УДК 519.614
doi:10.31799/1684-8853-2026-1-2-7
EDN: OANKSB

Научные статьи
Articles

Памяти моего учителя и соавтора
профессора Балонина Николая Алексеевича

Взаимосвязь симметрий бициклических ортогональных матриц и их порядков

А. М. Сергеев[a]*, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-4788-9869, aleks.asklab@gmail.com*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ*

Введение: *матричные вычисления, являясь структурированными и простыми, применяются в различных задачах и технических системах, включая криптографические, телекоммуникационные и др. Особый интерес для практического применения представляют ортогональные матрицы Адамара и конференц-матрицы Белевича с различными симметриями, исследование которых редко распространяется на их блочные структуры.* ***Цель:*** *показать способы получения симметричных матриц семейства Адамара бициклических структур с окаймлением, понимая симметрию в широком смысле, включая кососимметрию и двоякосимметрию.* ***Результаты:*** *выявлены взаимосвязь симметрий бициклических матриц с каймой с их порядками, равными простым числам и степеням простых чисел, а также способы их получения на основе симметричных и кососимметричных блоков, позволяющие расширить представительство матриц на указанных порядках и возможность их выбора для конкретного применения.* ***Обсуждение:*** *симметрия в ортогональных матрицах представляет собой малоизученное явление, особенно для блочных структур таких матриц, хотя имеет существенное значение для их практических применений. Интерес вызывает исследование условий существования бициклических ортогональных матриц с каймой (двойной каймой), состоящих из пары циклических блоков — кососимметричного и симметричного.*

Ключевые слова *— ортогональные матрицы, бициклические матрицы, симметрия, кососимметрия, двоякая симметрия.*

Для цитирования: Сергеев А. М. Взаимосвязь симметрий бициклических ортогональных матриц и их порядков. *Информационно-управляющие системы*, 2026, № 1, с. 2–7. doi:10.31799/1684-8853-2026-1-2-7, EDN: OANKSB
For citation: Sergeev A. M. The relationship of bicyclic orthogonal matrices symmetries and their orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2026, no. 1, pp. 2–7 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2026-1-2-7, EDN: OANKSB

Введение

Ортогональные матрицы с ограниченным числом целочисленных значений элементов привлекают внимание разработчиков методов и средств, широко используемых, например, в каналах открытых коммуникационных систем для помехозащищенного и помехоустойчивого преобразования данных [1], при формировании преамбул сообщений, передаваемых по каналам связи [2], в кодировании [3], криптографии [4] и др.

Такими матрицами являются квадратные ортогональные матрицы Адамара $\mathbf{H}$ с элементами $\{1, -1\}$, существующие на четных порядках n, для которых справедливо $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = n\mathbf{I}$ [5]. Здесь $n = 4t$, где t — натуральное число, а $\mathbf{I}$ — единичная матрица. На четных порядках $n = 4t - 2$ существуют матрицы Белевича $\mathbf{C}$ с элементами $\{1, 0, -1\}$ [6, 7].

Большой научный и практический интерес представляют для указанных задач такие матрицы с симметричными структурами или симметриями в структуре и способы их поиска либо конструирования.

Из линейной алгебры о симметрии квадратных матриц известно, что:

— для любой матрицы $\mathbf{A}$ матрицы $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ и $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ являются симметричными;

— для любых матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ произведение $\mathbf{AB}$ — симметричная матрица, если справедливо $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Однако приведенные действия даже с ортогональными матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ не могут быть использованы для поиска симметричных ортогональных матриц $\mathbf{H}$, поскольку при их выполнении результирующая симметричная матрица теряет ортогональность.

Теория матриц семейства Адамара в последнее время значительно расширилась представлениями о связях порядков их существования с числовыми последовательностями и симметрией структур [8, 9].

