



Асимптотический анализ системы массового обслуживания с повторными вызовами и динамической интенсивностью обслуживания

С. В. Пауль^а, доктор физ.-мат. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-3681-0676, paulsv82@mail.ru
Е. А. Фёдорова^а, канд физ.-мат. наук, доцент, orcid.org/0000-0001-8933-5322, ekat_fedorova@mail.ru
^аНациональный исследовательский Томский государственный университет, Ленина пр., 36, Томск, 634050, РФ

Введение: одной из особенностей сетей связи нового поколения является ограниченность вычислительных ресурсов, что нередко приводит к конкуренции в сети при росте запросов, одновременно обрабатываемых на узле. Учет этого эффекта при расчете характеристик математической модели сети связи может повысить производительность и скорость обработки запросов в реальной системе. **Цель:** исследовать математическую модель сети случайного множественного доступа в виде системы массового обслуживания с повторными вызовами, учитывающей зависимость интенсивности обслуживания от числа запросов в системе; найти стационарные распределения вероятностей состояний сервера и числа заблокированных заявок. **Методы:** использован метод асимптотического анализа в предельном условии неограниченного возрастания среднего времени задержек заблокированных заявок. **Результаты:** построена математическая модель сети случайного множественного доступа в виде системы с повторными вызовами с учетом коррелированного характера поступающих требований и интенсивностью обслуживания заявок, зависящей от их общего числа в системе. Получены формулы для расчета предельных среднего и дисперсии числа заблокированных заявок в асимптотическом условии неограниченного возрастания среднего времени задержки, на основе чего построена аппроксимация распределения вероятностей числа заблокированных заявок. Показано, что асимптотическое распределение числа сообщений, ожидающих повторного обращения к серверу, является гауссовским. В результате численного сравнения асимптотического и точного (в частном случае) распределений вероятностей числа заблокированных заявок показано, что полученная аппроксимация имеет достаточно низкую погрешность (менее 3 %) при малых параметрах интенсивности задержки между повторными попытками. **Практическая значимость:** представленный в работе численный пример демонстрирует возможность расчетов основных показателей качества сетей передачи данных на основе предложенной математической модели, которая учитывает важный технический фактор зависимости скорости обслуживания запросов от их общего количества в сети. **Обсуждение:** результаты исследования могут способствовать более эффективному планированию нагрузки на телекоммуникационные сети.

Ключевые слова — математическое моделирование, теория массового обслуживания, повторные вызовы, марковский модулированный пуассоновский поток, асимптотический анализ.

Для цитирования: Пауль С. В., Фёдорова Е. А. Асимптотический анализ системы массового обслуживания с повторными вызовами и динамической интенсивностью обслуживания. *Информационно-управляющие системы*, 2026, № 2, с. 61–71. doi:10.31799/1684-8853-2026-2-61-71, EDN: UKKWUF

For citation: Paul S. V., Fedorova E. A. Asymptotic analysis of a queueing system with repeated calls and dynamic service rate. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2026, no. 2, pp. 61–71 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2026-2-61-71, EDN: UKKWUF

Введение

Развитие интернета вещей (IoT) является одним из ключевых факторов быстрого роста беспроводного доступа и соединений. Ожидается, что в обозримом будущем сети будут эффективно управлять беспроводной средой, способной поддерживать разнообразные устройства, получающие доступ к сети. Подключение в сетях все больше будет определяться объектами, или «вещами», оснащенными сенсорами и преимущественно осуществляющими связь машина-машина. Под модальностью понимается физически регистрируемый элемент коммуникации (человеко-машинной и/или межличностной), включающий как собственно передаваемую информацию, так и информацию о самом источнике [1].

Существует множество различных многомодальных систем, применяемых в повседневной практике: видео-конференц-связь, интерактивные мультимедийные приложения, потоковое вещание, умные дома, транспортные навигационные системы и др. [2, 3]. Каждая из этих систем реализует свои функции с помощью определенных технических решений. При этом одним из ключевых требований является обеспечение приемлемого качества обслуживания, для чего система должна соответствовать установленным требованиям.

Исследования в работе [4] посвящены изучению эффективности развертывания когнитивных радиосетей для улучшения функционирования сложных приложений, включая обеспечение умных городов, где предполагается внедрение

большого количества беспроводных сенсорных узлов с когнитивными радиовозможностями для поддержки взаимосвязанных сервисов. Такие технологии требуют эффективного распределения ограниченных сетевых ресурсов (полосы пропускания) для обслуживания множества устройств и данных, одновременно обеспечивая необходимые показатели производительности.

Важнейшим показателем качества в сетях является временная задержка сигналов, на которую обращается особое внимание при проектировании и эксплуатации таких систем. Однако скорость развития телекоммуникационных технологий не успевает за ростом числа новых устройств IoT и объемов информации. Это приводит к снижению скорости передачи, пропускной способности сетей в последнее время, поэтому актуальной научно-технической проблемой является оптимизация, надежность и эффективное планирование современных телекоммуникационных сетей связи [5, 6].

Одно из научных направлений теории вероятностей — теория массового обслуживания — часто используется для решения таких задач [7–9]. В данной теории для наилучшего описания телекоммуникационных сетей широко применяются модели массового обслуживания с повторными вызовами (retry queueing systems). Отличительной особенностью данных моделей является осуществление повторных попыток получить обслуживание спустя случайное время после отказа, что характерно, например, для телефонных вызовов или протоколов множественного доступа к сетевым ресурсам. В общем случае в таких системах отсутствует очередь (в классическом понимании), а необслуженные требования реализуют задержку из некоторого виртуального места, называемого орбитой. Модели с повторными вызовами подробно описаны в монографиях Дж. Арталежо (J. Artalejo) и Г. И. Фалина [10, 11] и широко применяются в различных практических задачах [9, 10].

Существует большое количество работ по системам с повторными вызовами, однако модели с динамическими параметрами и непуассоновскими входящими потоками изучены слабо. Например, в работах [12–14] исследованы модели с параметром входящего потока заявок, зависящим от состояния системы. При этом обычно рассматриваются модели с переключением между двумя возможными состояниями интенсивности поступления в зависимости от некоторого порогового значения числа клиентов в системе. С другой стороны, допустимо рассматривать и скорость обслуживания как параметр, зависящий от состояния. В работах по этой тематике также учитываются в основном пороговые политики изменения параметров, например в [15,

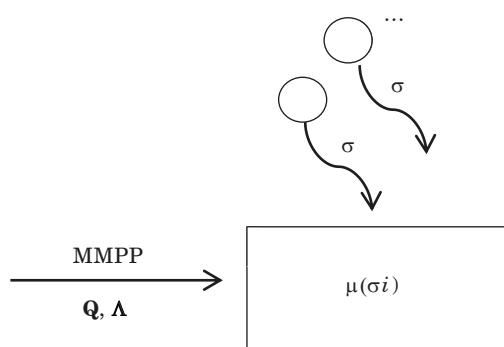
16]. В работах [17, 18] применяется аналогичная политика в моделях с учетом повторного обслуживания клиентов. Также в [18, 19] исследуется модель, в которой интенсивности поступления и обслуживания заданы дискретными функциями от числа повторных клиентов. Ближайшая по смыслу задача решена в [20], где авторы рассмотрели систему с повторными вызовами и зависящими от состояния интенсивностями обслуживания и поступления. Однако модель в [20] отличается от модели в данной работе: в ней реализована политика повторных попыток FCFS (First Come, First Served), т. е. доступ к серверу имеет только один клиент из орбиты. В нашем случае рассматривается система с повторными вызовами и множественным доступом, мотивация которой основана на практических задачах, описанных выше.

