



Кодовые конструкции на базе обобщенных каскадных кодов для систем связи, использующих прием на основе порядковых статистик

Д. С. Осипов^{а,б}, доктор техн. наук, старший научный сотрудник, orcid.org/0000-0003-0400-7181, d_osipov@iitp.ru

^аИнститут проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Б. Каретный пер., 19, стр. 1, Москва, 127051, РФ

^бНациональный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Таллинская ул., 34, Москва, 123458, РФ

Введение: во многих проектируемых в настоящее время и перспективных системах связи методы оценивания характеристик канала и управления мощностью сигнала, разработанные для систем связи предыдущих поколений, не могут обеспечить требуемую точность оценивания и выравнивания мощности сигналов на приемном конце. Одним из вариантов решения этой проблемы является использование методов приема на основе порядковых статистик, которые не требуют управления мощностью или оценивания. Для обеспечения требуемых вероятностных характеристик сигнально-кодовые конструкции на основе таких методов приема должны дополняться внешними кодами. **Цель:** разработать практически значимые конструкции внешних кодов, способные обеспечить как заданные вероятностные характеристики, так и сравнительно высокую скорость передачи в системе связи рассматриваемого типа. **Результаты:** разработан общий подход к выбору внешних кодов на основе теории обобщенных каскадных кодов, в рамках которого двоичные коды в частотной области, интерпретируемые как внутренние коды, дополняются внешними кодами во временной области, параметры которых могут оптимизироваться на основе аналитического расчета и конкретных требований, обусловленных спецификой проектируемых систем. Предложены алгоритмы декодирования с «мягким» входом для внутреннего кода и тем самым для обобщенного каскадного кода в целом. Приведены примеры практически значимых кодов, полученные в результате применения предложенного подхода, основанного на совместном использовании вероятностей ошибки и отказа от декодирования внутренних кодов, полученных с помощью имитационного моделирования, и аналитического метода расчета параметров внешних кодов. **Практическая значимость:** применение предложенного подхода позволяет получать конструкции внешних кодов, оптимизированных по целому ряду критериев и пригодных для аппаратной реализации.

Ключевые слова – межмашинная связь, псевдослучайно переключаемые частоты, прием на основе порядковых статистик, обобщенные каскадные коды, внутренние коды, декодирование с «мягким» входом.

Для цитирования: Осипов Д. С. Кодовые конструкции на базе обобщенных каскадных кодов для систем связи, использующих прием на основе порядковых статистик. *Информационно-управляющие системы*, 2026, № 3, с. 49–62. doi:10.31799/1684-8853-2026-3-49-62, EDN: ZJAEPG

For citation: Osipov D. S. Generalized concatenated code-based constructions for communication systems with order statistics-based reception. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2026, no. 3, pp. 49–62 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2026-3-49-62, EDN: ZJAEPG

Введение

В настоящее время многие вновь проектируемые системы связи должны работать в условиях воздействия интенсивных аддитивных помех различного типа. Это в частности справедливо для систем связи, использующих неортогональный множественный доступ, таких как системы массового межмашинного взаимодействия и системы сверхнадежной связи с низкой задержкой. Сравнительно высокая мощность помех объясняется как большим числом устройств, одновременно ведущих передачу, так и несовершенством механизмов управления мощностью, традиционно используемых в таких системах. Наряду с тем, что устройства передают сравнительно короткие

сообщения (зачастую спорадически) и во многих сценариях находятся в движении, мощность и спектральный состав помехи существенно меняются во времени, что в значительной степени снижает эффективность механизмов оценивания характеристик канала. В научной литературе предложены различные методы решения проблем управления мощностью и оценивания [1–5]. В настоящей работе рассматривается принципиально иной подход: однопользовательский некогерентный прием на основе порядковых статистик, не использующий оценки характеристик канала и не требующий выравнивания мощностей сигналов на приемном конце. Системы с приемниками на основе этого принципа могут работать в условиях интенсивных аддитивных помех

различного типа, не нуждаются в механизмах управления мощностью передачи и процедурах оценивания характеристик канала, не требуют блоковой синхронизации, допускают некоординированную передачу и способны обеспечить устойчивый прием без информации о таких параметрах системы связи, как число активных пользователей в сети или отношение сигнал/шум на приемном конце. В литературе были предложены различные однопользовательские приемники на основе порядковых статистик и сигнально-кодовые конструкции для таких приемников [6–10]. Настоящая работа посвящена проблеме построения практически значимых внешних кодов для сигнально-кодовой конструкции и системы связи, описанных в [10], и оптимизации параметров таких кодов.

Система многотональной связи, использующая подкоды МДР-кодов, динамически выделяемый поддиапазон и декодирование на основе порядковых статистик: передача, прием и стратегии декодирования

Будем считать, что в рассматриваемой системе связи $U + 1$ пользователей одновременно ведут передачу по каналу «вверх» и все пользователи используют одну и ту же сигнально-кодовую конструкцию. Здесь и далее будем рассматривать прием данных от одного пользователя, которого будем называть «рассматриваемым», а сигналы, переданные другими пользователями, которых будем называть «мешающими», будут рассматриваться как источник помех.

Предполагается, что каждый из пользователей передает кодовые слова $C_q(N_r, k_I, d_I)$ -кода над полем $GF(q)$, который называется внешним кодом в частотной области. Рассмотрим передачу i -м пользователем t -го по счету кодового слова $\mathbf{v}_{i,t} = [v_{i,t,1}, \dots, v_{i,t,N_r}]$. Каждый символ кодового слова кодируется отдельным кодом (эти коды будем называть внутренними кодами во временной области):

$$c_{i,t,\rho} = v_{i,t,\rho} \cdot \mathbf{g}_\rho + \beta^{b_\rho} \cdot \mathbf{g}_{N_r+1},$$

где \mathbf{g}_ρ – строка порождающей матрицы вида

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{N_r} \\ \mathbf{g}_{N_r+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^0 & \beta^0 & \dots & \beta^0 \\ \beta^1 & \beta^2 & \dots & \beta^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^{N_r} & \beta^{2 \cdot N_r} & \dots & \beta^{(N_r \cdot n)} \end{bmatrix};$$

b_1, \dots, b_{N_r} – натуральные числа такие, что $\forall s, \rho: 1 \leq \rho \leq N_r, 1 \leq s \leq N_r, 1 \leq b_s \leq n, 1 \leq b_\rho \leq n, b_s \neq b_\rho; \beta$ – примитивный элемент поля.

Таким образом, каждый из N_r внутренних кодов во временной области является подкодом $C_q(n, N_r + 1, n - N_r)$ -кода, полученного выкалыванием из $C_q(q, N_r + 1, q - N_r)$ -кода Рида – Соломона.

Затем каждый символ каждого из N_r кодовых слов внутренних кодов во временной области отображается в вектор-кодовое слово кода, который взаимно однозначно сопоставляет каждому символу поля вектор веса 1 (такой нелинейный равновесный эквидистантный код называется внутренним кодом в частотной области). В результате каждое слово внутреннего кода во временной области (и, соответственно, каждый символ внешнего кода в частотной области) отображается в двоичную матрицу $\mathbf{M}_{i,t,\rho}$, в каждом столбце которой стоит единственный ненулевой элемент. Все полученные матрицы складываются в поле действительных чисел, полученная

в результате матрица имеет вид $\mathbf{M}_{i,t} = \sum_{\rho=1}^{N_r} \mathbf{M}_{i,t,\rho}$.

Именно эта матрица размера $q \times n$ будет передаваться рассматриваемым пользователем по каналу связи. Для этого пользователь дописывает к полученной матрице матрицу из всех нулей \mathbf{Z} размера $(Q - q) \times n$. Каждый (пусть для определенности s -й) столбец полученной матрицы

$$\tilde{\mathbf{M}}_{i,t} = [\tilde{m}_{i,t,1}, \tilde{m}_{i,t,2}, \dots, \tilde{m}_{i,t,n}] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{i,t} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

подвергается псевдослучайной перестановке $\pi_{i,s}$ (где s – номер символов внутренних кодов во временной области, все перестановки независимы). Каждый столбец полученной матрицы

$$\tilde{\mathbf{M}}_{i,t} = [\pi_{1,1}(\tilde{m}_{i,t,1}), \pi_{1,2}(\tilde{m}_{i,t,2}), \dots, \pi_{1,N}(\tilde{m}_{i,t,n})]$$

последовательно передается в канал, причем каждый символ передается на отдельной поднесущей. Таким образом, для передачи сообщений в описываемой системе связи требуется метод передачи, обеспечивающий возможность передачи на Q независимых поднесущих. Здесь и далее без потери общности будем полагать, что для решения этой задачи используется OFDM с циклическим префиксом. Совокупность поднесущих, которые соответствуют первым q строкам матрицы $\tilde{\mathbf{M}}_{i,t}$ (матрице $\mathbf{M}_{i,t}$), т. е. тем поднесущим, которые могут использоваться для передачи s -х символов слов внутреннего кода во временной области, будем называть частотным поддиапазоном. Так как благодаря псевдослучайным перестановкам номера поднесущих, входящих в частотный поддиапазон, в котором передаются s -е символы, меняются при передаче символов для каждого нового значения s , как и в работе [11], будем говорить, что символы, соответствующие внутренним

кодам во временной области, передаются в динамически выделяемом частотном поддиапазоне. Каждый ненулевой символ матрицы $\mathbf{M}_{i,t}$ (и, следовательно, матриц $\tilde{\mathbf{M}}_{i,t}$ и $\mathbf{M}_{i,t}$) формирует сигнал на одной из поднесущих, поэтому внутренний код в частотной области является, по существу, способом отображения символов внутреннего кода во временной области на созвездие частотно-позиционной модуляции.