Симметрия — это свойство, известное лишь отчасти в отношении ортогональных матриц, поэтому цель статьи — дать о них представление, сформированное относительно недавно, и показать метод формирования матриц с симметриями на основе бициклических структур (бициклов), понимая симметрию в широком смысле: это симметрия, кососимметрия [10] и двоякая симметрия [6].

Матрицы Одина семейства Адамара

Можно предположить, что симметрия может проявляться для матриц Адамара различной структуры. Однако здесь ограничимся рассмотрением симметричных матриц, получаемых на основе циклических структур.

Поскольку, согласно гипотезе Райзера [11], симметричных матриц Адамара циклической конструкции выше четвертого порядка нет, то будем рассматривать бициклические матрицы с каймой [12], построенные на основе двух циклических блоков **A** и **B**, — матрицы Одина [13].

В семействе Адамара есть матрицы, безразличные к простоте числа $n-1$, связанного с их порядком $n = 4t$. Вычитание 1 определяет то, что свойства матрицы связаны с основой (ядром) [13] нечетного порядка и добавленной к ней каймы — строки сверху и столбца слева.

Есть также и зависящие от свойств $n-1$ основы, причем на порядках $n = 4t-2$ матрицам Адамара противопоставляют матрицы Белевича с нулевой диагональю diag{0, 0, 0, … 0} [14].

Различие между матрицами Адамара и Белевича состоит в том, что последние представлены на обеих последовательностях четных порядков $4t$ и $4t-2$. Основу матрицы Белевича порядков $4t-2$ можно подать в виде симметричной конструкции, состоящей из бицикла с бинарной каймой порядка $4t-3$.

Приведем определения матриц Одина порядков $4t-1$ и $4t-3$.

«*Определение 1.* Матрица Одина — это квадратная матрица порядка $4t-1$, являющегося простым числом или его степенью, со значениями элементов 1, $-b$ и $d = 0$ на диагонали, где $b = \dfrac{v-1}{v+\sqrt{2v-1}}$, $v = (n-1)/2$ — половина порядка матрицы, без учета ее каймы d.

Определение 2. Матрица Одина порядка $4t-3$, являющегося простым числом или его степенью, — это квадратная матрица со значениями элементов 1, $-b$, $d = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$ (на диагонали), где $b = 1-2d$» [13].

Инвариантом матрицы Одина является матрица с равным числом внедиагональных элементов с одинаковым значением. Такая структура позволяет с легкостью выделить в качестве первой строки и столбца кайму из элементов векторов $\mathbf{e}$ и $-b\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор длины v.

Матрицы описываются соответственно кососимметричной и симметричной структурами:

$$\mathbf{O}_{4t-1} = \begin{pmatrix} d & \mathbf{e} & -b\mathbf{e} \\ -b\mathbf{e} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{e} & \left[-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right] & \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix};$$

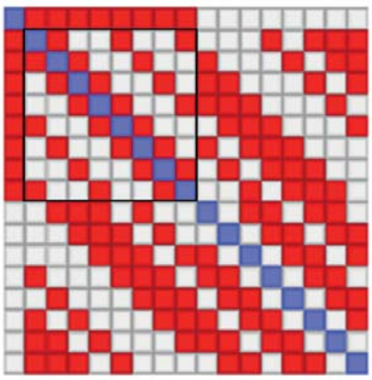
$$\mathbf{O}_{4t-3} = \begin{pmatrix} d & -b\mathbf{e} & \mathbf{e} \\ -b\mathbf{e} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{e} & \mathbf{B}^{\mathrm{T}} & \left[-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right] \end{pmatrix}.$$

В приведенных выше структурах [•] обозначает процедуру замены всех положительных элементов на 1, а отрицательных — на $-b$. Добавление верхней строки из 1 и левого столбца из –1 к матрице порождает матрицу Белевича с элементами $-b = -1$, $d = 0$.

