без изменений возможно использовать и для низкоскоростных кодов, так как при ее использовании могут быть построены плотные информационные совокупности. Так, число информационных совокупностей для $R \leq 0{,}2$ соответствует нижней границе количества необходимых плотных информационных совокупностей T, которые были получены ранее. Заметим также, что полученные результаты для $n = 80$, $R = 0{,}4$ и 0,5 лучше, чем при использовании описанного в предыдущем разделе равномерного разбиения (общее число информационных совокупностей составляет 63 и 79 против 84 и 100 соответственно).

Напомним (см. рис. 2), что позиции начала пакетов при их перечислении в таблице L во всех случаях выбирались в лексикографическом порядке. Оценим влияние порядка построения таблицы L на размер множества Х для последней методики. Для сравнения будем выбирать строки таблицы L в случайном порядке, результаты приведены в табл. 2.

Как видно из таблицы, для случайного порядка размер множества информационных совокупностей заметно увеличивается. Вероятно, это связано с тем, что при лексикографическом порядке в первую очередь генерируются информационные совокупности, которые покрывают большее количество расположений. При таком порядке сначала строятся плотные информационные совокупности, так как расположения пакетов находятся близко друг к другу. При случайном порядке появляется тенденция построения информационных совокупностей с более равномерным разбиением на части, что приводит к уменьшению количества покрываемых пакетов отдельной информационной совокупностью. Таким образом, влияние порядка просмотра расположений пакетов приводит к новой оптимизационной задаче поиска оптимального порядка для минимизации числа информационных совокупностей, что может являться направлением дальнейшей работы.

Заключение

В статье решается задача построения множества информационных совокупностей для исправления двукратных пакетов ошибок. Исследовано несколько методик для построения такого множества, получены границы применимости с точки зрения кодовых скоростей.

Показано, что известный подход на основе плотных информационных совокупностей в случае исправления двукратных пакетов применим только для кодов со скоростью $R < 1/3$, для кодов с более высокими скоростями рассмотрены и проанализированы методики построения множества информационных совокупностей с равномерным (для $R \in (1/3,\ 1/2)$) и неравномерным (для $R > 1/2$) разбиением. Экспериментальная оценка для конкретных значений параметров (длин и скоростей) кодов показала, что размеры полученных множеств для кодов со скоростями выше 1/2 пропорциональны длине кода и позволяют исправлять любые расположения двукратного пакета ошибок.

■ ***Таблица 2.*** Количество информационных совокупностей при использовании динамической методики с неравномерным разбиением при разном порядке строк в таблице L

■ ***Table 2.*** Number of information sets when using the dynamic non-uniform partitioning method with different row order in table L

Длина n	Общее количество N_{all} при скорости R								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Лексикографический порядок									
50	3	3	15	41	48	80	102	158	312
80	3	3	27	63	79	128	198	313	593
100	3	3	33	79	97	160	205	392	697
Случайный порядок									
50	5	6	25	78	116	148	193	276	461
80	6	6	43	140	196	276	396	560	976
100	7	12	49	208	275	340	509	776	1216

Предложена общая методика построения множества информационных совокупностей для кодов любых скоростей. С помощью данной методики возможно сократить размер множества информационных совокупностей по сравнению с предыдущими методиками.

Необходимо отметить, что при используемых в работе предположениях об исправляемых длинах пакетов на основе модифицированной границы Рейгера построенные множества информационных совокупностей позволяют исправлять как двукратные, так и однократные пакеты ошибок двойной длины.

Предложенная методика может быть использована для разработки вычислительно эффективных декодеров однократных и двукратных пакетов ошибок для конкретных кодовых конструкций.

Финансовая поддержка

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-19-00305 «Пространственно-временные стохастические модели беспроводных сетей с большим числом абонентов».

