УДК 681.5
doi:10.15217/issn1684-8853.2017.6.9

АНАЛИЗ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ МЕТОДОМ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ

А. Ю. Кучмин[а]***,*** *канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник*
[а]*Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, РФ*

Введение: *современные тенденции при решении задач условной оптимизации заключаются в эффективном применении методов, использующих анализ ограничений и построение области допустимых решений. Ограничения в большинстве случаев аппроксимируют кусочно-полиномиальными моделями и моделями в виде рациональных дробей.* ***Цель исследования:*** *разработка новых методов и алгоритмов анализа кусочно-полиномиальных ограничений для метода многомерных оболочек.* ***Результаты:*** *предложен метод разбиения систем кусочно-полиномиальных ограничений и ограничений в виде рациональных дробей на группы систем линейных ограничений с использованием дерева решений. Это позволяет свести исходную задачу к набору взаимосвязанных подзадач с линейными ограничениями, формирующими выпуклые многомерные оболочки, что существенно облегчает нахождение экстремумов. Эффективность метода подтверждена расчетом законов управления контррефлектором радиотелескопа.* ***Практическая значимость:*** *предложенный метод может быть использован для решения задач условной оптимизации с произвольными ограничениями и целевыми функциями в виде метрик, позволяющими полиномиальные аппроксимации и аппроксимации в виде рациональных дробей.*

Ключевые слова *— нелинейное программирование, многопараметрическая оптимизация, полиномы, рациональные дроби.*

Введение

В предыдущей статье [1] был подробно описан метод нелинейного программирования — метод многомерных оболочек, который использует как необходимые, так и достаточные условия оптимальности для целевых функций, имеющих вид метрик. Показано, что если единственный минимум (максимум) метрики находится вне области допустимых значений, образованной ограничениями, то решение задачи будет находиться на границе области допустимых решений. Тогда задача может иметь несколько решений, которые будут соответствовать одинаковым минимальным (максимальным) значениям целевой функции, и все эти решения могут быть получены методом многомерных оболочек. Основой этого метода является построение области допустимых решений путем анализа ограничений произвольного вида и их аппроксимации кусочно-полиномиальными ограничениями или рациональными дробями, что позволяет свести исходную задачу к набору взаимосвязанных подзадач с линейными ограничениями [2, 3], формирующими выпуклые многомерные оболочки, что существенно сужает область поиска.

Настоящая статья посвящена анализу полиномиальных ограничений и ограничений в виде рациональных дробей с использованием метода дерева решений, позволяющего свести подобные ограничения к эквивалентным системам линейных неравенств, равенств и систем уравнений, описывающих особые точки рациональных дробей, которые соответствуют корням их знаменателей.

Анализ полиномиальных ограничений типа равенство

Рассмотрим случай систем ограничений треугольного вида

$$\begin{cases} v_1^{m_1} + \varphi_1(v_1, v_2, \ldots, v_k) = 0 \\ v_2^{m_2} + \varphi_2(v_2, v_3, \ldots, v_k) = 0 \\ \ldots \\ v_k^{m_k} + \varphi_k(v_k) = 0 \end{cases};$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{T_v x} + \mathbf{B_v}, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_k]^{\mathrm{T}}, \ k \le n, \qquad (1)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ — степени соответствующих переменных; k — количество уравнений; φ_i — полиномы от переменных $v_i, \ldots, v_k$, причем показатели при переменной v_i в многочлене φ_i меньше, чем m_i; $\mathbf{T_v}$, $\mathbf{B_v}$ — матрицы параметров; n — размерность вектора $\mathbf{x}$.

Наиболее простой способ разбиения системы исходных ограничений может быть выполнен с помощью метода деревьев решений [4], который применимо к (1) используется следующим образом.

Слою 1 дерева соответствует уравнение k в (1), в которое входит только v_k. Используя алгоритмы из работы [5], находим корни полинома одной переменной уравнения k. Каждому узлу слоя соответствует вещественный корень λ_{i_1} полинома уравнения k.