Портрет матрицы Одина порядка 17 представлен на рис. 1. Здесь элементы матрицы с отрицательными значениями отмечены клетками красного цвета, элементы с положительными значениями — белого цвета. Диагональные элементы матриц Одина обычно нормируются так, чтобы вернуть основе ортогональность, — они синего цвета.

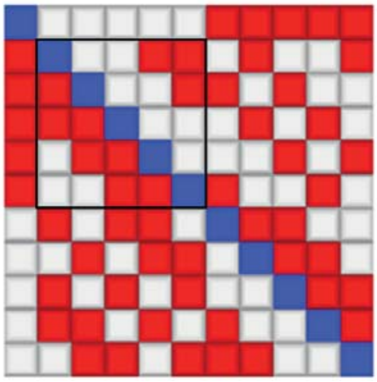
У этой матрицы как основы матрицы Адамара есть свойство, позволяющее ее находить. Блок **A** бицикла, как видно, симметричен, а блок **B** — почти кососимметричен, т. е. первая строка состоит из инвертированных по знаку и по расположению элементов [15].

Характерно, что этот вид симметрии существует только на порядках $4t-3$, на которых есть поля Галуа GF(n). Поэтому двоякосимметричные матрицы Одина существуют только на порядках, равных простым числам и степеням простых чисел.



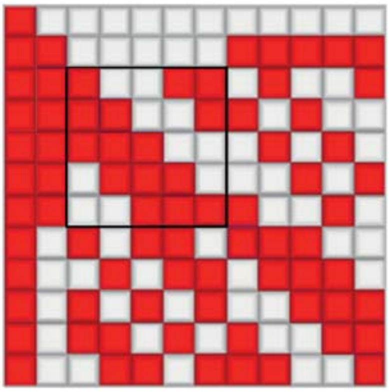
■ ***Рис. 1.*** Портрет матрицы Одина порядка 17 с выделенным блоком **A**

■ ***Fig. 1.*** Portrait of Odin matrix of order 17 with a dedicated block **A**



■ ***Рис. 2.*** Портрет матрицы Одина порядка 11 с выделенным блоком **A**

■ ***Fig. 2.*** Portrait of Odin matrix of order 11 with a dedicated block **A**



■ ***Рис. 3.*** Портрет матрицы Адамара порядка 12 как результат окаймления матрицы Одина порядка 11

■ ***Fig. 3.*** Portrait of the Hadamard matrix of order 12 as a result of adding a border to the Odin matrix of order 11

Известны рудименты в виде симметричных в целом матриц **C** на порядках, равных числам, разлагаемым на сумму квадратов двух чисел, но при этом они настолько быстро усложняются структурно [16], что их не умеют находить (конструировать) уже на порядках 66 и 86. Конструкция матрицы Белевича на порядке 46 и приемы ее построения оказались неприменимы для более высоких порядков.

Все это выделяет двоякосимметричные структуры в особую разновидность, сопровождающую простые числа. Разумеется, появления аналогичных структур следует ожидать на порядках $n = 4t - 1$, порядках кососимметричных основ матриц Адамара. Портрет такой основы порядка 11 приведен на рис. 2.

У этой основы, как видно, блок **A** бицикла кососимметричен, блок **B** — симметричен, дефект кососимметрии [15] отсутствует. Это означает, что матрица Адамара как результат окаймления матрицы Одина порядка 11, портрет которой представлен на рис. 3, может быть после соответствующей перестановки половины ее столбцов как кососимметричной, так и симметричной — это двоякосимметричная матрица.

Вычисление элементов матриц Одина не изменяется, но если диагональные элементы принимают значение 1, а это возможно только для кососимметричных версий, то это квазиортогональные матрицы Мерсенна [6].

Матрицы Мерсенна и Эйлера семейства Адамара

В отличие от матриц Одина, матрицы Мерсенна обладают качеством, резко выделяющим матрицы Адамара, построенные на их основе. Воспользуемся известными определениями матриц Мерсенна и Эйлера.