Кроме того, почти во всех перечисленных выше работах входящий поток заявок предполагается пуассоновским. Однако простейший поток не всегда адекватно описывает реальные потоки, особенно в телекоммуникационных системах. В работе А. Г. Ложковского [21] показано, что для такого трафика характерна неравномерность интенсивности поступления заявок. Для моделирования и описания потоков информации в мультисервисных сетях связи, сетях связи с протоколами случайного множественного доступа широко применяются непуассоновские модели, учитывающие коррелированный характер поступающих данных, например марковский модулированный пуассоновский поток (Markov Modulated Poisson Process, MMPP) [22].

В данной статье мы развиваем исследование [23] и применяем оригинальный метод асимптотического анализа моделей массового обслуживания с повторными вызовами, с входящим MMPP и динамической интенсивностью обслуживания.

Математическая модель

Для моделирования сети передачи данных предложим систему с повторными вызовами, одним обслуживающим сервером (каналом) и марковским модулированным пуассоновским входящим потоком поступающих заявок (рис. 1). MMPP является дважды стохастическим потоком событий и функционирует под управлением цепи Маркова с непрерывным временем $m(t)$ [22, 24], которая задана генератором $\mathbf{Q} = [q_{vm}]$ (матрицей инфинитезимальных характеристик переходов между состояниями), где $m(t) = 1, \dots, M$. Состояния входящего MMPP совпадают с состояниями управляющего процесса $m(t)$. Также задается матрица Λ условных интенсивностей



■ **Рис. 1.** Система массового обслуживания с повторными вызовами и динамической интенсивностью обслуживания

■ **Fig. 1.** Queuing system with retrials and dynamic service rate

ММРР с элементами $\lambda_m, m = 1, \dots, M$, которые отвечают за интенсивность наступления события в m -м состоянии.

Если в момент поступления заявки входящего потока сервер свободен, она начинает процесс обслуживания. В противном случае (если заявка, поступая в систему, обнаруживает, что сервер обслуживает другую заявку) поступившая заявка считается заблокированной, и, не покидая систему, она мгновенно уходит на так называемую орбиту, где осуществляет случайную задержку, длительность которой моделируется как экспоненциально распределенная случайная величина с параметром σ . Каждая из заявок на орбите по окончании своей задержки перестает считаться заблокированной и вновь, независимо друг от друга, пытается обратиться к серверу и получить обслуживание. Предполагается, что емкость орбиты неограниченна.

Особенностью исследуемой модели является то, что в ней учитывается динамическое изменение интенсивности обслуживания и зависимость от текущей суммарной интенсивности обращений с орбиты $\mu(\sigma i)$ (здесь i — число заблокированных заявок, т. е. их количество на орбите, $i = 0, 1, \dots$). Длительность обслуживания для фиксированного значения σi имеет экспоненциальный закон распределения. Будем полагать, что если заблокированных заявок в системе нет, т. е. число заявок на орбите равно нулю ($i = 0$), то длительность обслуживания единственной заявки в системе (которая находится на сервере) распределена по экспоненциальному закону с параметром $\mu = \mu(0)$.

Введем процессы, которые описывают функционирование предложенной модели: $i(t)$ — число заблокированных заявок на орбите системы в момент времени $t, i = 0, 1, \dots; k(t)$ — состояние сервера: 0 — сервер свободен, 1 — сервер занят.

Целью исследования является нахождение стационарных распределений вероятностей состояний сервера предложенной системы $P\{k(t) = k\} = P(k)$ и числа заявок на орбите $P\{i(t) = i\} = P(i)$. Процесс $i(t)$ марковским процессом не является, поэтому предлагаем аналогично [24] рассмотреть трехмерную цепь Маркова с непрерывным временем $\{i(t), k(t), m(t)\}$, где $m(t)$ — состояние ММРР ($m = 1, \dots, M$). Распределение вероятностей трехмерного марковского процесса $\{i(t), k(t), m(t)\}$ обозначим как $P(k, i, m, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, m(t) = m\}$, что характеризует вероятность того, что в момент времени t сервер находится в состоянии k , на орбите i заблокированных заявок и входящий ММРР находится в состоянии m . В результате исследования будут получены маргинальные распределения $P\{k(t) = k\} = P(k)$ и $P\{i(t) = i\} = P(i)$.

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей $P(k, i, m, t)$ состояний трехмерной цепи Маркова $\{i(t), k(t), m(t)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(0, i, m, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + i\sigma)P(0, i, m, t) + \\ &+ \mu(\sigma i)P(1, i, m, t) + \sum_{v=1}^M P(0, i, v, t)q_{vm}, \\ & \quad m = \overline{1, M}, i \geq 0; \\ \frac{\partial P(1, i, m, t)}{\partial t} &= -(\lambda_m + \mu(\sigma i))P(1, i, m, t) + \\ &+ \lambda_m P(1, i-1, m, t) + \\ &+ \lambda_m P(0, i, m, t) + (i+1)\sigma P(0, i+1, m, t) + \\ &+ \sum_{v=1}^M P(1, i, v, t)q_{vm}, m = \overline{1, M}, i \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Систему (1) перепишем в матричном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(0, i, t)}{\partial t} &= \mathbf{P}(0, i, t)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - i\sigma\mathbf{I}) + \\ &+ \mu(\sigma i)\mathbf{P}(1, i, t); \\ \frac{\partial \mathbf{P}(1, i, t)}{\partial t} &= \mathbf{P}(1, i, t)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - \mu(\sigma i)\mathbf{I}) + \\ &+ \mathbf{P}(0, i, t)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{P}(1, i-1, t)\mathbf{\Lambda} + \\ &+ (i+1)\sigma\mathbf{P}(0, i+1, t), \end{aligned} \quad (2)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица и векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k, i, t) &= \{P(k, i, 1, t), \\ &P(k, i, 2, t), \dots, P(k, i, M, t)\}, \\ \frac{\partial \mathbf{P}(k, i, t)}{\partial t} &= \left\{ \frac{\partial P(k, i, 1, t)}{\partial t}, \frac{\partial P(k, i, 2, t)}{\partial t}, \dots, \right. \\ &\left. \frac{\partial P(k, i, M, t)}{\partial t} \right\}. \end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (2) понадобится так называемое согласованное уравнение, которое получим путем суммирования всех компонент матричных уравнений этой системы. Умножим эти уравнения справа на единичный вектор-столбец \mathbf{e} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(0, i, t)}{\partial t} \mathbf{e} &= \\ &= -\mathbf{P}(0, i, t)(\mathbf{A} + i\sigma\mathbf{I})\mathbf{e} + \mu(\sigma i)\mathbf{P}(1, i, t)\mathbf{e}; \\ \frac{\partial \mathbf{P}(1, i, t)}{\partial t} \mathbf{e} &= -\mathbf{P}(1, i, t)(\mathbf{A} + \mu(\sigma i)\mathbf{I})\mathbf{e} + \mathbf{P}(0, i, t)\mathbf{A}\mathbf{e} + \\ &+ \mathbf{P}(1, i-1, t)\mathbf{A}\mathbf{e} + (i+1)\sigma\mathbf{P}(0, i+1, t)\mathbf{e}; \end{aligned}$$