Слой 2 соответствует уравнению $k-1$ в (1). Выбирается родительский узел в слое 1, и связанный с ним корень подставляется в уравнение

$k-1$, которое после замены станет зависеть от переменной v_{k-1}. Аналогично слою 1 рассчитываются вещественные корни $\lambda_{i_1,\, i_2}$ для полученного уравнения $k-1$ одной переменной. Эта процедура выполняется для всех родительских узлов. Все вещественные корни $\lambda_{i_1,\, i_2}$ являются узлами слоя 2, и будут родительскими для следующего слоя, и должны быть подставлены в следующее уравнение.

Построение дерева будет происходить до слоя k включительно. Число индексов узла равно номеру слоя. Номер текущего узла составляется из номера родительского узла и порядкового номера потомка. Если рост дерева завершился раньше слоя k, то это означает, что система ограничений несовместна.

Число эквивалентных систем линейных ограничений типа равенство, на которые разбиваются исходные уравнения (1), равно числу узлов в слое k. Эти системы формируются по номеру узла $\lambda_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{k-1},\, i_k}$ в слое k следующим образом:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{k-1},\, i_k} \\ \lambda_{i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_{k-1}} \\ \vdots \\ \lambda_{i_1,\, i_2} \\ \lambda_{i_1} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

где i_1, i_2, ..., i_{k-1}, i_k — соответствующие индексы узлов в каждом слое.

Анализ систем полиномиальных ограничений типа неравенство диагонального вида

Диагональными будем называть системы полиномиальных неравенств, которые путем линейной замены сводятся к виду

$$\begin{cases} a_1 v_1^{m_1} + \varphi_1(v_1) \le 0 \\ a_2 v_2^{m_2} + \varphi_2(v_2) \le 0 \\ \ldots \\ a_k v_k^{m_k} + \varphi_k(v_k) \le 0 \end{cases};$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{T_v x} + \mathbf{B_v}, \mathbf{v} = \left[v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_k\right]^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

где каждое неравенство зависит только от одной переменной v_i, а a_i — константы, которые принимают значения либо –1, либо 1 и определяют знак первого слагаемого в неравенстве с номером i.

По аналогии с ограничениями типа равенство разбиение системы исходных ограничений может быть выполнено с помощью метода деревьев решений. Каждое неравенство может анализироваться отдельно, для него строится собственное дерево следующим образом.

1. Необходимо найти вещественные корни $\lambda_{i,j}$ полинома $v_i^{m_i} + \varphi_i(v_i)/a_i$, i — номер неравенства, j — номер вещественного корня полинома. Если вещественные корни отсутствуют, то необходимо проанализировать ограничение на непротиворечивость, рассмотрев знак a_i. Так, при $a_i = -1$ неравенство справедливо при любых $\mathbf{x}$, и его можно исключить, а при $a_i = 1$ задача не имеет решения.

2. Построить произведение линейных сомножителей, которые образованы только вещественными корнями: $a_i \prod_{j=1}^{p} \left(v_i - \lambda_{i,j}\right) \le 0$, где p — число вещественных корней. Каждым сомножителем связать переменную u_j, которая может принимать значение 1 при $v_i - \lambda_{i,j} \ge 0$ и значение, равное –1, при $v_i - \lambda_{i,j} \le 0$. Для вершины дерева введем переменную $u_0 = a_i$. Таким образом, дерево имеет вид бинарного: одна ветвь определяет отрицательный переход, а другая — положительный. В узлах дерева будем хранить произведения соответствующих u_j. Нумерация узлов сквозная, по уровням слева направо. Построение дерева выполняется до уровня $p+1$ включительно.

3. В уровне $p+1$ выбираются узлы с отрицательными значениями. По номеру выбранного узла строится система линейных неравенств, для чего номер узла представляется в бинарном виде, удаляется старшая единица. Номер символа в бинарном коде j соответствует номеру линейного слагаемого $v_i - \lambda_{i,j}$, нулю соответствует неравенство $v_i - \lambda_{i,j} \le 0$, а единице — слагаемое $-v_i + \lambda_{i,j} \le 0$.