«*Определение 3*. Матрица Мерсенна **M** — квадратная матрица порядка $n = 4t - 1$ со значениями элементов 1 и $-b$, столбцы которой ортогональны $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} = \mu\mathbf{I}$, $b = \dfrac{t}{t+\sqrt{t}}$, $\mu = \dfrac{p+qb^2}{2}$, $p = n - 1$, $q = n + 1$ (порядок матрицы Адамара).

Определение 4. Матрица Эйлера **E** — квадратная матрица порядка $n = 4t - 2$ со значениями элементов $1, -a, b, -b$, столбцы которой ортогональны $\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E} = \xi\mathbf{I}$, где $b = 1/2$ при $n = 6$, в остальных случаях $b = \dfrac{q-\sqrt{8q}}{q-8}$, $q = n + 2$ (порядок матрицы Адамара), вес $\xi = \dfrac{(n+2)+(n-2)b^2}{2}$ учитывает, что $q/2$ элементов каждого столбца такой матрицы имеют значения $|a| = 1$, модули остальных элементов равны $|b| < 1$» [6].

Матрицы Эйлера, как и матрицы Адамара, можно вычислять по правилу Сильвестра, используя матрицы Мерсенна вдвое меньшего порядка. Это правило является общим для всех адамаровых матриц и представляется в виде [16]

$$\mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{n/2} & \mathbf{M}_{n/2} \\ \mathbf{M}_{n/2} & -\mathbf{M}_{n/2} \end{pmatrix}.$$

В то же время матрицы Мерсенна связаны с матрицами Эйлера дополнением их строкой и столбцом (каймой) в виде [5]

$$\mathbf{M}_{n+1} = \begin{pmatrix} -\lambda & \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{e} & \mathbf{E}_n^{*} \end{pmatrix},$$

где $\lambda = -a$ — собственное число, а $\mathbf{e}$ — собственный вектор «сопряженной» матрицы

$$\mathbf{E}_n^* = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{n/2} & \mathbf{M}_{n/2} \\ \mathbf{M}_{n/2} & \mathbf{M}_{n/2}^* \end{pmatrix},$$

блок $\mathbf{M}_{n/2}^*$ получается из $\mathbf{M}_{n/2}$ взаимной заменой элементов 1 и $-b$ и пересчетом уровня $b = \dfrac{q-\sqrt{4q}}{q-4}$, где $q = n + 2$ (порядок матрицы Адамара).

Матрицы Адамара являются ограниченно возрастающими по сложности матрицами в том смысле, что для существования их на любом порядке $4t$ достаточно платы в виде потери обоих видов симметрий двумя блоками ее бицикла.

Альтернативная формулировка гипотезы Адамара выглядит следующим образом: нет такой матрицы Адамара, для которой не нашелся бы бицикл Эйлера. Название основы — от основы, получаемой отделением второй каймы.

Матрицы Эйлера похожи на матрицы Адамара — они существуют на четных порядках и также могут быть представлены двумя блоками в виде

$$\mathbf{E}_{2n} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_n \\ \mathbf{B}_n^{\mathrm{T}} & -\mathbf{A}_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Бицикл Эйлера максимально прост по своей конструкции, число положительных элементов в его блоках на единицу превышает число отрицательных, и это важнейший инвариант матриц Адамара после приведения ее к основе удалением парной каймы и замены элементов.

За этой стойкостью стоит несомненный математический факт, что если матрицы Одина сопровождают простые числа и степени простых чисел, то матрицы Эйлера сопровождают все, без исключения, числа $4t - 1$. Для того чтобы не существовало матрицы Эйлера, надо, чтобы целое число не было простым или составным, входящим в эту последовательность. Система целых чисел ограничена в своей сложности всего этими двумя типами, третьего нет, а матрица Эйлера не может то существовать, то не существовать по своему усмотрению. Это минимальное доказательство гипотезы Адамара, построенное на интерпретации принципа сложности [17].