просуммировав их, получим так называемое согласованное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}(i, t)}{\partial t} \mathbf{e} &= (\mathbf{P}(1, i-1, t) - \mathbf{P}(1, i, t))\mathbf{A}\mathbf{e} - \\ &- i\sigma\mathbf{P}(0, i, t)\mathbf{e} + (i+1)\sigma\mathbf{P}(0, i+1, t)\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (3)$$

Система (2), (3) в стационарном режиме примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(0, i)(\mathbf{Q} - \mathbf{A} - i\sigma\mathbf{I}) + \mu(\sigma i)\mathbf{P}(1, i) &= 0; \\ \mathbf{P}(1, i)(\mathbf{Q} - \mathbf{A} - \mu(\sigma i)\mathbf{I}) + \mathbf{P}(0, i)\mathbf{A} + \\ + \mathbf{P}(1, i-1)\mathbf{A} + (i+1)\sigma\mathbf{P}(0, i+1) &= 0; \\ (\mathbf{P}(1, i-1) - \mathbf{P}(1, i))\mathbf{A}\mathbf{e} - i\sigma\mathbf{P}(0, i)\mathbf{e} + \\ + (i+1)\sigma\mathbf{P}(0, i+1)\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Решением системы (4) является двумерное распределение вероятностей состояний сервера и числа заблокированных заявок на орбите. Однако его нахождение не представляется возможным классическими аналитическими методами, поэтому предлагается применить метод асимптотического анализа [23–25].

Идея метода заключается в нахождении решения в некотором предельном условии. В данной работе предполагается, что среднее время задержек заблокированных заявок на орбите неограниченно возрастает, что моделируется условием $\sigma \rightarrow 0$. В силу этого вводится малый положительный параметр, определяющий предельное условие, делаются замены и осуществляется переход к предельным функциям в основной системе (4).

Метод реализуется в два этапа в предположении, что предельные распределения вероятностей состояний сервера и числа заблокированных запросов в системе независимы. Если предельное распределение вероятностей состояний сервера удастся получить сразу на первом этапе реализации метода, то для построения предельного распределения вероятностей числа заявок на орбите необходимо реализовывать метод в несколько этапов, на каждом из которых находятся

предельные семиинварианты искомого распределения. Понижая порядок малости введенного параметра, реализуя предельное условие, на втором этапе, помимо формулы расчета второго семиинварианта распределения вероятностей числа заблокированных заявок системой, удастся выписать характеристическую функцию искомого распределения, которая, как будет показано далее, имеет гауссовский вид.

Асимптотический анализ

Метод асимптотического анализа реализуется в два этапа. На первом этапе находится маргинальное распределение вероятностей состояний сервера $k(t)$ в рассматриваемой системе с учетом зависимости интенсивности обслуживания заявок от числа заблокированных заявок на орбите и параметр κ_1 , который определяет асимптотическое среднее κ_1/σ процесса $i(t)$. На втором этапе применения метода асимптотического анализа выписываются формулы для расчета параметра κ_2 , который определяет асимптотическую дисперсию κ_2/σ процесса $i(t)$. В результате строится асимптотическое гауссовское распределение вероятностей числа заявок на орбите, на основе которого выполняется аппроксимация искомого распределения.

Асимптотика первого порядка

Обозначим $\sigma = \varepsilon$, где ε — бесконечно малая величина. Введем асимптотические замены:

$$\sigma i = x, \quad \mathbf{P}(k, i) = \mathbf{P}_1(k, x, \varepsilon).$$

Применяя разработанный метод, также введем предельную дифференцируемую функцию непрерывного аргумента $\tilde{\mu}(x)$, значения которой в точках σi на дискретном множестве значений $i = 1, 2, \dots$ совпадают с заданной в начальной постановке функцией изменения интенсивности обслуживания, т. е. $\mu(\sigma i) = \tilde{\mu}(x)$.

Запишем асимптотические уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(0, x, \varepsilon)(\mathbf{Q} - \mathbf{A} - x\mathbf{I}) + \tilde{\mu}(x)\mathbf{P}_1(1, x, \varepsilon) &= 0; \\ \mathbf{P}_1(1, x, \varepsilon)(\mathbf{Q} - \mathbf{A} - \tilde{\mu}(x)\mathbf{I}) + \mathbf{P}_1(0, x, \varepsilon)\mathbf{A} + \\ + \mathbf{P}_1(1, x - \varepsilon, \varepsilon)\mathbf{A} + (x + \varepsilon)\mathbf{P}_1(0, x + \varepsilon, \varepsilon) &= 0; \\ (\mathbf{P}_1(1, x - \varepsilon, \varepsilon) - \mathbf{P}_1(1, x, \varepsilon))\mathbf{A}\mathbf{e} - x\mathbf{P}_1(0, x, \varepsilon)\mathbf{e} + \\ + (x + \varepsilon)\mathbf{P}_1(0, x + \varepsilon, \varepsilon)\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{P}_1(k, x, \varepsilon) = \mathbf{P}_1(k, x),$$

тогда имеем следующие предельные соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1(0, x)(\mathbf{Q} - \Lambda - x\mathbf{I}) + \tilde{\mu}(x)\mathbf{P}_1(1, x) &= 0; \\ \mathbf{P}_1(1, x)(\mathbf{Q} - \Lambda - \tilde{\mu}(x)\mathbf{I}) + \mathbf{P}_1(0, x)\Lambda + \\ + \mathbf{P}_1(1, x)\Lambda + x\mathbf{P}_1(0, x) &= 0; \\ (\mathbf{P}_1(1, x) - \mathbf{P}_1(1, x))\Lambda\mathbf{e} - x\mathbf{P}_1(0, x)\mathbf{e} + x\mathbf{P}_1(0, x)\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение $\mathbf{P}_1(k, x)$ этой системы запишем в виде

$$\mathbf{P}_1(k, x) = \mathbf{r}_k(x)\pi_1(x), \quad k = 0, 1, \quad (7)$$

где векторы $\mathbf{r}_k(x)$ определяют двумерное распределение вероятностей того, что сервер находится в состоянии k , а входящий ММРР — в состоянии m .

Из первых уравнений системы (6) получим систему двух матричных уравнений относительно двух векторов $\mathbf{r}_0(x)$ и $\mathbf{r}_1(x)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(x)(\mathbf{Q} - \Lambda - x\mathbf{I}) + \tilde{\mu}(x)\mathbf{r}_1(x) &= 0; \\ \mathbf{r}_1(x)(\mathbf{Q} - \tilde{\mu}(x)\mathbf{I}) + \mathbf{r}_0(x)(\Lambda + x\mathbf{I}) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Обозначим $\mathbf{r}_0(x) + \mathbf{r}_1(x) = \mathbf{r}(x)$ стационарное распределение вероятностей состояний входящего ММРР. Из системы (8) нетрудно получить следующие уравнения, однозначно определяющие вектор $\mathbf{r}(x)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(x)\mathbf{Q} &= 0; \\ \mathbf{r}(x)\mathbf{e} &= 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(x) &= \tilde{\mu}(x) \cdot \mathbf{r}(x) [\tilde{\mu}(x)\mathbf{I} + \Lambda + x\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}; \\ \mathbf{r}_1(x) &= \mathbf{r}(x) [\Lambda + x\mathbf{I}] [\tilde{\mu}(x)\mathbf{I} + \Lambda + x\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

определяющие вероятности состояний сервера и распределение вероятностей состояний ММРР.