Литература

1. **Moon T. K.** *Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms*. Second edition. Hoboken, NJ, Wiley, 2021. 992 p.
2. **Smeshko A., Ivanov F., Zyablov V.** Theoretical estimates of burst error probability for convolutional codes. *2020 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA)*, Kapolei, HI, USA, 2020, pp. 136–140.
3. **Kuvshinov A., Timokhin I., Ivanov F.** On the concatenation of superposition and polar codes. *2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, Novosibirsk, Russian Federation, 2024, pp. 52–57. doi:10.1109/SIBIRCON63777.2024.10758448
4. **Liu H., Xiao L., Wang T., Li J.** Error detection and correction codes for memories with enhanced detection abilities. *2024 IEEE 7th International Conference on Electronics and Communication Engineering (ICECE)*, Xi'an, China, 2024, pp. 165–168. doi:10.1109/ICECE63871.2024.10976832
5. **Kim C., Kim J.-W., No J.-S.** New design of error control codes resilient to single burst error or two random bit errors using constacyclic codes. *IEEE Access*, 2022, vol. 10, pp. 131101–131108. doi:10.1109/ACCESS.2022.3229427
6. **Liu H., Xiao L., Wang T., Li J., Li J.** Error correction codes for double burst errors correction in memories. *IEEE Access*, 2025, vol. 13, pp. 116621–116631. doi:10.1109/ACCESS.2025.3586226
7. **Simegn D., Andreev K., Rybin P., Frolov A.** On the design of LDPC-based error-reducing codes. *2024 19th International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS)*, Rio de Janeiro, Brazil, 2024, pp. 1–6. doi:10.1109/ISWCS61526.2024.10639052
8. **Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X.** Burst error identification method for LDPC coded systems. *IEEE Communications Letters*, 2024, vol. 28, no. 7, pp. 1489–1493. https://doi.org/10.1109/LCOMM.2024.3391826
9. **Ovchinnikov A. A.**, **Veresova A. M.**, **Fominykh A. A.** Decoding of linear codes for single error bursts correction based on the determination of certain events, *Информационно-управляющие системы*, 2022, no. 6, pp. 41–52. doi:10.31799/1684-8853-2022-6-41-52, EDN: UWXZHN
10. **Karakchieva L., Trifonov P.** A recursive soft-input soft-output decoding algorithm. *IEEE Transactions on Communications*, 2024, vol. 72, no. 3, pp. 1290–1302. doi:10.1109/TCOMM.2023.3334812
11. **Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H. D., Permuter H. H.** Data-driven polar codes for unknown channels with and without memory. *2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Taipei, IEEE, 2023, pp. 1890–1895. doi:10.1109/ISIT54713.2023.10206663
12. **Fang Y., Chen J.** Decoding polar codes for a generalized Gilbert — Elliott channel with unknown parameter. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, vol. 69, no. 10, pp. 6455–6468. https://doi. org/10.1109/TCOMM.2021.3095195
13. **Yang M., Pan Z., Djordjevic I. B.** FPGA-based burst-error performance analysis and optimization of regular and irregular SD-LDPC codes for 50G-PON and beyond. *Opt. Express*, 2023, vol. 31, no. 6, pp. 10936–10946. doi:10.1364/OE.477546
14. **Song L., Huang Q., Wang Z.** Construction of multipleburst-correction codes in transform domain and its relation to LDPC codes. *IEEE Trans. Commun.*, 2020, vol. 68, no. 1, pp. 40–54. doi:10.1109/TCOMM.2019.2948341
15. **Xiao X., Vasic B., Lin S., Li J., Abdel-Ghaffar K.** Quasi-cyclic LDPC codes with parity-check matrices of column weight two or more for correcting phased bursts of erasures. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, vol. 69, no. 5, pp. 2812–2823. doi:10.1109/TCOMM. 2021.3059001
16. **Вересова А. М.** Оценка эффективности использования марковской метрики при декодировании в каналах с памятью. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 1, с. 29–41. doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41, EDN: JQIBMZ
17. **Трофимов А. Н., Таубин Ф. А.** Улучшенная граница вероятности ошибки при оптимальном приеме в канале с межсимвольной интерференцией. *Ин-*