Простые числа неизменно обнаруживаются в любом количестве, что доказано еще в античные времена. Следовательно, число матриц Одина бесконечно. Также бесконечно число матриц Эйлера, безразличных к потере свойства парной симметрии.

Верхняя строка блока **B** антисимметрична, она инвертирована и меняет знак или же она просто симметрична. Это напоминает синусы и косинусы. Неудивительно, что обнаруженные двоякосимметричные матрицы сопровождают порядки, где есть поля Галуа. Ведь функция полей — описывать симметрии. Таким образом, у простых чисел и их степеней есть сопровождающие их матрицы. Причем расчет в сложных полях дает матрицы с тем же узором портрета. Из этого можно сделать вывод, что кососимметрично-симметричного решения за пределами этой области нет. Нет полей, нет расчета, нет матриц.

Таким образом, разбор зависимости симметрий матрицы Одина от порядка показывает, что для $n = 4t - 3$ матрица является симметричной, а для $n = 4t - 1$ матрица остается симметричной или становится кососимметричной.

Заключение

Кососимметричная форма предпочтительна для построения матриц Мерсенна. Но это неполная ее характеристика, поскольку поля связаны не с одинарной, а с парной симметрией. Парносимметрична также и сама бициклическая матрица Эйлера. У матриц Белевича бициклическая основа именуется матрицей тени, под этим имеется в виду, что это структурная тень самих матриц Белевича.

На основе использования принципа сложности можно построить вполне состоятельную теорию ортогональных матриц, поясняющую причины, по которым некоторые матрицы Белевича не найдены и не будут найдены никогда, поскольку сложность узора их портретов возрастает по обоим измерениям.

Матрицы Эйлера существуют на более высоких порядках, чем матрицы тени, и их сложность одномерна — касается только одного измерения, а именно двух верхних строк блоков **A** и **B** бициклических структур. Если строки двоякосимметричны, их находят полями Галуа [18], в противном случае приходится применять более сложные подходы, основанные на конструировании по требованиям дизайна [19].

Финансовая поддержка

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003 «Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга».