При приеме для каждого принятого из канала вектора-столбца высоты Q выполняется обратная перестановка $\pi_{i,s}^{-1}$. В результате измерения, соответствующие сигналам, переданным рассматриваемым пользователем, оазываются в первых q строках. Подматрица, соответствующая этим строкам, задается выражением вида

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{i,t} = \mathbf{M}_{i,t} * \mathbf{A}_{i,t} * \Psi_{i,t} + \sum_{k \neq i, k=1}^{U+1} \mathbf{W}_{i,k,t} * \mathbf{A}_{k,t} * \Psi_{k,t} + \boldsymbol{\eta}.$$

Здесь $*$ – знак произведения Адамара (Шура); $\mathbf{A}_{i,t}$ – матрица амплитуд коэффициентов передачи канала «вверх» от i -го пользователя к центральному узлу; $\Psi_{i,t}$ – матрица вида

$$\Psi_{i,t} = \begin{bmatrix} e^{j\psi_{1,1}} & \dots & e^{j\psi_{1,n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\psi_{q,1}} & \dots & e^{j\psi_{q,n}} \end{bmatrix},$$

где j – мнимая единица и $\psi_{a,b}$ – случайная величина, равномерно распределенная на окружности $[0, 2\pi]$; $\boldsymbol{\eta}$ – матрица, соответствующая отсчетам фонового аддитивного шума; $\mathbf{W}_{i,k,t}$ – подматрица, соответствующая q первым строкам матрицы

$$\tilde{\mathbf{W}}_{i,k,t} = \left[\pi_{i,1}^{-1} \left(\pi_{k,\omega_1} \left(\tilde{\mathbf{m}}_{k,T(t,\tau_k,1),S(t,\tau_k,1)} \right) \right), \dots, \pi_{i,n}^{-1} \left(\pi_{k,\omega_n} \left(\tilde{\mathbf{m}}_{k,T(t,\tau_k,n),S(t,\tau_k,n)} \right) \right) \right],$$

где ω_s – номер перестановки, которая использовалась при передаче столбца, соответствующего $S(t, \tau_k, s)$ -му символу $T(t, \tau_k, s)$ -го кодового слова k -го пользователя:

$$S(t, \tau_k, s) = (n + s - \tau_k + 1) \bmod n + 1;$$

$$T(t, \tau_k, s) = \begin{cases} t & \tau_k = 0 \\ t & s \leq |\tau_k|, \tau_k < 0 \\ t + 1 & s > |\tau_k|, \tau_k < 0, \\ t - 1 & s \leq |\tau_k|, \tau_k > 0 \\ t & s > |\tau_k|, \tau_k > 0 \end{cases}$$

τ_k – задержка сигнала от k -го «мешающего» пользователя относительно сигнала от рассматриваемого (i -го) пользователя; s – номер символа t -го кодового слова.

Приемник извлекает и возводит каждый элемент матрицы в квадрат, вычисляя энергии принятых сигналов. Каждый столбец полученной матрицы $\boldsymbol{\Omega}_{i,t} = \tilde{\mathbf{Y}}_{i,t} \cdot \tilde{\mathbf{Y}}_{i,t}^H$ сортируется по убыванию. Обозначим матрицу, полученную сортировкой столбцов матрицы $\boldsymbol{\Omega}_{i,t}$ (по убыванию), как $\boldsymbol{\Omega}_{i,t}^\downarrow$. Используя матрицу $\boldsymbol{\Omega}_{i,t}^\downarrow$, приемник вычисляет $\mathbf{D}_{i,t}^\alpha$ – матрицу оценок достоверности каждого символа кодового слова как

$$\mathbf{D}_{i,t}^\alpha(s, z) = \begin{cases} \lambda_1 & \boldsymbol{\Omega}_{i,t}(s, z) \geq \boldsymbol{\Omega}_{i,t}^\downarrow(\alpha, z) \\ \lambda_0 & \boldsymbol{\Omega}_{i,t}(s, z) < \boldsymbol{\Omega}_{i,t}^\downarrow(\alpha, z) \end{cases},$$

где λ_1 и λ_0 – заранее выбранные действительные константы ($0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1$); $\boldsymbol{\Omega}_{i,t}^\downarrow(\alpha, z)$ – элемент матрицы $\boldsymbol{\Omega}_{i,t}^\downarrow$, стоящий на пересечении строки с номером α и столбца с номером z (т. е. элемент с номером α в вариационном ряду, составленном путем упорядочивания элементов столбца с номером z матрицы $\boldsymbol{\Omega}_{i,t}$ по убыванию); α – заранее выбранное натуральное число ($1 < \alpha < q$). Так как каждый символ кодового слова внешнего кода кодируется отдельным внешним кодом, приемник использует N_r декодеров, при этом входом каждого из декодеров является матрица оценок достоверности $\mathbf{D}_{i,t}^\alpha$. В работе [11] показано, что вероятностные характеристики декодеров не зависят от выбора констант λ_0 и λ_1 , поэтому здесь и далее будем полагать, что используются наиболее удобные с точки зрения аппаратной реализации значения $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = 1$.

Пусть каждое слово каждого из внутренних кодов во временной области пронумеровано числами от 1 до q . Так как внутренний код в частотной области задает взаимно однозначное соответствие, в котором каждому символу конечного поля ставится в соответствие единственный двоичный вектор веса 1, каждому слову с номером m внутреннего кода во временной области с номером ρ соответствует единственная матрица $\mathbf{X}_{\rho,m}$. Каждый декодер вычисляет решающие статистики

$$S_{\rho,m}^{i,t} = \sum_{s=1}^q \sum_{z=1}^n \mathbf{D}_{i,t}^\alpha(s, z) * \mathbf{X}_{\rho,m}(s, z)$$

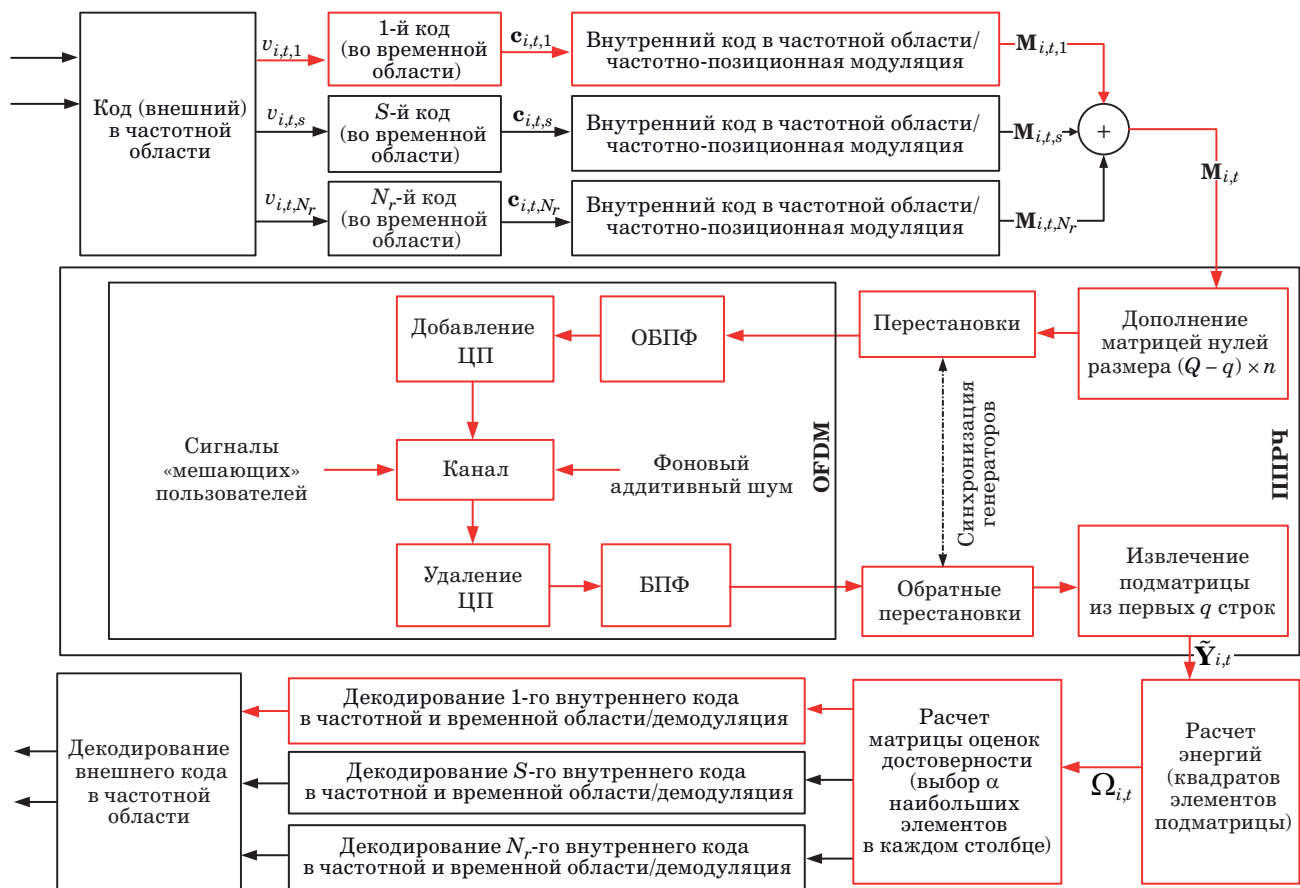
и возвращает вектор $\mathbf{f}_\rho = [f_\rho(1), f_\rho(2), \dots, f_\rho(q)]^T$, где

$$f_\rho(m) = \begin{cases} 1 & S_{\rho,m}^{i,t} = \max_m(S_{\rho,m}^{i,t}) \\ 0 & S_{\rho,m}^{i,t} \neq \max_m(S_{\rho,m}^{i,t}) \end{cases}.$$