Анализ систем полиномиальных ограничений типа неравенство произвольного вида

В общем случае анализ подобных ограничений является сложной задачей, рассмотренной в работах [5–8]. Следует отметить три основных подхода.

1. Разложение полиномов многих переменных на простые сомножители:

$$\begin{cases} a_1 \prod_i \prod_j \left(v_i - \lambda_{1,i,j}\right) \le 0 \\ a_2 \prod_i \prod_j \left(v_i - \lambda_{2,i,j}\right) \le 0 \\ \ldots \\ a_s \prod_i \prod_j \left(v_i - \lambda_{s,i,j}\right) \le 0 \end{cases};$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{T_v x} + \mathbf{B_v}, \mathbf{v} = \left[v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_k\right]^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

2. Переход от систем неравенств к системам уравнений путем введения дополнительных переменных [9]:

$$\begin{cases} a_1\varphi_1(v_1, v_2, \ldots, v_k) - v_{k+1} = 0 \\ a_2\varphi_2(v_1, v_2, \ldots, v_k) - v_{k+2} = 0 \\ \ldots \\ a_k\varphi_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) - v_{2k} = 0 \\ -v_{k+1} \le 0 \\ \ldots \\ -v_{2k} \le 0 \end{cases};$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{T_v x} + \mathbf{B_v}, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_{2k}]^{\mathrm{T}}. \quad (5)$$

3. Применение методов интервального анализа. Данный подход удобно применять для систем ограничений треугольного вида степени не более 4:

$$\begin{cases} a_1 v_1^{m_1} + \varphi_1(v_1, v_2, \ldots, v_k) \le 0 \\ a_2 v_2^{m_2} + \varphi_2(v_2, v_3, \ldots, v_k) \le 0 \\ \ldots \\ a_k v_k^{m_k} + \varphi_k(v_k) \le 0 \end{cases};$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{T_v x} + \mathbf{B_v}, \mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_k]^{\mathrm{T}},\ m_i \le 4. \quad (6)$$

По аналогии с системами уравнений треугольного вида система (6) решается, начиная с неравенства номер k, для этого необходимо найти корни полинома не старше степени 4, что может быть выполнено по методу Феррари. В общем виде полиномиальное уравнение для v_k имеет вид

$$v_k^4 + av_k^3 + bv_k^2 + cv_k + d = 0,$$
$$a = \frac{a_{k,2}}{a_{k,1}},\ b = \frac{a_{k,3}}{a_{k,1}},\ c = \frac{a_{k,4}}{a_{k,1}},\ d = \frac{a_{k,5}}{a_{k,1}}, \quad (7)$$

где $a_{k,i}$ — коэффициенты исходного полинома. По методу Феррари он сводится к решению кубического уравнения

$$y^3 + b_1 y^2 + b_2 y + b_3 = 0,$$
$$b_1 = -b,\ b_2 = ac - 4d,\ b_3 = -a^2 d + 4bd - c^2. \quad (8)$$

С помощью формулы Кардано определяем вещественный корень

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad (9)$$

где $p = -\frac{b_1^2}{3} + b_2$; $q = \frac{2b_1^3}{27} - \frac{b_1 b_2}{3} + b_3$. Значения кубических корней следует брать такими, чтобы их произведение было равно $-\frac{p}{3}$. В итоге находим корни (8), учтя замену $y_0 = z - \frac{b_1}{3}$. Затем решаются два квадратных уравнения

$$v_k^2 + \frac{a}{2}v_k + \frac{y_0}{2} \pm$$
$$\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b + y_0\right)v_k^2 + \left(\frac{a}{2}y_0 - c\right)v_k + \frac{y_0^2}{4} - d} = 0, \quad (10)$$

в которых подкоренное выражение является полным квадратом:

$$v_k^2 + \frac{a}{2}v_k + \frac{y_0}{2} \pm \left(v_k - \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0}\right) = 0. \quad (11)$$

