УДК 519.715:614
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.3.34

ФИНИТНЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ В СПОРТЕ

Н. А. Балонин[а], *доктор техн. наук, профессор*
М. Б. Сергеев[а], *доктор техн. наук, профессор*
В. С. Суздаль[б], *доктор техн. наук, профессор*
[а]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*
[б]*Харьковский институт сцинцилляционных материалов НАН Украины, Харьков, Украина*

Введение: *классическая теория линейных динамических систем в значительной степени ориентирована на бесконечный или полубесконечный интервал времени. Это касается аппарата частотных характеристик, преобразования Лапласа, анализа устойчивости и других областей, где получено много полезных результатов. Однако на практике такой подход применим лишь для динамических систем, время работы которых значительно больше длительности переходных процессов. Вместе с тем реальные системы часто работают на конечных интервалах времени, соизмеримых со временем переходных процессов системы. К таким системам относятся и динамические процессы в спорте.* ***Цель:*** *показать эффективность применения в спорте моделей, основанных на дискретных частотных характеристиках линейных динамических систем финитного времени на примере элементарных звеньев первого и второго порядков.* ***Результаты:*** *показано, что дискретные частотные характеристики, в отличие от непрерывных, учитывают протяженность интервала времени движения спортсмена. Приведено определение дискретных частотных характеристик линейных динамических систем финитного времени. Описана математическая модель двойного интегратора в сравнении с графиком подъема тяжелого спортивного снаряда — штанги. Показано, что точки дискретных частотных характеристик располагаются на амплитудных частотных характеристиках звеньев.* ***Практическое значение:*** *дискретные частотные характеристики дополняют классические непрерывные, согласуются с ними по амплитудам и выступают как уточняющие, учитывающие важный для практики фактор — конечное время протекания процессов. Разработано соответствующее программное обеспечение для математической сети Интернет.*

Ключевые слова *— динамические системы, финитные системы, частотные характеристики, непрерывный спектр, дискретный спектр, элементарные динамические звенья.*

Введение

Модели динамических процессов в спорте предполагают интенсивное движение спортсмена и спортивного снаряда, когда учет резонанса такой системы приносит существенный выигрыш [1]. Для анализа резонансных свойств моделей динамических процессов в спорте не применимы классические частотные характеристики (их определение использует бесконечный интервал времени) и сходные модели теории управления [2, 3] в силу кратковременности фиксируемых фрагментов движения спортсмена. Также затруднено использование в данной сфере и математических методов аналитической механики из-за их сложности. Более продуктивным в исследовании динамических процессов в спорте может быть использование дискретных частотных характеристик [4, 5] элементарных звеньев — некоторого аналога дискретных частотных характеристик, ограниченных по времени протекания сигналов, но описывающего при этом систему.

Дискретные частотные характеристики систем

В период становления теории управления [6] большое внимание отводилось графическим методам анализа систем, не использующим компьютер. Линейной динамической системе ставилась в соответствие логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ), которая строилась с помощью карандаша и линейки [6, 7], что не является компьютерным методом [8].

Линейная динамическая система описывается [2, 3] передаточной функцией $Q(p)$, линейным дифференциальным уравнением или интегральным уравнением свертки

$$y(t) = Qu(t) = \int_0^t q(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad (1)$$

где $q(t)$ — импульсная весовая функция системы; $u(t)$, $y(t)$ — входной и выходной сигналы, рассматриваемые на конечном отрезке времени $0 \le t \le T$.

Интегральное представление (1) удобнее прочих в том отношении, что при замене интеграла суммой линейной динамической непрерывной системе ставится в соответствие некоторое ее матричное приближение $\mathbf{y} = \mathbf{Qu}$, где $\mathbf{Q}$ — теплицева матрица линейного оператора свертки (матрица теплицева оператора), теперь уже дискретной системы.

В частности, $\mathbf{Q}(i,\ j) = q(t-\tau)\Delta$ при $i \le j$, $t = \Delta i$, $\tau = \Delta j$, Δ — шаг дискретизации по времени. У всех каузальных (причинных) систем верхний правый треугольник коэффициентов матрицы нулевой, так как реакция не может предшествовать воздействию. Уже на первых компьютерах появилась возможность расчета реакции динамической системы не решением дифференциального уравнения, а расчетом через матричное приближение.