Вернемся к согласованному уравнению системы (5). Используя разложение функций $\mathbf{P}_1(k, x, \varepsilon)$ в ряд Тейлора по приращению ε в окрестности точки x , запишем уравнение с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned} \left(\left[\mathbf{P}_1(1, x, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{P}_1(1, x, \varepsilon)}{\partial x} \right] - \mathbf{P}_1(1, x, \varepsilon) \right) \Lambda \mathbf{e} - \\ - x\mathbf{P}_1(0, x, \varepsilon)\mathbf{e} + \\ + \left[x\mathbf{P}_1(0, x, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\partial x\mathbf{P}_1(0, x, \varepsilon)}{\partial x} \right] \mathbf{e} = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Реализуя несложные алгебраические преобразования, в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ получим равенство

$$-\frac{\partial}{\partial x} \{ \mathbf{P}_1(1, x)\Lambda\mathbf{e} - x\mathbf{P}_1(0, x)\mathbf{e} \} = 0,$$

в которое подставим решение (7) и запишем

$$-\frac{\partial}{\partial x} \{ \pi_1(x)(\mathbf{r}_1(x)\Lambda\mathbf{e} - x\mathbf{r}_0(x)\mathbf{e}) \} = 0. \quad (12)$$

откуда в силу стационарности параметры системы удовлетворяют следующему равенству [24]:

$$\mathbf{r}_1(x)\Lambda\mathbf{e} - x\mathbf{r}_0(x)\mathbf{e} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) является нелинейным относительно x , обозначим решение данного уравнения $x = \kappa_1$. Стоит заметить, что решение уравнения (13) необходимо осуществлять совместно с решением системы уравнений (8), явный вид функций $\mathbf{r}_0(x)$, $\mathbf{r}_1(x)$ и параметра κ_1 получить не удастся.

Обратные замены к $\sigma i = x = \kappa_1$ позволяют сделать вывод о том, что асимптотическое среднее число заявок на орбите (среднее значение процесса $i(t)$) равно κ_1/σ .

На втором этапе реализации метода получим формулы для расчета распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Асимптотика второго порядка

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и выполним замены:

$$\sigma i = x + \varepsilon y, \quad \mathbf{P}(k, i) = \mathbf{P}_2(k, y, \varepsilon), \quad \mu(i) = \tilde{\mu}(x + \varepsilon y).$$

Из системы (4) получим асимптотические уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)(\mathbf{Q} - \Lambda - (x + \varepsilon y)\mathbf{I}) + \tilde{\mu}(x + \varepsilon y)\mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon) &= 0; \\ \mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon)(\mathbf{Q} - \Lambda - \tilde{\mu}(x + \varepsilon y)\mathbf{I}) + \mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)\Lambda + \\ + \mathbf{P}_2(1, y - \varepsilon, \varepsilon)\Lambda + (x + \varepsilon(y + \varepsilon))\mathbf{P}_2(0, y + \varepsilon, \varepsilon) &= 0; \\ (\mathbf{P}_2(1, y - \varepsilon, \varepsilon) - \mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon))\Lambda\mathbf{e} - \\ - (x + \varepsilon y)\mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)\mathbf{e} + \\ + (x + \varepsilon(y + \varepsilon))\mathbf{P}_2(0, y + \varepsilon, \varepsilon)\mathbf{e} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В первом и втором уравнении системы (14) запишем разложение функций $\mathbf{P}_2(k, y \pm \varepsilon, \varepsilon)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Выполнив преобразования, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)(\mathbf{Q} - \Lambda - (x + \varepsilon y)\mathbf{I}) + \tilde{\mu}(x + \varepsilon y)\mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon) &= 0; \\ \mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon)(\mathbf{Q} - \tilde{\mu}(x + \varepsilon y)\mathbf{I}) + \\ + \mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)(\Lambda + (x + \varepsilon y)\mathbf{I}) - \\ - \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ \mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon)\Lambda - x\mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon) \} &= O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Запишем функцию $\tilde{\mu}(x + \varepsilon y)$ в виде разложения:

$$\tilde{\mu}(x + \varepsilon y) = \tilde{\mu}(x) + \varepsilon y \tilde{\mu}'(x) + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя данное выражение в уравнения (15), имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - x\mathbf{I}) + \tilde{\mu}(x)\mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon) = \\ & = \varepsilon y \{ \mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon) - \tilde{\mu}'(x)\mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon) \} + O(\varepsilon^2); \\ & \mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon)(\mathbf{Q} - \tilde{\mu}(x)\mathbf{I}) + \mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)(\mathbf{\Lambda} + x\mathbf{I}) = \\ & = \varepsilon y \{ \tilde{\mu}'(x)\mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon) - \mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon) \} + \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ \mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon)\mathbf{\Lambda} - x\mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon) \} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Решение $\mathbf{P}_2(k, y, \varepsilon)$ этой системы будем искать в виде разложения следующего вида:

$$\mathbf{P}_2(k, y, \varepsilon) = \mathbf{r}_k \pi_2(y) + \varepsilon \mathbf{f}_k(y) \pi_2'(y) + O(\varepsilon^2), \quad (17)$$

где векторы вероятностей $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(\kappa_1)$, $k = 0, 1$, определены выражениями (10) при значении $x = \kappa_1$.

Система (16) переписется в виде

$$\begin{aligned} & \{ \mathbf{r}_0 \pi_2(y) + \varepsilon \mathbf{f}_0(y) \pi_2'(y) \} (\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - x\mathbf{I}) + \\ & + \tilde{\mu}(x) \{ \mathbf{r}_1 \pi_2(y) + \varepsilon \mathbf{f}_1(y) \pi_2'(y) \} = \\ & = \varepsilon y \pi_2(x) \{ \mathbf{r}_0 - \tilde{\mu}'(x)\mathbf{r}_1 \} + O(\varepsilon^2); \\ & \{ \mathbf{r}_1 \pi_2(y) + \varepsilon \mathbf{f}_1(y) \pi_2'(y) \} (\mathbf{Q} - \tilde{\mu}(x)\mathbf{I}) + \\ & + \{ \mathbf{r}_0 \pi_2(y) + \varepsilon \mathbf{f}_0(y) \pi_2'(y) \} (\mathbf{\Lambda} + x\mathbf{I}) = \\ & = \varepsilon y \pi_2(y) \{ \tilde{\mu}'(x)\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \} + \\ & + \varepsilon \frac{\partial \pi_2(y)}{\partial y} \{ \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} - x\mathbf{r}_0 \} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (18)$$

Выполним преобразования, в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}_0(y)(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - x\mathbf{I}) + \mathbf{f}_1(y)\tilde{\mu}(x) = y \frac{\pi_2(y)}{\pi_2'(y)} \{ \mathbf{r}_0 - \tilde{\mu}'(x)\mathbf{r}_1 \}; \\ & \mathbf{f}_1(y)(\mathbf{Q} - \tilde{\mu}(x)\mathbf{I}) + \mathbf{f}_0(y)(\mathbf{\Lambda} + x\mathbf{I}) = \\ & = y \frac{\pi_2(y)}{\pi_2'(y)} \{ \tilde{\mu}'(x)\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \} + \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} - x\mathbf{r}_0. \end{aligned} \quad (19)$$