Корнями (7) будут корни

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a+2}{4} \pm$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} - \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0}\right)};$$
$$\lambda_{3,4} = -\frac{a-2}{4} \pm$$
$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} + \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0}\right)}. \quad (12)$$

Условия вещественности корней:

— для $\lambda_{1,2}$

$$\left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} - \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0}\right) \ge 0;$$

— для $\lambda_{3,4}$

$$\left(\frac{a}{2} - 1\right)^2 - 4\left(\frac{y_0}{2} + \frac{2c - ay_0}{a^2 - 4b + 4y_0}\right) \ge 0. \quad (13)$$

Выражения (7)–(13) дают возможность получить границы изменения вещественных корней с использованием интервальной арифметики в случае, когда параметры в (5) являются интервалами:

$$v_k^4 + av_k^3 + bv_k^2 + cv_k + d = 0,$$
$$a_{\min} \le a \le a_{\max},\ b_{\min} \le b \le b_{\max},$$
$$c_{\min} \le c \le c_{\max},\ d_{\min} \le d \le d_{\max}. \quad (14)$$

Каждый из описанных подходов для произвольного вида полиномиальных ограничений является трудоемким, в методе многомерных оболочек используется полиномиальное приближение произвольных ограничений, и поэтому изначально удобно искать их аппроксимации в виде (4), для чего обобщим процедуру из предыдущего раздела.

1. Необходимо найти слагаемые с вещественными корнями $\lambda_{s,i,j}$, где s — номер неравенства; i — номер переменной v; j — номер вещественного корня полинома. Если вещественные корни отсутствуют, то необходимо проанализировать ограничение на непротиворечивость, рассмотрев знак a_s. Так, при $a_s = -1$ неравенство справедливо при любых $\mathbf{x}$, и его можно исключить, а при $a_i = 1$ задача не имеет решения.

2. Построить произведение линейных сомножителей, которые образованы только вещественными корнями: $a_s \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{p_i}\left(v_i - \lambda_{s,i,j}\right) \le 0$, где p_i — число вещественных корней для переменной v_i. Каждым сомножителем связать переменную u_j, которая может принимать значение 1 при $v_i - \lambda_{i,j} \ge 0$ и значение, равное -1, при $v_i - \lambda_{i,j} \le 0$. Для вершины дерева введем переменную $u_0 = a_i$. Таким образом, дерево имеет вид бинарного: одна ветвь определяет отрицательный переход, а другая — положительный. В узлах дерева будем хранить произведения соответствующих u_j. Нумерация узлов сквозная, по уровням слева направо. Построение дерева выполняется до уровня $\sum_{i=1}^{k} p_i + 1$ включительно.

3. На уровне $\sum_{i=1}^{k} p_i + 1$ выбираются узлы с отрицательными значениями. По номеру выбранного узла строится система линейных неравенств, для этого номер узла представляется в бинарном виде, удаляется старшая единица. Номер символа в бинарном коде m соответствует номеру линейного слагаемого $v_i - \lambda_{s,i,j}$, нулю соответствует неравенство $v_i - \lambda_{s,i,j} \le 0$, а единице — слагаемое $-v_i + \lambda_{s,i,j} \le 0$.

Анализ систем ограничений типа неравенство, заданных в виде рациональных дробей

Рассмотрим случай ограничений с разрывами в особых точках. Одним из вариантов таких ограничений являются рациональные дроби. Случай систем подобных уравнений сводится к задаче решения систем полиномиальных уравнений, в результате которого находятся списки корней числителя и знаменателя, которые можно сформировать в системы линейных уравнений, как в первом разделе, и систем неравенств, которые определяют особые области.