Некоторое время еще учитывалось, что матрица размером 100×100 содержит 10 000 элементов, и переход к не матричным моделям казался предпочтительным. Сегодня такие размеры матриц не являются препятствием даже для настольных компьютеров, и отношение к матричным моделям в самой теории управления нужно менять. Матричная модель имеет заметное преимущество простоты не только для расчета реакций. Например, спектр динамической системы, действующей ограниченное время, можно рассчитать через тривиальные процедуры анализа собственных значений и собственных векторов матрицы.

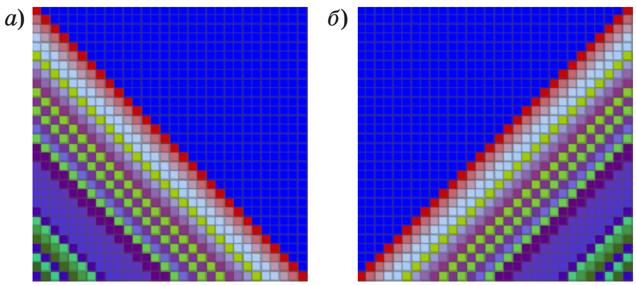
Как оказалось, такой спектр размещается точками на непрерывной частотной характеристике, он назван дискретной частотной характеристикой (ДЧХ) [4, 5].

Для моделирования в спорте важно то, что максимальные собственные значения матрицы финитной динамической модели играют роль резонансов — пиков частотной характеристики, а собственные векторы или функции (у непрерывной модели) — оптимальных сигналов, с помощью которых осуществляются движения.

Матричные операторы

Теплицева матрица $\mathbf{Q}$ связана с ганкелевыми матрицами $\mathbf{H}_1 = \mathbf{QF}$ или $\mathbf{H}_2 = \mathbf{FQ}$, где $\mathbf{F}$ — реверсная единичная матрица (флип-матрица). Пара $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{H}_1 = \mathbf{QF}$ изображена на рис. 1, *а* и *б*. Одинаковые значения элементов представлены одинаковым цветом клеток.

Ганкелева матрица (в отличие от связанной с ней теплицевой) симметрична. Следовательно, собственные значения ее вещественны, а собственные векторы ортогональны. Весь ход наших упражнений описывает реверс вектора управления системы $\mathbf{y} = \mathbf{Qu}$, $\mathbf{u} = \mathbf{Fu}^*$ (договоримся вектор с реверсным порядком элементов помечать $\mathbf{u}^*$). В итоге реверса мы получаем вместо исходной линейную систему с ганкелевым оператором $\mathbf{y} = \mathbf{Hu}^*$, $\mathbf{H} = \mathbf{QF}$.



■ ***Рис. 1.*** Матрицы теплицева $\mathbf{Q}$ (*а*) и ганкелева $\mathbf{H}_1$ (*б*)

Собственная функция [4, 5] дополняет классические импульсную весовую или переходную функции, отражая специфику финитного времени.

Определение 1 (собственная функция). Не искажаемый системой $y(t) = \lambda u^*(t)$ входной сигнал $u^*(t) = u(T - t)$, где T — интервал времени, назовем *собственной функцией* $f(t)$ линейной динамической системы.

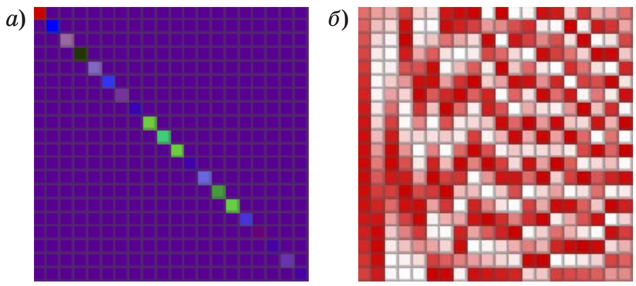
Определение 2 (собственное значение). Коэффициент усиления λ сигнала в виде собственной функции назовем *собственным значением* линейной динамической системы.