Запишем решение $\mathbf{f}_k(y)$ неоднородной СЛАУ (19) в виде суперпозиции общего решения однородной СЛАУ и частных решений неоднородной системы:

$$\mathbf{f}_k(y) = C\mathbf{r}_k + \mathbf{g}_k + y \frac{\pi_2(y)}{\pi_2'(y)} \boldsymbol{\varphi}_k, \quad (20)$$

где векторы \mathbf{g}_k и $\boldsymbol{\varphi}_k$ удовлетворяют следующим неоднородным СЛАУ:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - x\mathbf{I}) + \boldsymbol{\varphi}_1 \tilde{\mu}(x) = \mathbf{r}_0 - \tilde{\mu}'(x)\mathbf{r}_1; \\ & \boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{Q} - \tilde{\mu}(x)\mathbf{I}) + \boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{\Lambda} + x\mathbf{I}) = \tilde{\mu}'(x)\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0; \\ & \mathbf{g}_0(\mathbf{Q} - \mathbf{\Lambda} - x\mathbf{I}) + \mathbf{g}_1 \tilde{\mu}(x) = 0; \\ & \mathbf{g}_1(\mathbf{Q} - \tilde{\mu}(x)\mathbf{I}) + \mathbf{g}_0(\mathbf{\Lambda} + x\mathbf{I}) = \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} - x\mathbf{r}_0, \end{aligned} \quad (21)$$

и дополнительным условиям $(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1)\mathbf{e} = 0$, $(\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_1)\mathbf{e} = 0$ при значении $x = \kappa_1$.

Вернемся к последнему уравнению системы (14), запишем его с точностью до $O(\varepsilon^3)$:

$$\begin{aligned} & \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \{ -\mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon)\mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + (x + \varepsilon y)\mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)\mathbf{e} \} + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ \mathbf{P}_2(1, y, \varepsilon)\mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + x\mathbf{P}_2(0, y, \varepsilon)\mathbf{e} \} = O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

В последнее уравнение подставим решение (17), после некоторых преобразований в предельном условии $\varepsilon \rightarrow 0$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \{ \pi_2'(y)(x\mathbf{f}_0(y)\mathbf{e} - \mathbf{f}_1(y)\mathbf{\Lambda} \mathbf{e}) + y\pi_2(y)\mathbf{r}_0\mathbf{e} \} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi_2(y)}{\partial y^2} \{ \mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + x\mathbf{r}_0\mathbf{e} \} = 0. \end{aligned}$$

Учитывая (20) и упрощая, окончательно имеем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \{ y\pi_2(y)(\boldsymbol{\varphi}_0 x \mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{r}_0 \mathbf{e}) \} + \\ & + \frac{\partial^2 \pi_2(y)}{\partial y^2} (\mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{g}_0 x \mathbf{e} - \mathbf{g}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}) = 0, \end{aligned}$$

откуда несложно получить обыкновенное однородное дифференциальное уравнение относительно функции $\pi_2(y)$

$$\pi_2'(y) \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{g}_0 x \mathbf{e} - \mathbf{g}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}}{\boldsymbol{\varphi}_0 x \mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{r}_0 \mathbf{e}} + y\pi_2(y) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\pi_2(y) = \exp \left\{ \frac{(jy)^2 \kappa_2}{2} \right\}$$

с параметром

$$\kappa_2 = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{g}_0 x \mathbf{e} - \mathbf{g}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}}{\boldsymbol{\varphi}_0 x \mathbf{e} - \boldsymbol{\varphi}_1 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + \mathbf{r}_0 \mathbf{e}}, \quad (22)$$

который определяет дисперсию асимптотического распределения.

Объединяя результаты обеих асимптотик и применяя обратные замены, получим, что предельное распределение числа заблокированных заявок на орбите подчиняется гауссовскому закону распределения случайных величин с математическим ожиданием κ_1/σ , определяемым уравнением (13), и дисперсией κ_2/σ , определяемой формулой (22).

Для построения аппроксимации исследуемого случайного процесса $i(t)$ — числа заявок на орбите в рассматриваемой модели — введем обозначение $F(x)$ — функцию распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины, которая определяется параметрами κ_1/σ и κ_2/σ .

Полученное предельное гауссовское распределение является непрерывным распределением, принимающим значения в диапазоне $(-\infty, +\infty)$. В свою очередь процесс $i(t)$ числа заблокированных заявок системой принимает неотрицательные дискретные значения. Чтобы получить из гауссовского распределения закон распределения дискретной случайной величины, выполним его дискретизацию и нормирование.

Для построения аппроксимации дискретного распределения $P(i)$ числа i заблокированных заявок в системе предлагается следующая формула:

$$P_A(i) = \frac{F(i + 0,5) - F(i - 0,5)}{1 - F(-0,5)}. \quad (23)$$

Отметим, что числитель в формуле (23) определяет вероятность попадания значения случайной величины в интервал $(i - 0,5; i + 0,5)$, а знаменатель обеспечивает условие нормировки с учетом того, что физически число заявок не может принимать значение из отрицательной области.

Дискретное распределение вероятностей $P_A(i)$ будем называть гауссовской аппроксимацией распределения вероятностей $P(i)$ числа i заблокированных заявок в системе.

Формализуем приведенные выше исследования для наглядности в виде следующего алгоритма построения аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите в предельном условии неограниченного возрастания среднего времени задержек заблокированных заявок на орбите ($\sigma \rightarrow 0$).

1. Зададим матрицы \mathbf{Q} , \mathbf{A} , определяющие входящий ММРР, значения параметров системы σ , $\mu(\sigma i)$ и аппроксимирующую ее предельную функцию $\tilde{\mu}(x)$.

2. Найдем значение параметра κ_1 , решая уравнение (14).

3. Найдем значения векторов \mathbf{r}_k , решая системы (9) и (10) при $x = \kappa_1$.

4. Найдем значения векторов \mathbf{g}_0 , \mathbf{g}_1 , Φ_0 и Φ_1 , удовлетворяющие дополнительным условиям $(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1)\mathbf{e} = 0$, $(\Phi_0 + \Phi_1)\mathbf{e} = 0$, решая систему (20) при $x = \kappa_1$.

5. Найдем значение параметра κ_2 , решая уравнение (22).

6. Построим гауссовскую аппроксимацию $P_A(i)$ распределения вероятностей $P(i) = P\{i(t) = i\}$

числа i заблокированных заявок в системе с использованием метода асимптотического анализа по формуле (23).