Описанная выше система, в которой символы кодовых слов различных внутренних кодов во временной области с одинаковым номером передаются на нескольких, вообще говоря, разных

поднесущих в одном и том же частотном поддиапазоне, является модификацией и обобщением одночастотной системы связи, описанной в [11], в которой в каждом OFDM-символе передавался символ только одного кодового слова внутреннего кода во временной области. Одночастотная система связи [11] в свою очередь представляла собой, по существу, модификацию системы связи на основе метода псевдослучайной перестройки рабочей частоты (ППРЧ, Frequency hopping) [12], которая отличалась от традиционной системы на базе ППРЧ динамическим выделением поддиапазонов, а также методом расчета оценок достоверности и способом декодирования (демодуляции) на основе вычисленных таким образом оценок. В частности, операция дополнения матрицы $M_{i,t}$ матрицей Z размера $(Q - q) \times n$ и последующие перестановки эквивалентны отображению элементов на случайно выбранные поднесущие, т. е. динамическому формированию частотного поддиапазона, о котором говорилось выше.

На схеме приема и передачи в системе рассматриваемого типа (рис. 1) красным показаны блоки, сигналы и потоки данных, соответствующие одночастотной системе из работы [11]. Система рассматриваемого типа отличается по существу тем, что в ней каждый пользователь передает несколько символов, каждому из которых соответствует свой внутренний код во временной области. Именно по этой причине в предлагаемой многочастотной конструкции используется несколько различных внутренних кодов во временной области: помимо минимизации влияния многопользовательской помехи (эту функцию, как и в [11], выполняют совместно внутренний код во временной области, внутренний код в частотной области и псевдослучайные перестановки), выбранные описанным выше способом внутренние коды также позволяют восстановить символы, кодируемые различными внутренними кодами, с использованием одной и той же матрицы оценок достоверности. Внешний код в частотной



Используемые сокращения:

ЦП – циклический префикс; ОБПФ – обратное быстрое преобразование Фурье; БПФ – быстрое преобразование Фурье; ППРЧ – система связи, использующая метод псевдослучайной перестройки рабочей частоты; OFDM – Orthogonal Frequency Division Multiplexing (мультиплексирование с использованием ортогональных частот)

■ **Рис. 1.** Передача и прием в системе связи рассматриваемого типа
 ■ **Fig. 1.** Transmission and reception in the communication system under consideration

области необходим для исправления стираний и исправления или обнаружения ошибок, которые возникают в результате отказа от декодирования или ошибочного декодирования внутренних кодов во временной области соответственно.

В работе [9] использовалось декодирование внутренних кодов с «жестким» выходом, для каждого из векторов декодер внутреннего кода принимал решение, руководствуясь следующим правилом: если в векторе была единственная ненулевая координата, декодер принимал решение о том, что на позиции с номером стоял символ, соответствующий номеру этой ненулевой координаты, в противном случае принимал решение о стирании, после чего результаты декодирования передавались на вход декодера внешнего кода. В работе [10] обсуждались алгоритмы, которые можно интерпретировать как алгоритмы декодирования внешнего кода в частотной области с «мягким» входом. Такие алгоритмы используют оценки достоверности, которые хранятся в виде векторов \mathbf{f}_p непосредственно, минуя фазу жесткого решения, и обеспечивают существенно лучшие вероятностные характеристики [10]. Здесь обратимся к следующему алгоритму декодирования.

Алгоритм 1. Алгоритм декодирования кодов в частотной области с «мягким» входом.

Декодер получает на вход матрицу $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{N_r}]$ из N_r двоичных векторов высоты q (где $\mathbf{f}_p = [f_p(1), f_p(2), \dots, f_p(q)]^T$), порождающую матрицу \mathbf{G}_T используемого систематического кода и максимально допустимый размер списка L_M .

1.1. Декодер вычисляет число векторов, которые подлежат проверке: $L_o = \prod_{i=1}^{k_I} \sum_{t=1}^q f_i(t)$, и сравнивает это число с максимально допустимым размером списка.

В случае, если $L_o > L_M$, принимается решение об отказе от декодирования, в противном случае декодер переходит к шагу 1.2.

1.2. Декодер строит список информационных последовательностей, которым соответствуют ненулевые элементы в первых k_I столбцах, т. е. множество \mathbf{U} таких информационных последовательностей, для которых выполняется

$$\forall \mathbf{u}_g = [u_{g,1}, \dots, u_{g,k_I}] \in \mathbf{U}, \forall s \in \{1, \dots, k_I\}, f_s(\phi_I(u_{g,s})) \equiv 1.$$

1.3. Декодер кодирует все последовательности из множества и проверяет выполнение условия

$$\forall \mathbf{u}_g \in \mathbf{U}, \mathbf{v}_g = [v_{g,k_I+1}, \dots, v_{g,N_r}] = \mathbf{u}_g \mathbf{G}_I, \forall s \in \{k_I, \dots, N_r + 1\}, f_s(\phi_I(v_{g,s})) \equiv 1,$$

формируя Λ_v^* – список кодовых последовательностей.

1.4. Если список Λ_v^* содержит только одно слово, декодер объявляет это слово результатом декодирования, в противном случае принимает решение об отказе.

Как уже отмечалось, использование алгоритмов с «мягким» входом существенно улучшает вероятности ошибки и отказа внешнего кода [10]. Однако многие реальные приложения требуют гораздо лучших вероятностных характеристик, чем те, которые обеспечивают внешние коды в частотной области, и, кроме того, используют более длинные сообщения, поэтому вполне естественной представляется идея дополнить описанную выше конструкцию внешним кодом во временной области. Здесь для решения этой задачи предлагается использовать подход на основе обобщенных каскадных кодов (ОКК), допускающих гибкий выбор комбинаций внешних и внутренних кодов и позволяющих аналитически подбирать параметры внешних кодов в зависимости от конкретных сценариев и требований. Ниже, в частности, будет предложена модификация алгоритма декодирования ОКК на случай мягкого декодирования внутренних кодов.

Обобщенные каскадные коды: кодирование и декодирование

Линейные обобщенные каскадные коды были предложены Э. Л. Блохом и В. В. Зябловым [13]. Здесь ограничимся представлением принципов кодирования и декодирования линейных ОКК в объемах, необходимых для описания конструкции, предлагаемой в настоящей работе, и методики расчета параметров кода и скоростей передачи, которых применение кода с такими параметрами позволяет достигать.

Для построения линейного ОКК используем систему заданных в систематической форме вложенных внутренних кодов $C_{I,l}$ ($l = 0 \dots M - 1$), для которых выполняется условие $C_{I,M-1} \subset C_{I,M-2} \subset \dots \subset C_{I,1} \subset C_{I,0}$ над полем $GF(q)$ с параметрами $C_q(N_I, k_{I,l})$, где

$$k_{I,l} = \begin{cases} N_I - r_0 & l = 0 \\ N_I - \sum_{l=0}^{l-1} k_l - r_0 & l > 0 \end{cases},$$

и набор заданных в систематической форме внешних кодов, где каждый внешний код с параметрами $C_{q,k_l}(N_O, K_{O,l})$, соответствующий l -му слою, определен над расширением поля $GF(q)$ степени k_l .

Слово ОКК представим в виде матрицы \mathbf{c} из N_I строк и N_O столбцов над полем $GF(q)$.

Положим, что матрица \mathbf{c} разбита на подматрицы, соответствующие проверкам и информационным символам слоев, которые пронумеруем последовательно, начиная с нижних строк. Для определенности будем считать, что информационные символы внешних кодов всегда располагаются в левых частях соответствующих подматриц, а позиции, соответствующие информационным символам внутренних кодов, — в верхней части матрицы. Рассмотрим частичные матрицы $\tilde{\mathbf{c}}_l$, каждая из которых соответствует процедуре кодирования l -го слоя, отдельно. С учетом принятых ранее соглашений и обозначений нижняя подматрица матрицы $\tilde{\mathbf{c}}_l$, соответствующая по-

$$r_l = \begin{cases} r_0 & l = 0 \\ r_0 + \sum_{m=0}^{l-1} \kappa_m & l > 0 \end{cases}$$

строкам, отводится под проверки внутреннего кода l -го слоя, следующие κ_l строк отводятся под символы внешнего кода l -го слоя, а оставшиеся $N_O - \kappa_l - r_l$ строк в верхней части матрицы $\tilde{\mathbf{c}}_l$ заполняются нулевыми символами из поля. Процесс кодирования для каждой частичной подматрицы, соответствующей l -му слою, выглядит следующим образом: сначала заполняются K_l столбцов в левой части подматрицы, отведенной под слово внешнего кода, соответствующие информационным символам внешнего кода, затем кодер внешнего кода вычисляет соответствующие этим информационным символам проверки кодового слова внешнего кода, заполняя оставшиеся в правой части подматрицы позиции, наконец, кодер внутреннего кода выполняет кодирование внутреннего кода по каждому столбцу,

используя $k_{I,l} = N_I - \sum_{m=0}^{l-1} \kappa_m - r_0$ элементов в верхней части каждого столбца как информационные

символы и заполняя $r_{I,l} = \sum_{m=0}^{l-1} \kappa_m + r_0$ символов в нижней части столбца, соответствующих проверкам внутреннего кода. Таким образом, каждая частичная матрица $\tilde{\mathbf{c}}_l$ представляет собой кодовое слово каскадного кода, в котором слову внешнего кода соответствует подматрица специального вида, описанная выше, а роль внутреннего кода играет код с параметрами $C_q(N_I, k_{I,l})$. Словом ОКК \mathbf{c} будем называть сумму всех час-

тичных матриц $\tilde{\mathbf{c}}_l$ над полем $GF(q)$: $\mathbf{c} = \sum_{l=0}^{M-1} \tilde{\mathbf{c}}_l$.