ДЧХ элементарных динамических звеньев

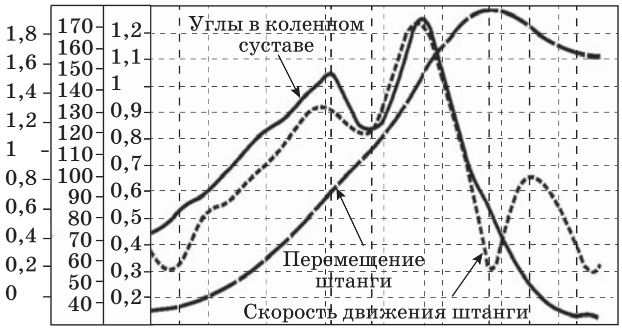
В теории управления большое значение имеют амплитудные частотные характеристики (АЧХ) элементарных звеньев: интегратора, двойного интегратора, апериодического звена, колебательного звена, динамического звена второго порядка. Хотя ДЧХ расположена на АЧХ [2, 4], распределение точек ДЧХ (в отличие от моделей теории сигналов) неравномерно и отражает индивидуальные свойства, зависящие от параметров звена. С уменьшением интервала времени, например, все длящиеся продолжительное время собственные движения объекта перестают быть интересными, и для разных звеньев начинает доминировать модель в виде интегратора или двойного интегратора (модель упрощается).

В качестве примера на рис. 2, *а* и *б* приведены диагональная матрица собственных значений и матрица собственных векторов ганкелева оператора. Значения элементов собственных векторов отражены здесь цветом и степенью насыщенности цветов в столбцах.

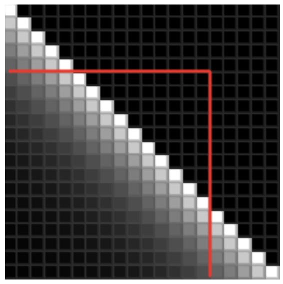
Максимальным собственным числам соответствуют низкочастотные составляющие, что хорошо видно на рис. 3 [1]. Главная собственная функция одинарного интегратора — четверть синусоиды. Главная собственная функция двойного интегратора $Q(p) = \dfrac{1}{p^2}$ (например, штанга)



■ ***Рис. 2.*** Матрицы собственных чисел (*а*) и собственных векторов (*б*)



■ *Рис. 3.* Графики, отражающие процесс подъема штанги



■ *Рис. 4.* Линейный оператор разнесенного времени

аппроксимируется выражением [4, 5] $f(t) = 1 - \cos(\omega t)$, $\omega = 0{,}6\pi/T$. По форме этот сигнал — почти острый треугольник.

Графики на рис. 3 соответствуют процессу подъема штанги спортсменом.

Время подъема штанги ограничено. Обратим внимание, что график перемещения штанги не случайный и оптимизируется спортсменом в процессе выработки спортивного движения. Он отвечает главной собственной функции двойного интегратора, приведенной выше. Мы полагаем, что это совпадение не случайное, поскольку ДЧХ описывает специфический резонанс.

Разделенные интервалы времени

В случае несовпадения интервалов времени управления и наблюдения модель в принципе остается матричной и линейной. На рис. 4 матрица линейной динамической системы разделена так, что на последние отсчеты выходного сигнала (граница сверху) действуют только начальные составляющие управления (граница сбоку).

Когда отмеченные границы выделяют прямоугольную матрицу, роль собственных значений и функций играют сингулярные числа и сингулярные функции финитной динамической системы [9, 10].

Такое разделение довольно характерно для спорта. Например, при метании молота и диска интервал управления предшествует интервалу наблюдения, что соответствует делению матрицы оператора границами ровно пополам (на четыре части). Собственные функции такой системы известны как ганкелевы [11, 12]. Помимо моделей финитного времени, возможны модели в виде квазиортогональных матриц [13], когда квантуется и время, и пространство [14].