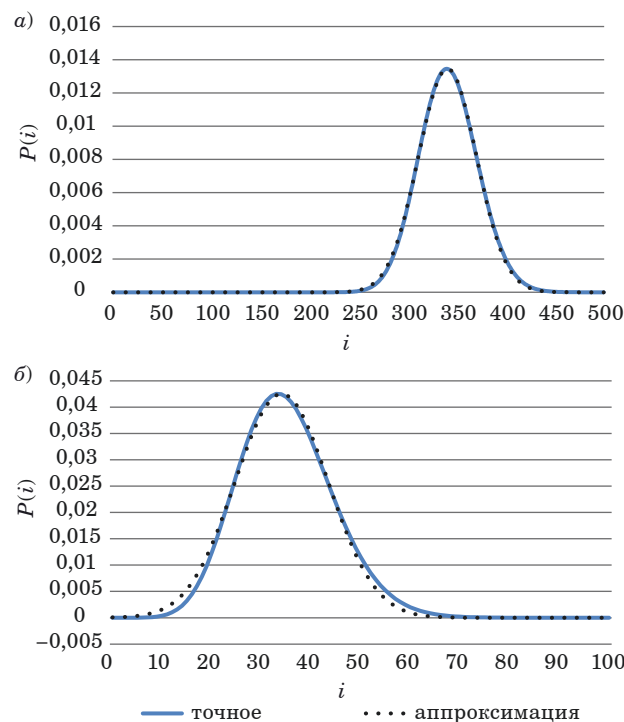
Оценка точности аппроксимации

В частном случае рассмотренной модели с входящим пуассоновским потоком с интенсивностью λ система уравнений (4) для стационарного распределения вероятностей состояний системы имеет скалярный вид

$$\begin{aligned} -P(0, i)(\lambda + i\sigma) + \mu(i)P(1, i) &= 0; \\ -P(1, i)(\lambda + \mu(i)) + \lambda P(0, i) + \\ + \lambda P(1, i - 1) + (i + 1)\sigma P(0, i + 1) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Нетрудно заметить, что из системы (24) можно получить рекуррентные соотношения для вычисления стационарных вероятностей. Таким образом, реализовав численный алгоритм вычисления стационарного распределения для частного случая системы, можно оценить погрешность предлагаемой аппроксимации (23).

Сравнение численного и предельного распределений при параметрах со значениями $\lambda = 0,5$,



■ **Рис. 2.** Точное и предельное распределение при параметре $\sigma = 0,01$ (а) и $\sigma = 0,1$ (б)
 ■ **Fig. 2.** The exact and asymptotic distributions for parameter $\sigma = 0,01$ (a) and $\sigma = 0,1$ (b)

- Расстояние Колмогорова
- Kolmogorov distance

λ	Значения расстояния при		
	$\sigma = 1$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,01$
0,3	0,120	0,029	0,011
0,5	0,069	0,025	0,008
0,7	0,082	0,028	0,009

$\mu(i) = \sqrt{\frac{i+1}{i+10}}$, $\sigma = 0,01$ и $\sigma = 0,1$ представлено на рис. 2, а и б.

Как видно из рисунка, предлагаемая аппроксимация имеет высокую точность и не только в случае долгой задержки заявок на орбите, но и для значений параметра σ того же порядка, что интенсивность входящего потока λ .

В качестве критерия близости распределений выберем расстояния Колмогорова

$$\Delta = \max_i |F_a(i) - F_{ex}(i)|,$$

где $F_a(i)$ — функция асимптотического распределения вероятностей, а $F_{ex}(i)$ — функция распределения вероятностей, полученного численно.

В таблице представлены результаты оценки погрешности аппроксимации — вычисленные значения расстояния Колмогорова при различных значениях интенсивности входящего потока и параметра задержки.

Численный пример расчета показателей качества

Рассчитаем вероятностные характеристики канала связи, предназначенного для передачи видеопотока в мультимодальной сети со следующими характеристиками входящего потока:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix} \text{ Кбит/с;}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & -0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & -0,5 \end{pmatrix},$$

интенсивность повторного обращения при неудачной передаче $\sigma = 100$ Кбит/с.

Пусть функция изменения скорости передачи

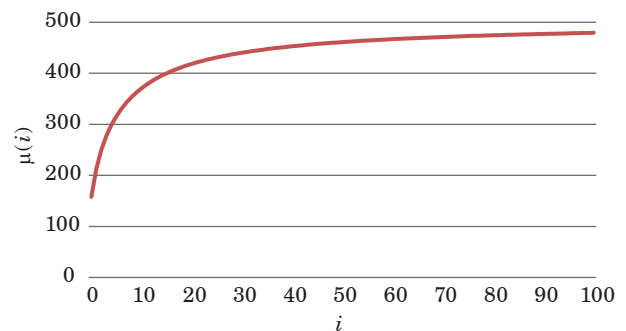
$$\mu(i) = \sqrt{\frac{i+1}{i+10}} \cdot 500 \text{ Кбит/с}$$

имеет вид, представленный на рис. 3.

График аппроксимирующего распределения вероятностей числа повторных обращений представлен на рис. 4. Среднее число заблокированных пакетов в рассматриваемом примере равно 4,5.

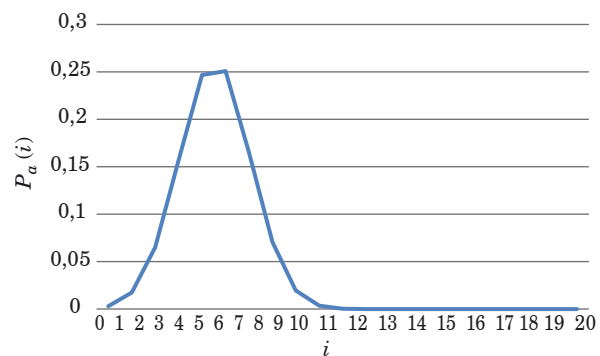
Стационарные вероятности состояний канала принимают следующие значения при заданных параметрах системы: с вероятностью $r_0 = 0,404$ канал будет свободен, с вероятностью $r_1 = 0,596$ канал будет занят передачей. Сходимость вероятностей состояний канала к стационарным значениям показана на рис. 5.

Таким образом, с помощью результатов проведенного аналитического исследования можно оценить основные характеристики телекомму-



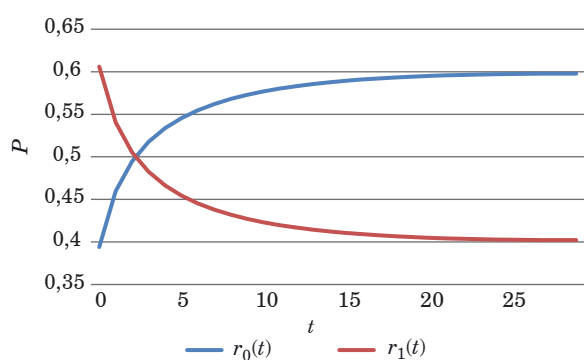
■ **Рис. 3.** Пример функции изменения скорости передачи

■ **Fig. 3.** Example of bit rate variation function



■ **Рис. 4.** Стационарное распределение вероятностей числа пакетов на передачу

■ **Fig. 4.** Stationary probability distribution of the number of packets to be transmitted



■ **Рис. 5.** Динамические вероятности состояния канала от числа пакетов на передачу (r_0 – канал свободен, r_1 – канал занят)

■ **Fig. 5.** Channel state dynamic probabilities as a function of the number of transmission packets (r_0 – channel is free, r_1 – channel is busy)

никационных сетей, задавая на вход модели значения, полученные из статистических данных.

Заключение

Предложенная в работе модель системы массового обслуживания с повторными вызовами, коррелированным потоком заявок и динамической скоростью обслуживания точнее отражает процессы множественного доступа в современных телекоммуникационных сетях с меняю-

щейся интенсивностью запросов в сравнении с представленными в литературе классическими моделями с простейшим входящим потоком [18, 20]. Таким образом, применение результатов моделирования позволяет более точно оценить требуемые характеристики сетей передачи информации [8, 9].

Применение метода асимптотического анализа позволило установить, что асимптотическое распределение числа заблокированных заявок стремится к нормальному распределению при увеличении среднего времени задержки. Этот вывод существенно упрощает оценку распределения числа заблокированных пользователей в реальных сетях, поскольку для построения распределения достаточно определить лишь статистические оценки математического ожидания и дисперсии анализируемой величины, что значительно облегчает нахождение более сложных характеристик, необходимых для выполнения требований к уровню качества.