Как и в предыдущем случае, аппроксимацию произвольных ограничений удобно искать в виде

$$\begin{cases} a_1 \dfrac{\prod_i \prod_j \left(v_i - \lambda_{1,i,j}\right)}{\prod_i \prod_l \left(v_i - \lambda_{1,i,l}\right)} \le 0 \\ a_2 \dfrac{\prod_i \prod_j \left(v_i - \lambda_{2,i,j}\right)}{\prod_i \prod_l \left(v_i - \lambda_{2,i,l}\right)} \le 0 \\ \ldots \\ a_s \dfrac{\prod_i \prod_j \left(v_i - \lambda_{s,i,j}\right)}{\prod_i \prod_l \left(v_i - \lambda_{s,i,l}\right)} \le 0 \end{cases};$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{T_v x} + \mathbf{B_v}, \mathbf{v} = \left[v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_k\right]^{\mathrm{T}}. \qquad (15)$$

Для этого случая можно изменить процедуру из предыдущего раздела.

1. Необходимо найти слагаемые с вещественными корнями $\lambda_{s,i,j}$ и $\lambda_{s,i,l}$, где s — номер неравенства, i — номер переменной v, j — номер вещественного корня полинома числителя, l — номер вещественного корня полинома знаменателя. Если вещественные корни отсутствуют, то необходимо проанализировать ограничение на непротиворечивость, рассмотрев знак a_s. Так, при $a_s = -1$ неравенство справедливо при любых $\mathbf{x}$, и его можно исключить, а при $a_i = 1$ задача не имеет решения.

2. Построить дробь из линейных слагаемых, которые образованы только вещественными корнями: $a_s \dfrac{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n_i}\left(v_i - \lambda_{s,i,j}\right)}{\prod_{i=1}^{k}\prod_{l=1}^{d_i}\left(v_i - \lambda_{s,i,l}\right)} \le 0$, где n_i — число вещественных корней числителя для переменной v_i; d_i — число вещественных корней знаменателя для переменной v_i. С каждым сомножителем числителя и знаменателя нужно связать переменную u_j, которая может принимать значение 1 при $v_i - \lambda_{i,j} \ge 0$ и значение, равное -1, при $v_i - \lambda_{i,j} \le 0$. Для вершины дерева введем переменную $u_0 = a_i$. Таким образом, дерево имеет вид бинарного: одна ветвь определяет отрицательный переход, а другая — положительный. В узлах дерева будем хранить произведения соответствующих u_j. Нумерация узлов сквозная, по уровням слева направо. Построение дерева выполняется до уровня $\sum_{i=1}^{k}\left(n_i + d_i\right) + 1$ включительно.

3. На уровне $\sum_{i=1}^{k}\left(n_i + d_i\right) + 1$ выбираются узлы с отрицательными значениями. По номеру вы-

бранного узла строится система линейных неравенств, для этого номер узла представляется в бинарном виде, удаляется старшая единица. Номер символа в бинарном коде m соответствует номеру линейного слагаемого $v_i - \lambda_{s,i,j}$ или $v_i - \lambda_{s,i,l}$, нулю соответствует неравенство $v_i - \lambda_{s,i,j} \le 0$ или $v_i - \lambda_{s,i,l} \le 0$, а единице — слагаемое $-v_i + \lambda_{s,i,j} \le 0$ или $-v_i + \lambda_{s,i,l} \le 0$.

4. Вещественные корни знаменателя формируют особые области $v_i - \lambda_{s,i,l} = 0$, которые удобно представить в виде двух строгих неравенств, формирующих разбиение на несколько независимых областей:

$$v_i - \lambda_{s,i,l} < 0,\ \ v_i - \lambda_{s,i,l} > 0. \qquad (16)$$

Точки особых областей также должны быть проверены как кандидаты на оптимальные решения. Для вычислительных процедур удобнее использовать при заданной точности вычислений аналог выражению

$$v_i - \lambda_{s,i,l} + \varepsilon \le 0,\ \ v_i - \lambda_{s,i,l} - \varepsilon \ge 0, \qquad (17)$$

где ε — погрешность расчетов.