Заключение

Заявленная нами тематика не может развиваться отдельно от тренировочной деятельности спортсменов, поскольку базой ее приложения являются движения в процессе их отработки спортсменами до уровня оптимальных. Финитность является характерной чертой динамических систем, описывающих спортивные движения, которые в принципе не могут рассматриваться на бесконечном интервале времени. Применение финитных моделей позволит более точно понимать и применять результаты измерений, которые делаются в процессе тренировок.

Мы рассматриваем публикацию настоящей статьи как предложение к сотрудничеству с теоретиками и практиками подготовки спортсменов к высшим достижениям.

Литература

1. **Ажиппо А. Ю., Балонин Н. А., Друзь В. А., Суздаль В. С.** Финитные системы оптимизации спортивной техники движений//Слобожанський науково-спортивный вісник. Харків: ХДАФК. 2015. № 2(46). С. 11–18. dx.doi.org/10.15391/snsv. 2015-2.001
2. **Балонин Н. А.** Новый курс теории управления движением. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. — 160 с.
3. **Балонин Н. А.** Теоремы идентифицируемости. — СПб.: Политехника, 2010. — 48 с.
4. **Балонин Н. А.** Дискретные частотные характеристики элементарных динамических звеньев // Информационно-управляющие системы. 2015. № 4(77). С. 17–24. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.4.17
5. **Балонин Н. А., Суздаль В. С., Соболев А. В.** Дискретные частотные характеристики непрерывных динамических систем // Проблемы управления и информатики. 2015. № 5. С. 13–19.
6. **Nikolay A. Balonin, Victor S. Suzdal, Alexander V. Sobolev.** The Discrete Frequency Responses of Continuous Linear Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2015. Vol. 47. Iss. 9. P. 34–41. doi:10.1615/JAutomatInfScien.v47.i9.40
7. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование

непрерывных линейных систем. — М.: Энергия, 1980. — 312 с.
8. **Бесекерский В. А., Попов Е. П.** Теория систем автоматического управления. — СПб.: Профессия, 2003. — 772 с.
9. **Балонин Н. А.** Компьютерные методы анализа линейных динамических систем: дис. ... д-ра техн. наук/СПбГУ. СПб., 2008. — 400 с.
10. **Балонин Н. А.** Сингулярные функции линейных динамических систем. — Lambert Academic Publishing, 2011. — 112 с.
11. **Балонин Н. А., Мироновский Л. А.** Спектральные характеристики линейных систем на ограниченном интервале времени // Автоматика и Телемеханика. 2002. № 6. С. 3–22.
12. **Balonin N. A., Mironovskii L. A.** Spectral Characteristics of the Linear Systems over a Bounded Time Interval // Automation and Remote Control. 2002. Vol. 63. Iss. 6. P. 867–885.
13. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. 2014. № 1(68). С. 2–15.
14. Finite Time Interval Dynamic Systems. http://mathscinet.ru/systems/finitetime/ (дата обращения: 15.05.2016).

UDC 519.715:614
doi:10.15217/issn1684-8853.2016.3.34

Finite Dynamic Models in Sports

Balonin N. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, korbendfs@mail.ru
Sergeev M. B.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, mbse@mail.ru
Suzdal V. S.[b], Dr. Sc., Tech., Professor, suzdal@isma.kharkov.ua
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation
[b]Institute for Scintillation Materials National Academy of Sciences of Ukraine, 60, Lenin Av., 61001, Khar'kiv, Ukraine

Introduction: The classical theory of linear dynamical systems is largely focused on an infinite or semi-infinite interval. This applies to the frequency response functions, the Laplace transform, stability analysis, and other areas where a lot of useful results were obtained. However, in practice this approach is only applicable to dynamic systems whose running time is significantly longer than their eigen processes. On the other hand, real systems often operate on finite intervals of time commensurate with the time of their eigen processes. Such systems cover dynamic processes in sports. **Purpose:** The goal is to show the effectiveness of sport models based on discrete frequency characteristics of linear dynamic systems with finite time intervals, illustrating this by the examples of elementary dynamic units of the first and second orders. **Results:** It is shown that, unlike the continuous frequency characteristics, the discrete ones take in consideration the finite time interval of athlete movements. A definition is given for discrete frequency characteristics of finite-time linear dynamic systems. A mathematical model is described for a double integrator in comparison with the graph of lifting a barbell. It is shown that the points of discrete frequency characteristics are located on the continuous frequency response. **Practical relevance:** The discrete frequency characteristics complement the classic continuous frequency response, being consistent with them in amplitudes and acting as a clarifying characteristics, taking into account an important practical factor which is the finite time of real processes. The corresponding software for mathematical Internet sites has been developed.