Литература

1. **Хвощ С. Т.** Об особенностях реализации помехозащищенного кодирования изображений. *Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения*, 2024, № 4, с. 60–65. EDN: MBZPNF
2. **Чистяков Е. А., Мартынов И. А., Самохина Е. В.** Кодовое разделение каналов. *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*, 2023, т. 192, № 1, с. 27–32.
3. **Chathely B. J.** Hadamard matrix and its application in coding theory and com-binatorial design theory. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 2018, vol. 59, iss. 4, pp. 218–227. doi:10.14445/22315373/IJMTT-V59P532
4. *New Advances in Designs, Codes and Cryptography*. Ch. J. Colbourn, J. H. Dinitz (eds), Stinson66, Toronto, Canada, June 13–17, 2022. Switzerland, Cham, 2022. 425 p. https://doi.org/10.1007/978-3-031-48679-1
5. **Jennifer S., Yamada M.** *Hadamard Matrices: Constructions using Number Theory and Linear Algebra*. Wiley, 2020. 384 p.
6. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** *Специальные матрицы: псевдообратные, ортогональные, адамаровы и критские*: монография. СПб., Политехника, 2019. 196 с. doi:10.25960/7325-1155-0
7. **Goethals J. M., Seidel J. J.** Orthogonal matrices with zero diagonal. *Canadian Journal of Mathematics*, 1967, no. 19, pp. 1001–1010.
8. **Balonin N. A., Jennifer Seberry.** A review and new symmetric conference matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 4, с. 2–7.
9. **Ang M. H., Ma S. L.** Symmetric Weighing matrices constructed using group matrices. *Design, Codes and Cryptography*, 2005, vol. 37, pp. 195–210.
10. **Kravvaritis C., Mitrouli M., Jennifer S.** On the growth problem for skew and symmetric conference matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2005, vol. 403, pp. 183–206.
11. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Расширение гипотезы Райзера на двуциклические структуры и разрешимость матриц Адамара орнаментом в виде бицикла с двойной каймой. *Информационно-управляющие системы,* 2017, № 1, с. 2–10. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
12. **Балонин Н. А., Джокович Д. Ж.** Симметрия двуциклических матриц Адамара и периодические пары Голея. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 3, с. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
13. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Критские матрицы Одина и Тени, сопровождающие простые числа и их степени. *Информационно-управляющие системы,* 2022, № 1, с. 2–7. doi:10.31799/1684-8853-2022-1-2-7
14. **Belevitch V.** Theorem of 2n-terminal networks with application to conference telephony. *Electrical Communications*, 1950, vol. 26, pp. 231–244.
15. **Sergeev A., Sergeev M., Balonin N., Vostrikov A.** Symmetry indices as a key to finding matrices of cyclic structure for noise-immune coding. *Smart Innovation, Systems and Technologies,* 2020, vol. 193, pp. 223–230. doi:10.1007/978-981-15-5925-9_19
16. **Balonin N. A., Vostrikov A. A., Sergeev M. B.** On two predictors of calculable chains of quasi-orthogonal matrices. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015, vol. 49, no. 3, pp. 153–158.
17. **Балонин Н. А., Сергеев А. М.** *Порядок и беспорядок в мире матриц, принцип неограниченно возрастающей сложности*. Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве: сб. тезисов докладов II Международного форума, Санкт-Петербург, 2022, с. 14–17.
18. **Балонин Н. А., Сергеев А. М., Синицына О. А.** Алгоритмы конечных полей и групп поиска ортогональных последовательностей. *Информационно-управляющие системы,* 2021, № 4, с. 2–17. doi:10.31799/1684-8853-2021-4-2-17
19. **Colbourn C. J., Dinitz J. H.** *Handbook of Combinatorial Designs*. Second Ed. Chapman and Hall/CRC, 2007. 967 p.

UDC 519.614
doi:10.31799/1684-8853-2026-1-2-7
EDN: OANKSB

In memory of Professor Nikolai Balonin,
my teacher and co-author

The relationship of bicyclic orthogonal matrices symmetries and their orders

A. M. Sergeev[a], PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-4788-9869, aleks.asklab@gmail.com
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Matrix calculations, being structured and simple, are used in various tasks and technical systems, including cryptographic systems, telecommunication ones, etc. Of particular interest for practical application are orthogonal Hadamard matrices and Belevich conference matrices with various symmetries, the study of which rarely extends to their block structures. **Purpose:** To show the ways of obtaining symmetric matrices of the Hadamard family of bicyclic structures with borders , using symmetry in a broad sense, including skew symmetry and dual symmetry. **Results:** We demonstrate the relationship of symmetries of bicyclic matrices with a border with their orders equal to primes and powers of primes. We also show the ways to obtain them based on symmetric and skew-symmetric blocks, which allow expanding the representation of matrices on these orders and the possibility of their choice for a specific application. **Discussion:** Symmetry in orthogonal matrices is a little-studied phenomenon, especially for block structures of such matrices, although it is essential for their practical matrix applications. It is of interest to study the conditions for the existence of bicyclic orthogonal matrices with a border (double border) consisting of a pair of cyclic blocks – skew-symmetric and symmetric ones.

Keywords — orthogonal matrices, bicyclic matrices, symmetry, skew symmetry, two-fold symmetry.

For citation: Sergeev A. M. The relationship of bicyclic orthogonal matrices symmetries and their orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2026, no. 1, pp. 2–7 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2026-1-2-7, EDN: OANKSB

Financial support

The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. FSRF-2023-0003 “Fundamental principles for constructing interference-resistant systems of space and satellite communications, relative navigation, machine vision and aerospace monitoring”.