Рассмотрим теперь алгоритм декодирования. Классический алгоритм декодирования l -го слоя ОКК выглядит следующим образом.

Алгоритм 2. Алгоритм декодирования l -го слоя линейного ОКК с «жестким» входом.

Алгоритм получает на вход матрицу

$$\mathbf{y}_l = \mathbf{c}_l + \mathbf{e} = \sum_{m=l}^{M-1} \tilde{\mathbf{c}}_m + \mathbf{e}.$$

2.1. Декодер внутренних кодов выполняет жесткое декодирование внутренних кодов, вычисляя матрицы $\hat{\mathbf{d}}_l = \hat{\mathbf{c}}_l + \hat{\mathbf{e}}_l$ (матрицу, соответствующую значениям кодовых слов после декодирования внутренних кодов) и Φ_l (матрицу, в которой столбцам, при декодировании которых было принято решение об отказе, соответствуют единичные столбцы, а столбцам, для которых декодирование завершилось успешно, — нулевые). Результат можно записать как

$$\mathbf{d}_l = \theta_x(\Phi_l, \hat{\mathbf{c}}_l + \hat{\mathbf{e}}_l), \quad (1)$$

где $\theta_x()$ — матричная функция, позволяющая учесть стирания, введенные в результате отказа внутренних кодов от декодирования. Структура кода позволяет выполнять эту операцию независимо для каждого внутреннего кода, каждого столбца, поэтому этот шаг можно распараллелить в N_O раз.

2.2. Декодер вычисляет матрицы, соответствующие h -му слою, кодируя верхние

$k_{I,h} = N_O - \sum_{m=0}^{h-1} \kappa_m - r_0$ строк внутренним $C_q(N_I, k_{I,h})$ -

кодом, и вычитает их из текущей матрицы последовательно для h от $M - 1$ до $l + 1$:

$$\hat{\mathbf{d}}_l = \check{\mathbf{d}}_{l,l+1} = \mathbf{d}_l - \sum_{h=l+1}^{M-1} \tilde{\mathbf{c}}_{l,h}. \quad (2)$$

Операции кодирования внутренними кодами и вычитания также происходят независимо для всех столбцов матрицы и могут выполняться параллельно.

2.3. Декодер внешнего $C_{q^{\kappa_l}}(N_O, K_{O,l})$ -кода выполняет декодирование внешнего кода, используя информацию, содержащуюся в соответствующей ему подматрице, и выполняя исправление ошибок и стираний. В случае, если декодер принимает решение об отказе от декодирования, принимается решение об отказе от декодирования всего слова ОКК в целом. В противном случае декодер переходит к следующему шагу.

2.4. Кодируя матрицу, состоящую из $\sum_{s=l+1}^{M-1} \kappa_s$

нулевых строк, соответствующих слоям с $(l + 1)$ -го до $(M - 1)$ -го, и κ_l строк, соответствующих кодовому слову внешнего кода l -го слоя, декодер получает матрицу $\hat{\mathbf{c}}_l$ — оценку матрицы $\tilde{\mathbf{c}}_l$, соответствующую l -му слою, вычитает ее из

матрицы y_l и передает полученную матрицу

$$y_{l+1} = \sum_{m=l}^{M-1} \tilde{c}_m + \mathbf{e} - \hat{c}_l \text{ декодеру следующего слоя.}$$

Особенности рассматриваемой конструкции и модифицированный алгоритм декодирования линейных обобщенных каскадных кодов

В настоящей работе рассмотрена конструкция, в которой каждый вектор, поступающий на вход кодера внутреннего кода во времени, является столбцом матрицы, представляющей собой слово ОКК. Таким образом, каждый столбец матрицы (слова внешнего ОКК) является, по существу, кодом в частотной области.

Алгоритмы с «мягким» входом такие, как описанный здесь алгоритм 1, обеспечивают лучшие вероятностные характеристики, чем традиционные алгоритмы декодирования с «жестким» входом [10]. Классический алгоритм декодирования линейных ОКК, описанный выше, подразумевает именно жесткое декодирование внутренних кодов. Задача разработки алгоритма декодирования ОКК, в котором для декодирования внутренних кодов использовались методы с «мягким» входом, была изучена в работах [14–16], однако в этих работах рассматривалось декодирование для канала с аддитивным гауссовым шумом, в частности использование алгоритма Чейза для декодирования двоичных кодов или стек-алгоритма на синдромных решетках надкодов. В случае, который исследуется в настоящей работе, эти подходы неприменимы. По этой причине ниже будет предложена модифицированная версия алгоритма 1, адаптированная для декодирования линейных ОКК, а затем и модифицированный алгоритм декодирования линейных ОКК, использующий мягкое декодирование внутренних кодов.

Алгоритм декодирования кодов в частотной области, описанный выше, выдает жесткое решение, т. е., как и в случае с классическими алгоритмами декодирования, результатом его работы является либо единственное кодовое слово, либо решение об отказе, поэтому шаги 2.2 и 2.3 алгоритма 2 могут быть оставлены без изменений. Однако на вход декодера ОКК в рассматриваемом случае подаются оценки достоверности, а не значения символов, как в классическом случае, поэтому шаг 2.4 классического алгоритма не может быть реализован в том виде, в котором он описан в алгоритме 2. Ниже будет приведена модификация алгоритма декодирования внутреннего кода, которая позволяет объединить шаг 2.4 при декодировании l -го слоя и шаг 2.1 в процедуру декодирования $(l + 1)$ -го слоя.

Для того чтобы модифицировать процедуру декодирования для интересующего нас случая, достаточно заметить, что по построению каждый вектор (он же t -й столбец матрицы-кодového слова ОКК), передаваемый по каналу способом, описанным в разделе «Система многотональной связи, использующая подкоды МДР-кодов, динамически выделяемый поддиапазон и декодирование на основе порядковых статистик: передача, прием и стратегии декодирования», является

$$\text{кодovým словом внутреннего кода } \mathbf{v}_{0,t}^* = \sum_{l=0}^{M-1} \mathbf{v}_{l,t}.$$

На каждом шаге декодирования ОКК, соответствующем g -му слою, декодеру известны кодовые слова, соответствующие предыдущим $g - 1$ слоям. Таким образом, декодер каждый раз ищет слово

$$\mathbf{v}_{0,t}^* = \sum_{l=0}^{g-1} \mathbf{v}_{l,t} + \sum_{l=g}^{M-1} \mathbf{v}_{l,t},$$

причем первое слагаемое известно декодеру. Второе слагаемое, т. е. вектор

$$\mathbf{v}_{g,t}^* = \sum_{l=g}^{M-1} \mathbf{v}_{l,t},$$

является кодовым словом внутреннего вложенного кода, используемого для кодирования g -го слоя. Алгоритм 3 учитывает структуру кодовых слов в линейном ОКК, используя информацию о результатах декодирования предшествующего слоя для декодирования внутреннего кода нового слоя.

Алгоритм 3. Алгоритм декодирования внутренних кодов l -го слоя линейного ОКК с «мягким» входом для оценок достоверности рассматриваемого типа.

Декодер получает на вход кодовое слово кода предыдущего уровня $\mathbf{v}_{l-1} = [v_{l-1,1}, \dots, v_{l-1,N_r}]$, матрицу $\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{N_r}]$ из N_r двоичных векторов высоты q (где $\mathbf{f}_s = [f_s(1), f_s(2), \dots, f_s(q)]^T$), порождающую матрицу $\mathbf{D}_{l,l}$ используемого систематического кода l -го уровня и максимально допустимый размер списка L_M .

3.1. Декодер вычисляет число векторов, которые подлежат проверке: $L_o = \prod_{i=1}^{k_{l,l}} \sum_{t=1}^q f_i(t)$, и сравнивает это число с максимально допустимым размером списка.

В случае, если $L_o > L_M$, принимается решение об отказе от декодирования, в противном случае декодер переходит к шагу 3.2.

3.2. Декодер строит список информационных последовательностей, которым соответствуют ненулевые элементы в первых $k_{l,l}$ столбцах, т. е.