Численный анализ результатов показал, что гауссовская аппроксимация демонстрирует высокую точность при уменьшении параметра интенсивности повторных обращений, достигая погрешности менее 3 %.

Таким образом, разработанный подход расширяет возможности исследования систем массового обслуживания и открывает перспективы дальнейшего изучения систем более сложной конфигурации, например с произвольным числом серверов.

Литература

1. Ryndin A. V. Methodology for evaluating the efficiency of multimodal information transmission. *Proceedings of X All-Russian Scientific Conference "Synthesis and Applied Synergetics"*, 2023, pp. 139–144. doi:10.18522/syssyn-2022-27
2. Abdulhamit S., Saeed M. Q., Humaira N. *Artificial Intelligence and Multimodal Signal Processing in Human-Machine Interaction*. Academic Press, 2025. 406 p. doi:10.1016/B978-0-443-29150-0.09990-X
3. Dritsas E., Trigka M., Troussas C., Mylonas P. Multimodal interaction, interfaces, and communication: A survey. *Multimodal Technologies and Interaction*, 2025, vol. 9, iss. 1, 6 p. doi:10.3390/mti9010006
4. Alfa A. S., Ghazaleh H. Abu, Maharaj B. T. Performance analysis of multi-modal overlay/underlay switching service levels in cognitive radio networks. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 78442–78453. doi:10.1109/ACCESS.2019.2923563
5. Дараселия А. В., Сопин Э. С., Самуйлов К. Е., Кучерявый Е. А. Минимизация задержки в системах 5G/6G IoT с групповым поступлением в восходящем и нисходящем направлениях. *Информатика и ее применения*, 2024, т. 18, вып. 4, с. 59–67. doi:10.14357/19922264240408, EDN: EBGJBZ
6. Sabuncu Ö., Bilgehan B. Novel statistical modelling and optimization techniques of fading channel coefficients for 5G network performance. *Journal of Network and Systems Management*, 2025, vol. 33, Article 42. doi:10.1007/s10922-025-09905-4
7. Zin T. T., Moe A. S. T., Phyo C. N., Tin P. Fusion of strategic queueing theory and AI for smart city telecommunication system. *2024 IEEE 21st International Conference on Mobile Ad-Hoc and Smart Systems (MASS)*, Seoul, Republic of Korea, 2024, pp. 653–657. doi:10.1109/MASS62177.2024.00104
8. Вишнеvский В. М. *Теоретические основы проектирования компьютерных сетей*. М., Техносфера, 2003. 512 с.
9. Степанов С. Н. *Теория телетрафика: концепции, модели, приложения*. М., Горячая линия-Телеком, 2015. 868 с.
10. Artalejo J. R., Gomez-Corral A. *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer, Berlin, 2008. 318 p. doi:10.1007/978-3-540-78725-9

11. Falin G., Templeton J. *Retrial Queues*. Taylor & Francis, 1997.
12. Artalejo J. R., Li Q. L. Performance analysis of a block-structured discrete-time retrial queue with state-dependent arrivals. *Discrete Event Dynamic Systems*, 2010, vol. 20, iss. 3, pp. 325–347. doi:10.1007/s10626-009-0075-6
13. Dimitriou I. A single server retrial queue with event-dependent arrival rates. *Ann. Oper. Res.*, 2023, vol. 331, pp. 1053–1088. doi:10.1007/s10479-023-05263-z
14. Gupta P., Kumar N. Analysis of classical retrial queue with differentiated vacation and state dependent arrival rate. *Ratio Math*, 2021, vol. 40, pp. 47–66. doi:10.23755/rm.v40i1.607
15. Ingolfssoon A., Almehdawe E., Pedram A., Tran M. Comparison of fluid approximations for service systems with state-dependent service rates and return probabilities. *European Journal of Operational Research*, 2020, vol. 283, pp. 562–575. doi:10.1016/j.ejor.2019.11.041
16. Lv Sh., Zhu L. Single server repairable queueing system with variable service rate and failure rate. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 1233–1239. doi:10.1109/access.2020.3047815, EDN: UXLXOK
17. Ponomarov V., Lebedev E. Optimal control of retrial queues with finite population and state-dependent service rate. *Advances in Computer Science for Engineering and Education. ICCSEEA 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing?* Las Vegas, 12–14 Dec. 2018, vol. 754, pp. 359–369. doi:10.1007/978-3-319-91008-6_36
18. Jain M., Sanga S. S. *F-policy for M/M/1/k retrial queueing model with state-dependent rates*. In: *Performance Prediction and Analytics of Fuzzy, Reliability and Queueing Models*. Deep K., Jain M., Salhi S. (eds). Springer, Singapore, 2019, pp. 127–138. doi:10.1007/978-981-13-0857-4_9
19. Jain M., Sanga S. S. Admission control for finite capacity queueing model with general retrial times and state-dependent rates. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2020, vol. 16, iss. 6, pp. 2625–2649. doi:10.3934/jimo.2019073
20. Baron O., Economou A., Manou A. The state-dependent M/G/1 queue with orbit. *Queueing Systems*, 2018, vol. 90, pp. 89–123. doi:10.1007/s11134-018-9582-1
21. Ложковский А. Г., Каптур В. А., Вербанов О. В., Колчар В. М. Математическая модель пакетного трафика. *Вестник Национального технического университета «ХПИ»*, 2011, № 9, с. 113–119.
22. Naumov V., Gaidamaka Y., Yarkina N., Samouylov K. *Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems*. Springer, Berlin/Heidelberg, Germany, 2021. 305 p. doi:10.1007/978-3-030-83132-5
23. Nazarov A. A., Fedorova E. A., Lizyura O. D., Salimzianov R. R. Asymptotic diffusion method for retrial queues with state-dependent service rate. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 3, Article 3140. doi:10.3390/math11143140
24. Пауль С. В., Назаров А. А., Лапатин И. Л., Иванова А. С. Моделирование производительности облачного узла при коррелированном характере нагрузки. *Информационные и математические технологии в науке и управлении*, 2025, № 4 (40), с. 90–101.
25. Nazarov A., Paul S., Lizyura O. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls. *Glob. Stoch. Anal.*, 2021, vol. 8, no. 3, pp. 143–149.

UDC 519.872

doi:10.31799/1684-8853-2026-2-61-71

EDN: UKKWUF

Asymptotic analysis of a queueing system with repeated calls and dynamic service rateS. V. Paul^a, Dr. Sc., Phys.-Math., Professor, orcid.org/0000-0002-3681-0676, paulsv82@mail.ruE. A. Fedorova^a, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0001-8933-5322, ekat_fedorova@mail.ru^aNational Research Tomsk State University, 36, Lenin Ave., 634050, Tomsk, Russian Federation

Introduction: One of the features of next-generation networks is the limited computing resources, which often leads to network competition as the number of requests simultaneously processed by a node increases. Taking this effect into account in a mathematical modelling can improve the performance and speed of request processing in a real system. **Purpose:** To study a mathematical model of a random multiple access network in the form of a queueing system with repeated calls, taking into account the dependence of the service intensity on the number of requests in the system; to find the stationary probability distribution of server states and the number of blocked customers. **Methods:** The asymptotic analysis method is applied under the limiting condition of unlimited increase of average delay time of blocked customers. **Results:** We have constructed the mathematical model of a random multiple access network in the form of a retrial system, taking into account the correlated nature of arrival requests and service rate dependent on their total number of customers in the system. We have derived formulas for calculating the asymptotic mean and variance of the number of blocked customers under the condition of unlimited increase of average delay time, which allows obtaining the approximation of probability distribution. It has been shown that the asymptotic distribution is Gaussian. As a result of numerical comparison between the asymptotic and exact distributions of probabilities (in a particular case), we show that the obtained approximation has sufficiently low error (< 3%) at small parameters of delay between retry attempts. **Practical relevance:** The presented numerical example demonstrates the possibility of calculating key performance indicators of data transmission networks using the proposed mathematical model, which takes into account the important

technical factor of the dependence of the service speed on the total number of requests in the network. **Discussion:** The research results can contribute to more efficient load planning for telecommunication networks.