References

1. Hvoshch S. T. About the features of the implementation of noise-proof image encoding. *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Tekhnika televideniya*, 2024, no. 4, pp. 60–65 (In Russian). EDN: MBZPNF
2. Chistyakov E. A., Martynov I. A., Samohina E. V. Code division of channels. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIIEM*, 2023, vol. 192, no. 1, pp. 27–32 (In Russian). EDN: OUOJYB
3. Chathely B. J. Hadamard matrix and its application in coding theory and com-binatorial design theory. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 2018, vol. 59, iss. 4, pp. 218–227. doi:10.14445/22315373/IJMTT-V59P532
4. *New Advances in Designs, Codes and Cryptography*. Ch. J. Colbourn, J. H. Dinitz (eds), Stinson66, Toronto, Canada, June 13–17, 2022. Switzerland, Cham, 2022. 425 p. https://doi.org/10.1007/978-3-031-48679-1
5. Jennifer S., Yamada M. *Hadamard Matrices: Constructions using Number Theory and Linear Algebra*. Wiley, 2020. 384 p.
6. Balonin N. A., Sergeev M. B. *Special`ny`e matricy: psevdoobratny`e, ortogonal`ny`e, adamarovy` i kritskie* [Special matrices: pseudo-return, orthogonal, Hadamardian and Cretan]. Saint-Petersburg, Politekhnika Publ., 2019. 196 p. (In Russian) https://doi.org/10.25960/7325-1155-07
7. Goethals J. M., Seidel J. J. Orthogonal matrices with zero diagonal. *Canadian Journal of Mathematics*, 1967, no. 19, pp. 1001–1010.
8. Balonin N. A., Jennifer Seberry. A review and new symmetric conference matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 4, pp. 2–7.
9. Ang M. H., Ma S. L. Symmetric Weighing matrices constructed using group matrices. *Design, Codes and Cryptography*, 2005, vol. 37, pp. 195–210.
10. Kravvaritis C., Mitrouli M., Jennifer S. On the growth problem for skew and symmetric conference matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 2005, vol. 403, pp. 183–206.
11. Balonin N. A., Sergeev M. B. Ryser’s conjecture expansion for bicirculant strictures and Hadamard matrix resolvability by double-border bicycle ornament. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.1.2
12. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Symmetry of two-circulant Hadamard matrices and periodic Golay pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 3, pp. 2–16 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
13. Balonin N. A., Sergeev M. B. Odin and Shadow Cretan matrices accompanying primes and their powers. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2022, no. 1, pp. 2–7 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2022-1-2-7
14. Belevitch V. Theorem of 2n-terminal networks with application to conference telephony. *Electrical Communications*, 1950, vol. 26, pp. 231–244.
15. Sergeev A., Sergeev M., Balonin N., Vostrikov A. Symmetry indices as a key to finding matrices of cyclic structure for noise-immune coding. *Smart Innovation, Systems and Technologies*, 2020, vol. 193, pp. 223–230. doi:10.1007/978-981-15-5925-9_19
16. Balonin N. A., Vostrikov A. A., Sergeev M. B. On two predictors of calculable chains of quasi-orthogonal matrices. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015, vol. 49, no. 3, pp. 153–158.
17. Balonin N. A., Sergeev A. M. Order and disorder in the world of matrices, the principle of infinitely increasing complexity. *Trudy II Mezhdunarodnogo Foruma “Matematicheskie metody i modeli v vysokotekhnologichnom proizvodstve”* [Proc. II International Forum “Mathematical methods and models in high-tech production”]. Saint-Petersburg, 2022, pp. 14–17 (In Russian).
18. Balonin N. A., Sergeev A. M., Sinitsyna O. I. Finite field and group algorithms for orthogonal sequence search. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2021, no. 4, pp. 2–17 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2021-4-2-17
19. Colbourn C. J., Dinitz J. H. *Handbook of Combinatorial Designs*. Second Ed. Chapman and Hall/CRC, 2007. 967 p.