множество \mathbf{U} таких информационных последовательностей, для которых

$$\forall \mathbf{u}_g = [u_{g,1}, \dots, u_{g,k_I}] \in \mathbf{U}, \forall s \in \{1, \dots, k_{I,l}\},$$

$$f_s(\phi_I(u_{g,s} + v_{l-1,s})) \equiv 1.$$

3.3. Декодер кодирует все последовательности из множества и проверяет выполнение условия

$$\forall \mathbf{u}_g \in \mathbf{U},$$

$$\mathbf{v}_g = [v_{g,k_I+1}, \dots, v_{g,N_r}] = \mathbf{u}_g \mathbf{G}_{I,l},$$

$$\forall s \in \{k_{I,l}, \dots, N_r + 1\}, f_s(\phi_I(v_{g,s} + v_{l-1,s})) \equiv 1,$$

формируя Λ_v^* – список кодовых последовательностей.

3.4. Если список Λ_v^* содержит только одно слово, декодер объявляет это слово результатом декодирования, в противном случае принимает решение об отказе.

Теперь приведем формальное описание модифицированного алгоритма декодирования линейного ОКК.

Алгоритм 4. Модифицированный алгоритм декодирования l -го слоя ОКК.

Декодер получает на вход матрицу, столбцами которой являются кодовые слова внутреннего кода, полученные в результате декодирования предыдущего слоя ($\mathbf{v}_{l-1} = [v_{l-1,1}, \dots, v_{l-1,N_r}]$, в частности при декодировании 0-го слоя $\mathbf{v}_{-1} = [\bar{0}, \dots, \bar{0}]$), трехмерную матрицу $\Theta = [\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N]$, где \mathbf{F}_s – матрица оценок достоверности для s -го столбца, порождающую матрицу $\mathbf{D}_{I,l}$ используемого на l -м слое систематического кода внутреннего кода и максимально допустимый размер списка L_M .

4.1. Выполняет декодирование для каждого (s -го) столбца, используя матрицу оценок достоверности \mathbf{F}_s , кодовое слово, соответствующее этому столбцу при декодировании предыдущего ($(l-1)$ -го) слоя $\mathbf{v}_{s,l-1}$, порождающую матрицу $\mathbf{D}_{I,l}$, максимально допустимый размер списка L_M и алгоритм 3, вычисляя матрицы $\hat{\mathbf{d}}_l = \hat{\mathbf{c}}_l + \mathbf{e}_l$ (матрицу, соответствующую значениям кодовых слов после декодирования внутренних кодов) и Φ_l (матрицу, в которой столбцам, при декодировании которых было принято решение об отказе, соответствуют единичные столбцы, а столбцам, для которых декодирование завершилось успешно, – нулевые). Результирующую матрицу можно записать аналогично (1).

Структура кода позволяет выполнять эту операцию независимо для каждого внутреннего кода, каждого столбца, поэтому этот шаг можно распараллелить в N_O раз.

4.2. Декодер вычисляет матрицы, соответствующие h -му слою, кодируя верхние

$$k_{I,h} = N_O - \sum_{m=0}^{h-1} \kappa_m - r_0 \quad \text{строк} \quad \text{внутренним}$$

$C_q(N_I, k_{I,h})$ -кодом, и вычитает их из текущей матрицы последовательно для h от $M-1$ до $l+1$ по формуле (2).

Операции кодирования внутренними кодами и вычитания также происходят независимо для всех столбцов матрицы и могут выполняться параллельно.

4.3. Декодер внешнего $C_{q^{\kappa_l}}(N_O, K_{O,l})$ -кода выполняет декодирование внешнего кода, используя информацию, содержащуюся в соответствующей ему подматрице, и выполняя исправление ошибок и стираний. В случае, если декодер принимает решение об отказе от декодирования, принимается решение об отказе от декодирования всего слова ОКК в целом. В противном случае декодер переходит к следующему шагу.

$$4.4. \text{Кодируя матрицу, состоящую из } \sum_{s=l+1}^{M-1} \kappa_s$$

нулевых строк, соответствующих слоям с $(l+1)$ -го до $(M-1)$ -го, и κ_l строк, соответствующих кодовому слову внешнего кода l -го уровня, внутренним кодом, декодер получает матрицу $\hat{\mathbf{c}}_l = [\mathbf{v}_{1,l}, \dots, \mathbf{v}_{N,l}]$ – оценку матрицы $\tilde{\mathbf{c}}_l$, соответствующую l -му слою, и передает ее декодеру следующего слоя.

Особенности и параметры кодовых конструкций рассматриваемого типа и их исследование

Здесь и далее будем рассматривать конструкцию, в которой все внешние коды определяются над тем же полем $GF(q)$, что и внутренние, т. е. $\kappa_l = 1$. В качестве внутреннего кода, соответствующего 0-му слою, будем всегда использовать код с проверкой на четность длины $N_I = N_r$, а коды последующих уровней выбирались как подкоды кода каждого предыдущего уровня. Таким образом, внутренний код каждого (l -го) слоя является $C_q(N_r, N_r - l - 1, l + 2)$ МДР-кодом (кодом с максимально достижимым расстоянием). Для того чтобы вложенные коды были систематическими, использован следующий подход.

$$\text{Пусть } \mathbf{G}_{I,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{l,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{l,N_r-l-1}^T \end{bmatrix} \quad \text{– порождающая}$$

матрица $C_q(N_r, N_r - l - 1, l + 2)$ -кода. Тогда

$$\mathbf{G}_{I,l+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{l+1,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{l+1,N_r-l-2}^T \end{bmatrix} \quad \text{– порождающая матрица}$$

внутреннего кода каждого $(l + 1)$ -го слоя, где каждый вектор-строка определяется как $\mathbf{g}_{l+1,m}^T = \mathbf{g}_{l,m}^T + \beta^{2m+1} \cdot \mathbf{g}_{l,N_r-l-1}^T$.

Последнему слою соответствует $C_q(N_r, 1, N_r)$ обобщенный код с повторением.

В качестве внешних кодов будем использовать $C_q(N_O, K_{O,l}, N_O - K_{O,l} + 1)$ МДР-коды, каждый из которых получается выкалыванием проверок из $C_q(q - 1, K_{O,l}, q - K_{O,l})$ -кодов Рида – Соломона. Для декодирования внешних кодов необходимо использовать алгоритмы декодирования, исправляющие ошибки и стирания, подобные тем, которые описаны в [17, 18].

Для расчета параметров кодовой конструкции в настоящей работе предлагается использовать оптимизационные процедуры, подобные описанным в [16]. Отличие состоит в том, что в работе [16] рассматривался сценарий, при котором в качестве внутренних использовались сравнительно длинные двоичные коды (в частности, коды БЧХ) и традиционное алгебраическое декодирование с «жестким» входом, т. е. фактически модель двоичного симметричного канала, что давало возможность аналитически оценить вероятности ошибочного декодирования и отказа от декодирования. В нашем случае, так как для декодирования внутренних кодов используется алгоритм декодирования с «мягким» входом, такая аналитическая оценка не представляется возможной, поэтому оценки вероятностей отказа и ошибочного декодирования внутренних кодов ОКК (кодов-столбцов в частотной области) были получены с помощью имитационного моделирования. Следует также отметить, что выбор оптимальных значений параметра α в такой конструкции также сопряжен с минимизацией вероятностей ошибки/отказа (в частности, в рассматриваемом в данной работе случае минимизации вероятности отказа от декодирования внутреннего кода 0-го слоя), и получаемые в результате такой оптимизации значения α существенно больше, чем значения α , полученные в результате оптимизации в [11], так как там рассматривалась одночастотная система, в которой в каждом кадре передавался только один символ одного кодового слова, и задача состояла в том, чтобы выбрать параметр α таким образом, чтобы максимизировать пропускную способность. При этом, разумеется, необходимое условие состояло в гарантии того, что единственный ненулевой элемент, который соответствовал символу, переданному рассматриваемым пользователем, был с высокой вероятностью «покрыт» вектором веса α на выходе канала. В рассматриваемом случае в каждом кадре каждым пользователем передаются символы сразу нескольких кодовых слов внутреннего кода во временной области, таким

образом, в каждом кадре передается несколько ненулевых элементов, и задача состоит в том, чтобы выбрать вес вектора на выходе канала α так, чтобы вектор веса α с высокой вероятностью покрывал все ненулевые элементы, соответствующие переданным рассматриваемым пользователем сигналам, чем и объясняется необходимость использовать существенно большие, чем в [11], значения α .

Расчет вероятностей для внешнего кода производился аналитически, при этом, как и в [16], предполагалось, что отказ от декодирования или ошибочное декодирование происходят, если число стираний и ошибок превышает гарантированную корректирующую способность кода. Так как отказы при декодировании внутренних кодов приводят к стираниям соответствующих символов, а ошибочное декодирование – к появлению ошибок, распределение ошибок, стираний и безошибочных символов в кодовом слове описывается полиномиальным (мультиномиальным) или, точнее, триномиальным распределением, и вероятность того, что при декодировании внешнего кода l -го слоя произойдет ошибка или отказ, определяется выражением

$$\begin{aligned} FER_l(N_O, d_{O,l}, p_{e,l}(n, N_r, U, q), p_{x,l}(n, N_r, U, q)) = \\ = 1 - \left[\frac{d_{O,l}-1}{2} \right] d_{O,l}^{-2\varepsilon-1} \sum_{\varepsilon=0} \sum_{\xi=0} \times \\ \times \left(\frac{N_O!}{\varepsilon! \xi! (N_O - \varepsilon - \xi)!} \cdot p_{e,l}^\varepsilon(n, N_r, U, q) \times \right. \\ \left. \times p_{x,l}^\xi(n, N_r, U, q) \times \right) \\ \times (1 - p_{e,l}(n, N_r, U, q) - p_{x,l}(n, N_r, U, q))^{N - \varepsilon - \xi}, \end{aligned}$$

где $p_{e,l}(n, N_r, U, q)$ и $p_{x,l}(n, N_r, U, q)$ – вероятности ошибочного декодирования и отказа от декодирования l -го слоя обобщенного каскадного кода соответственно, зависящие от длины внутреннего кода n , длины кода в частотной области (высоты столбца матрицы обобщенного каскадного кода, длины внутреннего кода обобщенного каскадного кода) N_r , числа «мешающих» пользователей U и мощности алфавита q .