Keywords – mathematical modeling, queueing theory, repeated calls, Markov-modulated Poisson arrival process, asymptotic analysis.

For citation: Paul S. V., Fedorova E. A. Asymptotic analysis of a queueing system with repeated calls and dynamic service rate. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2026, no. 2, pp. 61–71 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2026-2-61-71, EDN: UKKWUF

References

- Ryndin A. V. Methodology for evaluating the efficiency of multimodal information transmission. *Proceedings of X All-Russian Scientific Conference "Synthesis and Applied Synergetics"*, 2023, pp. 139–144. doi:10.18522/sysshyn-2022-27
- Abdulhamit S., Saeed M. Q., Humaira N. *Artificial Intelligence and Multimodal Signal Processing in Human-Machine Interaction*. Academic Press, 2025. 406 p. doi:10.1016/B978-0-443-29150-0.09990-X
- Dritsas E., Trigka M., Troussas C., Mylonas P. Multimodal interaction, interfaces, and communication: A survey. *Multimodal Technologies and Interaction*, 2025, vol. 9, iss. 1, 6 p. doi:10.3390/mti9010006
- Alfa A. S., Ghazaleh H. Abu, Maharaj B. T. Performance analysis of multi-modal overlay/underlay switching service levels in cognitive radio networks. *IEEE Access*, 2019, vol. 7, pp. 78442–78453. doi:10.1109/ACCESS.2019.2923563
- Daraseliya A. V., Sopin E. S., Samuylov K. E., Koucheryavy E. A. Minimizing latency in 5G/6G IoT systems with group admission in ascending and descending directions. *Informatics and Applications*, 2024, vol. 18, iss. 4, pp. 59–67 (In Russian). doi:10.14357/19922264240408, EDN: EBGJBZ
- Sabuncu Ö., Bilgehan B. Novel statistical modelling and optimization techniques of fading channel coefficients for 5G network performance. *Journal of Network and Systems Management*, 2025, vol. 33, Article 42. doi:10.1007/s10922-025-09905-4
- Zin T. T., Moe A. S. T., Phyo C. N., Tin P. Fusion of strategic queueing theory and AI for smart city telecommunication system. *2024 IEEE 21st International Conference on Mobile Ad-Hoc and Smart Systems (MASS)*, Seoul, Republic of Korea, 2024, pp. 653–657. doi:10.1109/MASS62177.2024.00104
- Vishnevsky V. M. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh setey* [Theoretical foundations of designing computer networks]. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2003. 512 p. (In Russian).
- Stepanov S. N. *Teoriya teletrafika: kontseptsii, modeli, prilozheniya*. [Teletraffic theory: concepts, models, applications]. Moscow, Goryachaya Liniya-Telecom Publ., 2015. 868 p. (In Russian).
- Artalejo J. R., Gomez-Corral A. *Retrial Queueing Systems. A Computational Approach*. Springer, Berlin, 2008. 318 p. doi:10.1007/978-3-540-78725-9
- Falin G., Templeton J. *Retrial Queues*. Taylor & Francis, 1997.
- Artalejo J. R., Li Q. L. Performance analysis of a block-structured discrete-time retrial queue with state-dependent arrivals. *Discrete Event Dynamic Systems*, 2010, vol. 20, iss. 3, pp. 325–347. doi:10.1007/s10626-009-0075-6
- Dimitriou I. A single server retrial queue with event-dependent arrival rates. *Ann. Oper. Res.*, 2023, vol. 331, pp. 1053–1088. doi:10.1007/s10479-023-05263-z
- Gupta P., Kumar N. Analysis of classical retrial queue with differentiated vacation and state dependent arrival rate. *Ratio Math*, 2021, vol. 40, pp. 47–66. doi:10.23755/rm.v40i1.607
- Ingolfsson A., Almehdawe E., Pedram A., Tran M. Comparison of fluid approximations for service systems with state-dependent service rates and return probabilities. *European Journal of Operational Research*, 2020, vol. 283, iss. 2, pp. 562–575. doi:10.1016/j.ejor.2019.11.041
- Lv Sh., Zhu L. Single server repairable queueing system with variable service rate and failure rate. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 1233–1239. doi:10.1109/access.2020.3047815, EDN: UXLXOK
- Ponomarov V., Lebedev E. Optimal control of retrial queues with finite population and state-dependent service rate. *Advances in Computer Science for Engineering and Education. ICCSEEA 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing*, Las Vegas, 12–14 Dec. 2018, vol. 754, pp. 359–369. doi:10.1007/978-3-319-91008-6_36
- Jain M., Sanga S. S. *F-policy for M/M/1/k retrial queueing model with state-dependent rates*. In: *Performance Prediction and Analytics of Fuzzy, Reliability and Queueing Models*. Deep K., Jain M., Salhi S. (eds). Springer, Singapore, 2019, pp. 127–138. doi:10.1007/978-981-13-0857-4_9
- Jain M., Sanga S. S. Admission control for finite capacity queueing model with general retrial times and state-dependent rates. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2020, vol. 16, iss. 6, pp. 2625–2649. doi:10.3934/jimo.2019073
- Baron O., Economou A., Manou A. The state-dependent M/G/1 queue with orbit. *Queueing Systems*, 2018, vol. 90, pp. 89–123. doi:10.1007/s11134-018-9582-1
- Lozhkovsky A. G., Kaptur V. A., Verbanov O. V., Kolchar V. M. Matematicheskaya model' paketnogo trafika [Mathematical model of packet traffic]. *Vestnik Natsionalnogo tekhnicheskogo universiteta "KhPI"*, 2011, no. 9, pp. 113–119 (In Russian).
- Naumov V., Gaidamaka Y., Yarkina N., Samouylov K. *Matrix and Analytical Methods for Performance Analysis of Telecommunication Systems*. Springer, Berlin/Heidelberg, Germany, 2021. 305 p. doi:10.1007/978-3-030-83132-5
- Nazarov A. A., Fedorova E. A., Lizyura O. D., Salimzianov R. R. Asymptotic diffusion method for retrial queues with state-dependent service rate. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 3, Article 3140. doi:10.3390/math11143140
- Paul S. V., Nazarov A. A., Lapatin I. L., Ivanova A. S. Modeling cloud node performance under correlated load conditions. *Information and Mathematical Technologies in Science and Management*, 2025, no. 4 (40), pp. 90–101 (In Russian). doi:10.25729/ESI.2025.40.4.007, EDN: XQWKKI
- Nazarov A., Paul S., Lizyura O. Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with unreliable server and multiple types of outgoing calls. *Glob. Stoch. Anal.*, 2021, vol. 8, no. 3, pp. 143–149.