Нахождение оптимальной траектории исполнительного механизма контррефлектора радиотелескопа

В качестве примера использования метода многомерных оболочек покажем, как задача нелинейной оптимизации может быть сведена к последовательности задач линейного программирования при численном расчете. Задача управления исполнительным механизмом контррефлектора радиотелескопа была подробно описана в работе [10]:

$$J = \min_{x_1}\{x_1\} \qquad (18)$$

при ограничениях

1) $x_1 > k_1 T_h$;

2) $g_i(x_1) > \dfrac{k_2}{T_h}$;

3) $\mu_i(x_1) > 0$;

4) $\mu_i(x_1) - \mu_i(x_1)\ln\mu_i(x_1) - \sigma_i < 0$;

5) $-v_i^{\max} <$

$$< \frac{-a_i}{T_h - \dfrac{1}{g_i(x_1)}}\left(e^{\frac{-h_i(x_1)}{T_h}} - e^{-h_i(x_1)g_i(x_1)}\right) < v_i^{\max};$$

6) $-\lambda_i^{\max} < \dfrac{-a_i}{T_h} g_i(x_1) < \lambda_i^{\max}$,

где x_1 — время переходного процесса; k_1, k_2, T_h, a_i — постоянные параметры; $v_i^{\max}$, $\lambda_i^{\max}$ — максимальные значения скоростей и ускорений соответственно;

$$\mu_i = \frac{\operatorname{sign}(a_i)\delta_i}{a_i x_1} - \frac{T_h}{x_1} e^{\frac{-x_1}{T_h}}, \qquad \sigma_i = \frac{\operatorname{sign}(a_i)\delta_i}{a_i},$$

$$\frac{\sigma_i}{\mu_i(x_1)x_1} + \frac{1}{x_1} f^{-1}\left(-\frac{1}{\mu_i(x_1)} e^{-\frac{\sigma_i}{\mu_i(x_1)}}\right) = g_i(x_1),$$

$$\frac{1}{\dfrac{1}{T_h} - g_i(x_1)} \ln\left(\frac{1}{T_h g_i(x_1)}\right) = h_i(x_1);$$ δ_i — ошибка управления; f^{-1} — функция Ламберта.

Ограничения в (18) могут быть аппроксимированы на интервале $0 \le x_1 \le k_1 T_h$ дробями, показатели полиномов числителей и знаменателей которых не превышают 4. Тогда, исходя из рассмотренного выше материала, можно представить подобного вида ограничения эквивалентными системами линейных неравенств и равенств от одной переменной x_1. Такая задача может быть описана как интервальная и приводит к нахождению верхней и нижней оценок для x_1. Решением задачи максимального быстродействия будет нижняя оценка для x_1.

Заключение

Рассмотрены вопросы анализа ограничений для решения современных задач условной оптимизации. Разработаны алгоритмы для анализа кусочно-полиномиальных ограничений и ограничений в виде рациональных дробей для метода многомерных оболочек [1] с использованием метода деревьев решений. Это позволяет свести системы полиномиальных ограничений или ограничений в виде рациональных дробей к эквивалентным системам линейных равенств и неравенств. Показано, что данный подход эффективен при расчете траекторий движения исполнительного механизма контррефлектора радиотелескопа, так как они сводятся к интервальным задачам от одной переменной, а именно времени переходного процесса. Подобные алгоритмы позволяют с применением простых минимаксных процедур найти решение задачи либо убедиться, что при данных исходных значениях параметров задача не имеет решения.