Кроме того, для каждой сигнально-кодовой конструкции определялась эффективная скорость и длина кодовой комбинации во временной области. Так как для передачи каждого столбца кодового слова ОКК требуется передать n символов, общая длина кодовой комбинации во временной области

$$\begin{aligned} N_T = n \cdot N_O (p_{e,0}(n, N_r, U, q), \dots, p_{e,M-1}(n, N_r, U, q), \\ p_{x,0}(n, N_r, U, q), \dots, p_{x,M-1}(n, N_r, U, q), n). \end{aligned}$$

Эта величина также определяет количество OFDM-символов, которые соответствуют слову ОКК. По аналогии с [11], скорость передачи определялась в битах на однократное использование канала (сокращенно б/ОИК), но в данном случае эта скорость определяется при условии, что вероятность ошибочного декодирования/отказа не превышает порогового значения. Эта скорость равна

$$R_e(p_{e,0}(n, N_r, U, q), \dots, p_{e,M-1}(n, N_r, U, q), p_{x,0}(n, N_r, U, q), \dots, p_{x,M-1}(n, N_r, U, q), n) = \frac{\log_2 q \sum_{l=0}^{M-1} K_{O,l}(p_{e,l}(n, N_r, U, q), p_{x,l}(n, N_r, U, q), n)}{n \cdot N_O \left(p_{e,0}(n, N_r, U, q), \dots, p_{e,M-1}(n, N_r, U, q), p_{x,0}(n, N_r, U, q), \dots, p_{x,M-1}(n, N_r, U, q), n \right)} \quad (3)$$

Рассмотрим два вида оптимизационных процедур. Введем следующие обозначения: вектор на выходе декодера на l -м шаге декодирования, соответствующий вектору-столбцу слова ОКК $\tilde{\mathbf{d}}_l$, слово внутреннего кода l -го слоя, соответствующее тому же столбцу $\tilde{\mathbf{x}}_l$, $\chi_l = 1$ — отказ от декодирования на l -м шаге (а наличие решения, напротив, $\chi_l = 0$).

А. Минимизация общей длины кодовой комбинации при заданной эффективной скорости R_e^* и выполнении условия

$$FER_l(N_O, d_{O,l}, p_{e,l}, p_{x,l}) \leq FER^*, \quad \forall l = 0 \dots M-1. \quad (4)$$

А.1. Для каждого значения n и N_r при помощи имитационного моделирования определяются вероятности ошибки и отказа для каждого из N_r слоев ОКК для различных значений α :

$$\left(p(\tilde{\mathbf{d}}_l \neq \tilde{\mathbf{x}}_l \mid \alpha, \chi_l = 0, \tilde{\mathbf{d}}_{l-1} = \tilde{\mathbf{x}}_{l-1}, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0, \chi_{l-1} = 0, \dots, \chi_0 = 0) \right),$$

$$p(\chi_l = 1 \mid \alpha, \tilde{\mathbf{d}}_{l-1} = \tilde{\mathbf{x}}_{l-1}, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0, \chi_{l-1} = 0, \dots, \chi_0 = 0).$$

А.2. Выбирается оптимальное значение параметра α

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} p(\tilde{\mathbf{d}}_0 \neq \tilde{\mathbf{x}}_0 \mid \alpha, \chi_0 = 0, \tilde{\mathbf{d}}_{-1} = \mathbf{0}),$$

т. е. выбирается значение α , минимизирующее вероятность ошибочного декодирования для 0-го слоя и соответствующие ему значения вероятностей ошибки и отказа для всех слоев.

А.3. Перебираются значения N_O (начиная с $N_O = q - 1$). Для каждого значения N_O и для каждого (пусть для определенности l -го) слоя перебираются значения $d_{O,l}$ (в диапазоне от трех до N_O),

вычисляется вероятность ошибки/отказа внешнего кода, проверяется условие (4) и рассчитывается скорость передачи по формуле (3). В результате для каждого l выбирается минимальное значение $d_{O,l}$, при котором выполняется условие ($R_e \geq R_e^*$). Процедура повторяется до тех пор, пока не найдено минимальное значение N_O (при заданных n и N_r), для которого выполняется (4).

А.4. Из различных пар значений n и N_r выбирается та, которой соответствует минимальное значение общей длины кодовой комбинации N_T .

Б. Максимизация эффективной скорости R_e при выполнении условия (4).

Б.1. Для каждого значения n и N_r при помощи имитационного моделирования определяются вероятности ошибки и отказа для каждого из N_r слоев ОКК для различных значений α :

$$p(\tilde{\mathbf{d}}_l \neq \tilde{\mathbf{x}}_l \mid \alpha, \chi_l = 0, \tilde{\mathbf{d}}_{l-1} = \tilde{\mathbf{x}}_{l-1}, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0, \chi_{l-1} = 0, \dots, \chi_0 = 0),$$

$$p(\chi_l = 1 \mid \alpha, \tilde{\mathbf{d}}_{l-1} = \tilde{\mathbf{x}}_{l-1}, \dots, \tilde{\mathbf{d}}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0, \chi_{l-1} = 0, \dots, \chi_0 = 0).$$

Б.2. Выбирается оптимальное значение параметра α

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} p(\chi_0 = 0 \mid \alpha, \tilde{\mathbf{d}}_{-1} = \mathbf{0}),$$

т. е. выбирается значение α , минимизирующее вероятность отказа от декодирования для 0-го слоя, и соответствующие ему значения вероятностей ошибки и отказа для всех слоев.

Б.3. Для всех возможных значений и каждого слоя вычисляются минимальные значения, для которых выполняется (4) и эффективная скорость передачи максимальна.

Б.4. Выбирается пара n и N_r , которой соответствует максимальная скорость R_e^* .

Исследуемый сценарий, результаты численных экспериментов и примеры оптимизированных конструкций

Рассмотрим следующий сценарий: будем предполагать, что, помимо рассматриваемого пользователя, передачу по каналу вверх одновременно ведут $U = 500$ пользователей, причем все пользователи используют одну и ту же сигнальную конструкцию, подразумевающую передачу N_r кодовых слов внутреннего кода во временной области и, соответственно, N_r сигналов каждым из пользователей. Таким образом, в каждый момент времени, помимо N_r сигналов от рассматриваемого пользователя, по каналу передаются UN_r «мешающих» сигналов. При этом для передачи

каждого из этих сигналов пользователи могут воспользоваться одной из $\tilde{Q} = [0,8 \cdot Q]$ поднесущих, так как поднесущие на краях полосы отводятся под защитные полосы (далее в этом разделе всегда будем полагать, что $Q = 4096$ и, следовательно, $\tilde{Q} = 3276$). Как и в [11], будем считать, что потери мощности сигналов, переданных каждым из пользователей, описываются лог-нормальной моделью [19], а соотношение мощностей – «пессимистической» моделью [11]. В рамках этой модели исследуется сценарий, в котором рассматриваемый пользователь находится на расстоянии d^* от приемника, а расстояние от каждого из остальных («мешающих») пользователей выбирается случайно и при этом выполняется $d^* \geq d_i \forall i \in [1 \dots K]$, т. е. расстояние от передатчика каждого из «мешающих» пользователей до приемника не больше, чем расстояние от рассматриваемого пользователя до приемника. В этом случае отношение мощности $P_{t,i}$ сигнала, переданного i -м «мешающим» пользователем, и мощности $P_{r,i}$ этого же сигнала на приемном конце описывается выражением [19]

$$L(d_i) = 10 \log \left(\frac{P_{t,i}}{P_{r,i}} \right) = \bar{L}(d_i) + X_\sigma = \\ = L_{fs}(d_0) + 10\gamma_0 \log \left(\frac{d_i}{d_0} \right) + X_\sigma,$$

где d_i – расстояние между передатчиком i -го «мешающего» пользователя и приемником; X_σ – гауссова случайная величина с математическим ожиданием 0 и среднеквадратическим отклонением σ ; L_{fs} – показатель потерь при распространении в свободном пространстве, задаваемый формулой Фрииса; d_0 – эталонное расстояние; γ_0 – коэффициент ослабления при распространении. Отношение мощности P_t^* сигнала, переданного рассматриваемым пользователем, к мощности P_r^* этого сигнала на приемном конце:

$$L(d^*) = 10 \log \left(\frac{P_t^*}{P_r^*} \right) = \bar{L}(d^*) + X_\sigma = \\ = L_{fs}(d_0) + 10\gamma_0 \log \left(\frac{d^*}{d_0} \right) + X_\sigma,$$

где d^* – расстояние между передатчиком рассматриваемого пользователя и приемником. Таким образом, логарифм отношения мощности сигнала от рассматриваемого пользователя на приемном конце к мощности сигнала от каждого из «мешающих» пользователей на приемном конце также является гауссовой случайной величиной, зависящей от случайной величины $\mu_i = \log_{10} \frac{d^*}{d_i}$.