Keywords — Dynamic System, Finite Systems, Frequency Characteristics, Continuous Spectrum, Discrete Spectrum, Elementary Dynamic Units.

References

1. Aghyppo A. Yu., Balonin N. A., Druz V. A., Suzdal V. S. Finite System Optimization Sports Equipment Movements. *Slobozans`kij naukovo-sportivnij visnik* [Slobozhanskyi Herald of Science and Sport], 2015, no. 2 (46), pp. 11–18 (In Russian). dx.doi.org/10.15391/snsv. 2015-2.001
2. Balonin N. A. *Novyi kurs teorii upravleniia dvizheniem* [New Course the Theory of Motion Control]. Saint-Petersburg, Sankt-Peterburgskii gosudarstvennyi universitet Publ., 2000. 160 p. (In Russian).
3. Balonin N. A. *Teoremy identifitsiruemosti* [Identifiability Theorems]. Saint-Petersburg, Politekhnika Publ., 2010. 48 p. (In Russian).
4. Balonin N. A. Discrete Frequency Characteristics of Elementary Dynamic Units. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 4(77), pp. 17–24 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.4.17
5. Balonin N. A., Suzdal V. S., Sobolev A. V. The Discrete Frequency Responses of Continuous Dynamic Systems. *Problemy upravleniia i informatiki*, 2015, no. 5, pp. 13–19 (In Russian).
6. Nikolay A. Balonin, Victor S. Suzdal, Alexander V. Sobolev. The Discrete Frequency Responses of Continuous Linear Systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2015, vol. 47, iss. 9, pp. 34–41. doi:10.1615/JAutomatInfScien.v47.i9.40
7. Voronov A. A. *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniia: avtomaticheskoe regulirovanie nepreryvnykh lineinykh sistem* [Fundamentals of the Theory of Automatic Control: Automatic Regulation of Continuous Linear Systems]. Moscow, Energiia Publ., 1980. 312 p. (In Russian).
8. Besekerskij V. A., Popov E. P. *Teoriia sistem avtomaticheskogo upravleniia* [The Theory of Automatic Control Systems]. Saint-Petersburg, Professiia Publ., 2003. 772 p. (In Russian).
9. Balonin N. A. *Komp'yuternye metody analiza lineynykh dinamicheskikh system.* Dis. dokt. tekhn. nauk [Computer Methods for Analysis of Linear Dynamical Systems. Dr. tekhn. sci. diss.]. Saint-Petersburg, Sankt-Peterburgskii gosudarstvennyi universitet Publ., 2008. 400 p. (In Russian).
10. Balonin N. A. *Singuliarnye funktsii lineinykh dinamicheskikh sistem* [Singular Functions of Linear Dynamical Systems]. Lambert Academic Publishing, 2011. 112 p. (In Russian).
11. Balonin N. A., Mironovskii L. A. Spectral Characteristics of the Linear Systems over a Bounded Time Interval. *Avtomatika i Telemekhanika*, 2002, no. 6, pp. 3–22 (In Russian).
12. Balonin N. A., Mironovskii L. A. Spectral Characteristics of the Linear Systems over a Bounded Time Interval. *Automation and Remote Control*, 2002, vol. 63, iss. 6, pp. 867–885.
13. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local Maximum Determinant Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie systemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 1(68), pp. 2–15 (In Russian).
14. *Finite Time Interval Dynamic Systems*. Available at: http://mathscinet.ru/systems/finitetime/ (accessed 15 May 2016).