Литература

1. **Кучмин А. Ю.** Об одном методе нелинейного программирования с произвольными ограничениями // Информационно-управляющие системы. 2016. № 2. С. 2–10. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.2.2
2. **Motzkin T., Raiffa H., Thompson G., Thrall R. M.** The Double Description Method // Contributions to the Theory of Games. — Princeton: Princeton University Press, 1953. — Pp. 51–73.
3. **Шевченко В. Н., Груздев Д. В.** Модификация алгоритма Фурье — Моцкина для построения триангуляции // Дискретный анализ и исследование операций. 2003. Т. 10. № 1. С. 53–64.
4. **Lantz Brett.** Machine Learning with R. 2nd ed. — Packt Publishing, 2015. — 454 p.
5. **Бухбергер Б.** и др. Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления / пер. с англ.; под ред. Б. Бухбергера, Дж. Коллинза, Р. Лооса. — М.: Мир, 1986. — 392 с.
6. **Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.** Компьютерная алгебра. — М.: Мир, 1991. — 352 с.
7. **Кокс Д., Литлл Дж., О'Ши Д.** Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры/пер. с англ. — М.: Мир, 2000. — 687 с.
8. **Перминова М. Ю., Кручинин В. В., Кручинин Д. В.** Алгоритм декомпозиции полиномов, основанный на разбиениях // Докл. ТУСУР. 2015. № 4 (38). С. 102–107.
9. **Зангвилл У. И.** Нелинейное программирование. Единый подход / пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1973. — 312 с.
10. **Артеменко Ю. Н., Агапов В. А., Дубаренко В. В., Кучмин А. Ю.** Групповое управление актуаторами контррефлектора радиотелескопа // Информационно-управляющие системы. 2012. № 4. С. 2–9.

UDC 681.5
doi:10.15217/issn1684-8853.2017.6.9

Analysis of Polynomial Restrictions using Decision Tree Method

Kuchmin A. Yu.[a], PhD, Tech., Senior Researcher, radiotelescope@yandex.ru
[a]Institute of Problems of Mechanical Engineering of RAS, 61, Bol'shoi Pr. V. O., 199178, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The current trend in solving conditional optimization problems is to effectively use the analysis of restrictions in order to create an area of admissible decisions. The restrictions are usually approximated piecewise by polynomial or rational fraction models. **Purpose:** The method of multidimensional covers needs new methods and algorithms to be developed for the analysis of piecewise and polynomial restrictions. **Results:** A method is proposed for the analysis of piecewise and polynomial restrictions as well as restrictions in the form of rational fractions. Their systems are decomposed into groups of linear restriction systems using a tree of decisions. This reduces the initial problem to a set of interconnected subproblems with linear restrictions forming convex multidimensional covers. This considerably facilitates finding the extrema. The efficiency of the method is confirmed by the calculation of radio telescope counter-reflector control rules. **Practical relevance:** The proposed method can be used to solve problems of conditional optimization with random restrictions and criterion functions in the form of metrics which enable polynomial approximations and approximations in the form of rational fractions.

Keywords — Nonlinear Programming, Multiple Parameter Optimization, Polynoms, Rational Fractions.

References

1. Kuchmin A. Yu. A Nonlinear Programming Method with Arbitrary Restrictions. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2016, no. 2, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.2.2
2. Motzkin T., Raiffa H., Thompson G., Thrall R. M. The Double Description Method. In: *Contributions to the Theory of Games*. Princeton, Princeton University Press, 1953. Pp. 51–73.
3. Shevchenko V. N., Gruzdev D. V. Modification of Algorithm of Fourier — Motzkin for Creation of a Triangulation. *Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii*, 2003, vol. 10, no. 1, pp. 53–64 (In Russian).
4. Lantz Brett. *Machine Learning with R*. 2nd ed. Packt Publishing, 2015. 454 p.
5. *Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation*. Ed. by B. Buchberger, G. Collins, R. Loos. Wien, New York, Springer-Verlag, 1983. 291 p.
6. Davenport J., Siret Y., Tournier E. *Computer Algebra: Systems and Algorithms for Agebraic Computation*. 2nd ed. London, Academic Press, 1993. 313 p.
7. Cox D., Little J., O'Shea D. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. 2nd ed. Springer, 2006. 551 p.
8. Perminova M. Yu., Kruchinin V. V., Kruchinin D. V. Algorithm for Decomposition of Polynomials Based on Partitions. *Doklady TUSUR*, 2015, no. 4 (38), pp. 102–107 (In Russian).
9. Zangwill W. I. *Nonlinear Programming. A Unified Approach*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall, 1969. 312 p.
10. Artemenko Yu. N., Agapov V. A., Dubarenko V. V., Kuchmin A. Yu. Co-operative Control of Subdish Actuators of Radio-Telescope. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2012, no. 4, pp. 2–9 (In Russian).