Как и в [11], будем считать, что величины μ_i выбираются случайно и равновероятно из диапазона значений от 0 до A_m с шагом ΔA_m . Ниже во всех численных экспериментах использовались параметры $\gamma_0 = 3,5$, $\sigma = 8$ дБ, $A_m = 2$, $\Delta A_m = 0,01$. То, что $\mu_i \geq 0$, означает, в частности, что средняя мощность сигнала от рассматриваемого пользователя не больше, чем средняя мощность сигнала от любого из «мешающих» пользователей.

Выше сказано, что фазы всех сигналов моделировались как случайные величины, равномерно распределенные на окружности от 0 до 2π . Фоновый аддитивный шум моделировался как двумерный случайный гауссов процесс с нулевым математическим ожиданием, описываемый отношением сигнал/шум, которое задавалось выражением

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{E_s}{\log_2(q) \cdot N_r \cdot E_N} \right),$$

где E_s – энергия сигнала, переданного пользователем; E_N – энергия шума (во всей полосе, предоставленной активным пользователям). Во всех численных экспериментах, которые будут обсуждаться здесь, использовалось значение отношения сигнал/шум $SNR = -20$ дБ.

Ниже представлены результаты численных экспериментов для двух описанных оптимизационных процедур. Для удобства анализа и сравнения оптимальные значения для различных величин сведены в табл. 1 и 2, показаны только значения, близкие к выбранному в результате оптимальному набору параметров.

■ **Таблица 1.** Результаты оптимизации параметров кодовых конструкций для $FER^* = 10^{-4}$ и $R_e^* = 2$ б/ОИК (минимальная длина кодовой комбинации, $L_M = 64$)

■ **Table 1.** Optimized code construction parameters for $FER^* = 10^{-4}$ and $R_e^* = 2$ (minimum overall code length, $L_M = 64$)

N_r	n	α^*	Параметры внешних кодов	N_T	R_e , б/ОИК
3	6	117	(20,12)	120	2
			(20,18)		
3	7	120	(28,23)	196	2
			(28,26)		
4	8	143	(13,4)	104	2
			(13,11)		
			(13,11)		
4	9	143	(14,8)	126	2,0317
			(14,12)		
			(14,12)		
4	10	142	(16,12)	160	2
			(16,14)		
			(16,14)		

■ **Таблица 2.** Результаты оптимизации параметров кодовых конструкций для $FER^* = 10^{-6}$ (максимальная эффективная скорость, $L_M = 64$)

■ **Table 2.** Optimized code construction parameters for $FER^* = 10^{-6}$ (maximum effective rate, $L_M = 64$)

N_r	n	α^*	Параметры внешних кодов	N_T	R_e , б/ОИК
4	9	143	(249,215)	2241	2,4775
			(249,239)		
			(249,240)		
4	8	141	(255,159)	2040	2,5412
			(255,244)		
			(255,245)		
5	12	163	(253,218)	3036	2,4242
			(253,234)		
			(253,234)		
			(253,234)		
5	11	165	(248,145)	2728	2,5044
			(248,233)		
			(248,238)		
			(248,238)		

Как видно из табл. 1, минимальное значение общей длины кодовой комбинации $N_T = 104$ достигается при $N_r = 4$, $n = 8$ и $N_O = 13$. Несмотря на то, что минимизация задержки не была заявлена в качестве результата процедуры, полученные параметры позволяют решить и эту задачу. Так как параметры кодов 1-го и 2-го уровня одинаковы, можно сократить число уровней до двух, используя в качестве внешнего кода 1-го уровня два независимых кодовых слова одного и того же МДР-кода (13,11,3) над $GF(2^8)$, полученного выкалыванием проверок из (255,11,245)-кода Рида – Соломона (частичная матрица, соответствующая 1-му слою, в этом случае представляет собой слово кода-произведения). Такой выбор позволяет сократить число шагов декодирования и использовать только два декодера для внешних кодов вместо трех, причем кодовые слова, использованные в качестве внешних кодов 1-го слоя, могут декодироваться независимо и параллельно.

По приведенным в табл. 2 данным видно, что в рассматриваемом случае оптимальной оказалась конструкция с $N_r = 4$, $n = 8$ и оптимальным значением $\alpha^* = 141$, однако для максимизации скорости потребовалась существенно большая длина внешнего кода. В качестве внешних используются коды Рида – Соломона (255,159,97), (255,244,12) и (255,245,11) над $GF(2^8)$. Как и в прошлом примере, параметры кодов очень близки (что объясняется тем, что вероятности отказа для

1-го и 2-го слоев для этого случая отличаются незначительно, а вероятности ошибок очень малы), и можно уменьшить аппаратную сложность и задержку, сократив число слоев до двух и используя два слова одного и того же кода в качестве внешнего кода для 1-го слоя, что несколько уменьшит эффективную скорость (до 2,5373 б/ОИК, т. е. примерно на 1,54 %). Отметим также, что в работе [10] использование внешнего кода с общей проверкой на четность в частотной области и декодирования с «мягким» входом позволяло получать вероятности отказа порядка 10^{-3} и более на блок при скорости 2 б/ОИК. Дополнив кодирование в частотной области внешним кодом и используя свойства обобщенных каскадных кодов и алгоритм декодирования обобщенных каскадных кодов с мягким декодированием, нам удалось построить примеры конструкций со скоростями до 2,5 б/ОИК и выше и вероятностями отказа/ошибки в диапазоне от 10^{-4} до 10^{-6} на блок. Разумеется, необходимо отметить, что этот результат достигнут ценой увеличения как аппаратной сложности (за счет использования дополнительных кодеров внутренних и внешних кодов и декодеров внешних кодов), так и задержки (в силу необходимости в последовательном декодировании слоев и дополнительных процедур декодирования внешних кодов и увеличения длины кодовой комбинации).

Заключение

В работе рассмотрена задача выбора внешнего кода в системе связи, использующей частотно-позиционное кодирование в динамически выделяемом частотном поддиапазоне, прием на основе порядковых статистик и подкоды МДР-кодов. Для решения поставленной задачи применялся аппарат ОКК. В рамках этого подхода предложена кодовая конструкция, в которой в качестве внутренних кодов были выбраны короткие МДР-коды в частотной области, а в качестве внешних – МДР-коды во временной области. Для этой конструкции разработана модификация алгоритма декодирования с «мягким» входом, адаптированная к оценкам достоверности, вычисляемым в приемнике описанного выше типа, и модифицированный алгоритм декодирования ОКК с таким декодированием внутренних кодов. Предложенный подход и полуаналитический метод расчета позволяют эффективно рассчитывать и сравнивать характеристики кодовых конструкций и выбирать оптимальные значения параметров с учетом конкретных сценариев и требований к проектируемым системам. Все построенные с помощью предлагаемого подхода конструкции допускают эффективную

аппаратную реализацию: кодеры и декодеры внутренних кодов имеют небольшую сложность и могут работать параллельно, внешние коды принадлежат к известному классу кодов, для которого существуют многочисленные примеры эффективной аппаратной реализации.