формационно-управляющие системы, 2023, № 5, с. 33–42. doi:10.31799/1684-8853-2023-5-33-42, EDN: MDHOXU
18. **Kandhway K.** Modeling burst errors in a fading channel. *2022 IEEE 11th International Conference on Communication Systems and Network Technologies (CSNT)*, Indore, India, 2022, pp. 409–414. doi:10.1109/CSNT54456.2022.9787652
19. **Исаева М. Н.** Декодирование одиночных пакетов ошибок по минимуму длины пакета на основе информационных совокупностей. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 2, с. 68–77. doi:10.31799/1684-8853-2025-2-68-77, EDN: MAHCAY
20. **Lin S., Li J.** *Fundamentals of Classical and Modern Error-Correcting Codes*. Cambridge, Cambridge University Press, 2022. 840 p. doi:10.1017/9781009067928
21. **Veresova A. M., Isaeva M. N., Ovchinnikov A. A.** Estimation of independent errors and bursts correction capability of linear codes. *2024 Conference of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElCon)*, Saint Petersburg, IEEE, 2024, pp. 23–27. doi:10.1109/ElCon61730.2024.10468456
22. **Исаева М. Н.** Разработка и анализ методики построения множества плотных информационных совокупностей для исправления пакетов ошибок. *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*, 2024, т. 18, № 10, с. 20–26. doi:10.36724/2072-8735-2024-18-10-20-26

UDC 519.72
doi:10.31799/1684-8853-2025-6-64-73
EDN: ESMBYH

Methodology for constructing information sets with non-uniform partitioning for error burst correction

M. N. Isaeva[a], Senior Lecturer, orcid.org/0009-0007-6228-0617, imn@guap.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Error correction is a relevant problem for modern communication and data storage systems, especially in channels characterized by error bursts. The task of correcting more than one error burst occurring during the transmission of a data block remains poorly studied. **Purpose:** To develop and analyze methods for generating a set of information sets for correcting double error bursts. **Results:** The study has shown that dense information sets previously studied for correcting single error bursts are applicable for correcting double error bursts only for low-rate codes. For codes with higher rates, methods for constructing a set of information sets of a more general type are proposed and analyzed: with uniform and dynamic non-uniform partitioning. The proposed methodology allows correcting any combinations of double error bursts whose length is within the modified Reiger bound. **Practical relevance:** The results of this work are of practical importance for the design of communication systems for transmission over channels with memory, where the frequency of bursts occurrence is high enough to form multiple bursts during the transmission of a single code word. The proposed methods allow improving the noise resistance of such channels and can be used to develop computationally efficient decoders. **Discussion:** The results have been obtained assuming that any consecutive positions of the code word form an information set, and that the lengths of the corrected bursts lie on the modified Reiger bound. It can be expected that these two effects will compensate each other to some extent in terms of the requirements for sets of information sets for specific codes, but the estimation of the parameters of sets of information sets and the construction of decoders based on them for individual classes of codes is a direction for further research.

Keywords — information set decoding, Reiger bound, correction of multiple error bursts, dense information sets, channels with memory.

For citation: Isaeva M. N. Methodology for constructing information sets with non-uniform partitioning for error burst correction. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 6, pp. 64–73 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-6-64-73, EDN: ESMBYH

Financial support
The paper was prepared with the financial support of the Russian Science Foundation, project No. 22-19-00305 “Spatial-temporal stochastic models of wireless networks with a large number of users”.

References

1. Moon T. K. *Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms*. Second edition. Hoboken, NJ, Wiley, 2021. 992 p.
2. Smeshko A., Ivanov F., Zyablov V. Theoretical estimates of burst error probability for convolutional codes. *2020 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA)*, Kapolei, HI, USA, 2020, pp. 136–140.
3. Kuvshinov A., Timokhin I., Ivanov F. On the concatenation of superposition and polar codes. *2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, Novosibirsk, Russian Federation, 2024, pp. 52–57. doi:10.1109/SIBIRCON63777.2024.10758448
4. Liu H., Xiao L., Wang T., Li J. Error detection and correction codes for memories with enhanced detection abilities. *2024 IEEE 7th International Conference on Electronics and Communication Engineering (ICECE)*, Xi’an, China, 2024, pp. 165–168. doi:10.1109/ICECE63871.2024.10976832
5. Kim C., Kim J.-W., No J.-S. New design of error control codes resilient to single burst error or two random bit errors using constacyclic codes. *IEEE Access*, 2022, vol. 10, pp. 131101–131108. doi:10.1109/ACCESS.2022.3229427
6. Liu H., Xiao L., Wang T., Li J., Li J. Error correction codes for double burst errors correction in memories. *IEEE Access*, 2025, vol. 13, pp. 116621–116631. doi:10.1109/ACCESS.2025.3586226
7. Simegn D., Andreev K., Rybin P., Frolov A. On the design of LDPC-based error-reducing codes. *2024 19th International Symposium on Wireless Communication Systems (ISWCS)*, Rio de Janeiro, Brazil, 2024, pp. 1–6. doi:10.1109/ISWCS61526.2024.10639052

8. Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X. Burst error identification method for LDPC coded systems. *IEEE Communications Letters*, 2024, vol. 28, no. 7, pp. 1489–1493. https://doi.org/10.1109/ LCOMM.2024.3391826
9. Ovchinnikov A. A., Veresova A. M., Fominykh A. A. Decoding of linear codes for single error bursts correction based on the determination of certain events, *Информационно-управляющие системы*, 2022, no. 6, pp. 41–52. doi:10.31799/1684-8853-2022-6-41-52, EDN: UWXZHN
10. Karakchieva L., Trifonov P. A recursive soft-input soft-output decoding algorithm. *IEEE Transactions on Communications*, 2024, vol. 72, no. 3, pp. 1290–1302. doi:10.1109/ TCOMM.2023.3334812
11. Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H. D., Permuter H. H. Data-driven polar codes for unknown channels with and without memory. *2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Taipei, IEEE, 2023, pp. 1890–1895. doi:10.1109/ISIT54713.2023.10206663
12. Fang Y., Chen J. Decoding polar codes for a generalized Gilbert — Elliott channel with unknown parameter. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, vol. 69, no. 10, pp. 6455–6468. https://doi. org/10.1109/TCOMM.2021.3095195
13. Yang M., Pan Z., Djordjevic I. B. FPGA-based burst-error performance analysis and optimization of regular and irregular SD-LDPC codes for 50G-PON and beyond. *Opt. Express*, 2023, vol. 31, no. 6, pp. 10936–10946. doi:10.1364/ OE.477546
14. Song L., Huang Q., Wang Z. Construction of multiple-burst-correction codes in transform domain and its relation to LDPC codes. *IEEE Trans. Commun.*, 2020, vol. 68, no. 1, pp. 40–54. doi:10.1109/TCOMM.2019.2948341
15. Xiao X., Vasic B., Lin S., Li J., Abdel-Ghaffar K. Quasi-cyclic LDPC codes with parity-check matrices of column weight two or more for correcting phased bursts of erasures. *IEEE Transactions on Communications*, 2021, vol. 69, no. 5, pp. 2812–2823. doi:10.1109/TCOMM. 2021.3059001
16. Veresova A. M. Performance evaluation of decoding in channels with memory with the use of a Markov metric. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 29–41 (In Russian). doi:10.31799/1684- 8853-2025-1-29-41, EDN: JQIBMZ
17. Trofimov A. N., Taubin F. A. Improved bound on optimal reception error probability for an intersymbol interference channel. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 5, pp. 33–42 (In Russian). doi:10.31799/1684- 8853-2023-5-33-42, EDN: MDHOXU
18. Kandhway K. Modeling burst errors in a fading channel. *2022 IEEE 11th International Conference on Communication Systems and Network Technologies (CSNT)*, Indore, India, 2022, pp. 409–414. doi:10.1109/CSNT54456.2022. 9787652
19. Isaeva M. N. Decoding of single error bursts using minimal burst length criteria and information sets. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 2, pp. 68–77 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-2-68-77, EDN: MAHCAY
20. Lin S., Li J. *Fundamentals of Classical and Modern Error-Correcting Codes*. Cambridge, Cambridge University Press, 2022. 840 p. doi:10.1017/9781009067928
21. Veresova A. M., Isaeva M. N., Ovchinnikov A. A. Estimation of independent errors and bursts correction capability of linear codes. *2024 Conference of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElCon)*, Saint Petersburg, IEEE, 2024, pp. 23–27. doi:10.1109/ElCon61730.2024. 10468456
22. Isaeva M. N. Development and analysis of a method for constructing dense information sets for error bursts correction. *T-Comm*, 2024, vol. 18, no. 10, pp. 20–26 (In Russian). doi:10.36724/2072-8735-2024-18-10-20-26

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию.

Редакция журнала напоминает, что ответственность
за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.