Литература

1. **Шашин А. Э., Белогаев А. А., Красилов А. Н., Хоров Е. М.** Алгоритм выбора параметров передачи для аperiodического URLLC-трафика в восходящем канале. *Информационные процессы*, 2022, т. 22, № 2, с. 29–41. doi:10.53921/18195822_2022_22_2_29
2. **Бакулин М. Г., Бен Режеб Т. Б. К., Крейнделлин В. Б., Панкратов Д. Ю., Смирнов А. Э.** Технология NOMA с кодовым разделением в 3GPP: 5G или 6G? *Т-Сотт: Телекоммуникации и транспорт*, 2022, т. 16, № 1, с. 4–14. doi:10.36724/2072-8735-2022-16-1-4-14, EDN: ZBEDVU
3. **Liu X., Wang X., Zhao X., Du F., Zhang Y., Geng S.** Coexistence of energy-minimizing URLLC and eMBB in power IoT via NOMA-based collaborative MEC heterogeneous network. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2024, vol. 73, no. 7, pp. 10316–10332. doi:10.1109/TVT.2024.3376524
4. **Gao P., Liu Z., Xiao P., Foh C. H., Zhang J.** Low-complexity channel estimation and multi-user detection for uplink grant-free NOMA systems. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2022, vol. 11, no. 2, pp. 263–267. doi:10.1109/LWC.2021.3125453
5. **Zhang X., Zhou Z., Ding Z., Ma Z., Hao L.** Joint sparse channel estimation and multiuser detection using spike and slab prior-based gibbs sampling for uplink grant-free NOMA. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Dec. 2024, vol. 73, no. 12, pp. 19338–19349. doi:10.1109/TVT.2024.3451450
6. **Крещук А. А., Потапов В. Г.** Некоторые статистические демодуляторы для частотно-позиционного кодирования с быстрой перестройкой частот. *Автоматика и телемеханика*, 2013, № 10, с. 109–118. EDN: PMZXXS
7. **Kreshchuk A., Potapov V.** Better goodness-of-fit statistics for coded FSK decoding. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, March 2017, vol. 57, pp. 139–145. <https://doi.org/10.1016/j.endm.2017.02.024>
8. **Kreshchuk A.** Soft-decision statistical decoder for coded DHA FH OFDMA. *2018 Engineering and Telecommunication (EnT-MIPT)*, Moscow, 15–16 Nov 2018, pp. 8–11. doi:10.1109/EnT-MIPT.2018.00009
9. **Osipov D.** A multi-code multi-tone DHA FH OFDMA system with nonparametric reception. *Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT)*, Moscow, 11–13 March, 2020, pp. 1–5. doi:10.1109/MWENT47943.2020.9067339
10. **Osipov D.** Concatenated coset coding in a multi-tone DHA FH OFDMA system with order statistics-based reception. *IEEE International Conference on Communication, Networks and Satellite (COMNETSAT)*, Purwokerto, Indonesia, 17–18 July 2021, pp. 123–127.
11. **Osipov D. S.** Signal detection amid noise using order statistics: detector sensitivity analysis and parameter choice. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 1, с. 61–70. doi:10.31799/1684-8853-2023-1-61-70, EDN: PCFDIS
12. **Molisch A. F.** *Wireless Communications: From Fundamentals to Beyond 5G*. (3 ed.) Chichester, John Wiley & Sons, Inc., 2022. 1008 p.
13. **Блох Э. Л., Зяблов В. В.** *Обобщенные каскадные коды*. М., Связь, 1976. 240 с.
14. **Spinner J., Freudenberger J.** Soft input decoding of generalized concatenated codes using a stack decoding algorithm. *2nd BW-CAR Symposium on Information and Communication Systems (SInCom)*, 2015, pp. 1–5. https://www.researchgate.net/publication/307964232_Soft_Input_Decoding_of_Generalized_Concatenated_Codes_Using_a_Stack_Decoding_Algorithm (дата обращения: 25.12.2025).
15. **Freudenberger J., Rajab M., Shavgulidze S.** A soft-input bit-flipping decoder for generalized concatenated codes. *2018 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Vail, CO, USA, 2018, pp. 1301–1305.
16. **Spinner J.** *Channel Coding for Flash Memories*. Doctoral thesis. Doctor of Eng. Sc., Konstanz, Univ. Konstanz, 2019. 124 p.
17. **Wu Y.** New scalable decoder architectures for Reed – Solomon codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2015, vol. 63, no. 8, pp. 2741–2761. doi:10.1109/TCOMM.2015.2445759
18. **Tang N., Chen C., Han Y. S.** Fast error and erasure decoding algorithm for Reed – Solomon codes. *IEEE Communications Letters*, April 2024, vol. 28, no. 4, pp. 759–762. doi:10.1109/LCOMM.2024.3358055
19. **Pätzold M.** *Mobile Radio Channels*. 2nd ed. Chichester, John Wiley Sons, 2011. 583 p.

Финансовая поддержка

Работа выполнена в Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН в рамках работ по госзаданию № FFNU-2025-0028.

UDC 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2026-3-49-62

EDN: ZJAEFG

Generalized concatenated code-based constructions for communication systems with order-statistics-based reception

D. S. Osipov^{a,b}, Dr. Sc., Tech., Senior Researcher, orcid.org/0000-0003-0400-7181, d_osipov@iitp.ru^aKharkevich Institute for Information Transmission Problems, 19, bld. 1, Bolshoy Karetny Per., 127051, Moscow, Russian Federation^bHSE University, 34, Tallinskaya St., 123458, Moscow, Russian Federation

Introduction: In many communication systems under construction and those to be created power control and channel estimation techniques developed for the previous generation communication systems fail to provide desired precision. One way to solve this problem is to use order-statistics-based reception techniques that do not need channel estimation or power control. To ensure the desired probability characteristics coded modulation schemes using order-statistics-based reception techniques should be complemented with outer codes.

Purpose: To propose a practical outer code providing both desired probability characteristics and a relatively high transmission rate for the communication system under consideration. **Results:** We develop a general approach to outer code design based on the theory of generalized concatenated codes. Within the scope of this approach codes in frequency domain treated as inner codes are complemented with outer codes in time domain that can be optimized according to the requirements corresponding to the specific requirements of the communication system to be designed. We devise soft-input decoding algorithms for inner code decoding and, thus, for the generalized concatenated codes decoding. We give examples of practical outer codes developed with the proposed approach combining simulation-based estimation of inner code error and decoding failure probabilities with analytical evaluation for the outer code choice. **Practical relevance:** Herein it is demonstrated that the proposed approach results in the elaboration of outer codes suitable to be optimized in several ways and to be applicable for hardware implementation in real-life applications.

Keywords – machine-to-machine communication, frequency hopping, an order-statistics-based reception method, generalized concatenated codes, inner codes, soft input decoding.

For citation: Osipov D. S. Generalized concatenated code-based constructions for communication systems with order-statistics-based reception. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2026, no. 3, pp. 49–62 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2026-3-49-62, EDN: ZJAEFG

Financial support

The research was carried out in IITP RAS (Kharkevich Institute) within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation No. FFNU-2025-0028.

References

- Shashin A. E., Belogaev A. A., Krasilov A. N., Khorev E. M. Algorithm for transmission parameters selection for sporadic URLLC traffic in uplink. *Information Processes*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 29–41 (In Russian). doi:10.53921/18195822_2022_22_2_29
- Bakulin M. G., Ben Rejeb T. B. C., Kreyndelin V. B., Pankratov D. Y., Smirnov A. E. Code domain NOMA in 3GPP specifications: 5G or 6G? *T-Comm*, 2022, vol. 16, no. 1, pp. 4–14 (In Russian). doi:10.36724/2072-8735-2022-16-1-4-14, EDN: ZBEDVU
- Liu X., Wang X., Zhao X., Du F., Zhang Y., Geng S. Coexistence of energy-minimizing URLLC and eMBB in power IoT via NOMA-based collaborative MEC heterogeneous network. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2024, vol. 73, no. 7, pp. 10316–10332. doi:10.1109/TVT.2024.3376524
- Gao P., Liu Z., Xiao P., Foh C. H., Zhang J. Low-complexity channel estimation and multi-user detection for uplink grant-free NOMA systems. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2022, vol. 11, no. 2, pp. 263–267. doi:10.1109/LWC.2021.3125453
- Zhang X., Zhou Z., Ding Z., Ma Z., Hao L. Joint sparse channel estimation and multiuser detection using spike and slab prior-based gibbs sampling for uplink grant-free NOMA. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Dec. 2024, vol. 73, no. 12, pp. 19338–19349. doi:10.1109/TVT.2024.345145
- Kreshchuk A. A., Potapov V. G. Statistical demodulators for frequency shift keying with fast frequency hopping. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 10, pp. 1688–1695. doi:10.1134/S0005117913100093, EDN: SKWQWV
- Kreshchuk A., Potapov V. Better goodness-of-fit statistics for coded FSK decoding. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, March 2017, vol. 57, pp. 139–145. <https://doi.org/10.1016/j.endm.2017.02.024>
- Kreshchuk A. Soft-decision statistical decoder for coded DHA FH OFDMA. *2018 Engineering and Telecommunication (EnT-MIPT)*, 2018, pp. 8–11. doi:10.1109/EnT-MIPT.2018.00009
- Osipov D. A multi-code multi-tone DHA FH OFDMA system with nonparametric reception. *Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT)*, Moscow, pp. 1–5. doi:10.1109/MWENT47943.2020.9067339
- Osipov D. Concatenated coset coding in a multi-tone DHA FH OFDMA system with order statistics-based reception. *IEEE International Conference on Communication, Networks and Satellite (COMNETSAT)*, Purwokerto, 2021, pp. 123–127.
- Osipov D. S. Signal detection amid noise using order statistics: detector sensitivity analysis and parameter choice. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 1, pp. 61–70. doi:10.31799/1684-8853-2023-1-61-70, EDN: PCFDIS
- Molisch A. F. *Wireless Communications: From Fundamentals to Beyond 5G*. (3 ed.) Chichester, John Wiley & Sons, Inc., 2022. 1008 p.
- Blokh E. L., Zyablov V. V. *Obobshchennye kaskadnye kody* [Generalized concatenated codes]. Moscow, Svyaz Publ., 1976, 240 p. (In Russian).
- Spinner J., Freudenberger J. Soft input decoding of generalized concatenated codes using a stack decoding algorithm. *2nd BW-CAR Symposium on Information and Communication Systems (SInCom)*, 2015, pp. 1–5. Available at: https://www.researchgate.net/publication/307964232_Soft_Input_Decoding_of_Generalized_Concatenated_Codes_Using_a_Stack_Decoding_Algorithm (accessed 25 December 2025).
- Freudenberger J., Rajab M., Shavgulidze S. A soft-input bit-flipping decoder for generalized concatenated codes. *2018 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Vail, CO, USA, 2018, pp. 1301–1305.
- Spinner J. *Channel Coding for Flash Memories*. Doct. thes. Doct. of Eng. Sc., Konstanz, Univ. Konstanz, 2019. 124 p.
- Wu Y. New scalable decoder architectures for Reed–Solomon codes. *IEEE Transactions on Communications*, 2015, vol. 63, no. 8, pp. 2741–2761. doi:10.1109/TCOMM.2015.2445759
- Tang N., Chen C., Han Y. S. Fast error and erasure decoding algorithm for Reed–Solomon codes. *IEEE Communications Letters*, April 2024, vol. 28, no. 4, pp. 759–762. doi:10.1109/LCOMM.2024.3358055
- Pätzold M. *Mobile Radio Channels*. 2nd ed. Chichester, John Wiley Sons, 2011. 583 p.