

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ СТРУКТУРА ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

**В. И. Хименко<sup>а</sup>**, доктор техн. наук, профессор  
<sup>а</sup>ОАО «НИО ЦИТ «Петрокомета», Санкт-Петербург, РФ

**Цель:** анализ возможностей представления случайных процессов на фазовой плоскости и исследование детальной вероятностной структуры фазовых траекторий на уровне количественных характеристик. **Результаты:** показаны характерные особенности формирования фазового пространства состояний при исследовании непрерывных случайных процессов. Введены количественные характеристики для описания выборочных функций и предложен единый подход к анализу вероятностной структуры фазовых траекторий. На примере гауссовых моделей рассмотрены особенности влияния спектрально-корреляционных свойств процессов на их фазовые отображения. **Практическая значимость:** повышение информативности исследований случайных процессов, возможности вероятностного анализа общей структуры фазовых представлений, объединение классических методов фазового пространства и методов общей теории выбросов случайных функций, наглядность представления данных в задачах сбора, преобразования и обработки информации.

**Ключевые слова** — обработка информации, случайные процессы, фазовое пространство, фазовые траектории, вероятностный анализ.

### Введение

Одной из наиболее общих проблем физики и техники, биологии и естествознания является проблема извлечения информации из случайных данных (наблюдений, измерений, экспериментальных исследований). Эта проблема включает в себя этапы получения и преобразования данных; построения моделей реальных процессов и систем; обработки, анализа и интерпретации получающихся результатов. На всех этапах неизбежно возникают вопросы выбора формы представления информации и выбора методов анализа исследуемых процессов. От их решения во многом зависит полнота описания, сложность исследований и особенности практического использования результатов.

В задачах обработки и анализа информации используются различные формы представления данных о структуре исследуемых процессов. Одной из наиболее распространенных форм в задачах анализа сложных колебательных процессов и исследованиях различных по своей физической природе динамических систем является отображение информации о процессах  $\xi(t)$  на фазовой плоскости ( $\xi(t)$ ,  $\xi'(t)$ ). Поведение и общая структура фазовых траекторий отражают совместные изменения во времени значений исследуемого процесса  $\xi(t)$  и его производной  $\xi'(t)$ . Подобные описания, начиная с работ А. Пуанкаре [1], широко используются в качественной теории дифференциальных уравнений и задачах классической механики [2], в общей теории колебаний [3, 4] и задачах нелинейной динамики [5, 6]. Особую роль методы фазовой плоскости стали играть в бурно развивающихся исследованиях стохастической динамики [6–8]

и анализе хаотических колебаний в детерминированных системах (теории детерминированного хаоса) [9–11]. На основе фазовой плоскости рассматривается поведение сложных линейных и нелинейных систем, исследуются особенности перестройки фазовых траекторий, предельные циклы, странные аттракторы, области бифуркаций, свойства устойчивости динамических систем.

Важной особенностью большинства подобных исследований является наглядность отображения информации и ясный физический смысл в описании динамики возможных состояний рассматриваемых процессов и систем. Вместе с тем необходимо отметить, что в задачах «понимания» и анализа общей структуры фазовых траекторий до настоящего времени основную роль играют традиционные описательные подходы и методы визуальных, качественных исследований процессов на уровне детерминированных представлений фазовых портретов. Во многих реальных (не идеализированных) задачах при исследованиях случайных изменений состояний систем и анализе случайных данных это заметно ограничивает области практического использования общих методов фазового пространства.

Цель данной работы — рассмотреть возможности и выделить характерные особенности представления на фазовой плоскости непрерывных случайных процессов; выполнить исследования вероятностной структуры фазовых траекторий на уровне количественных характеристик, отражающих основные особенности вероятностного поведения выборочных функций исследуемых процессов. Такой подход, в свою очередь, позволяет повысить информативность исследований случайных функций и дополнить типовые методы описатель-

ного, качественного анализа фазовых траекторий методами детального количественного исследования вероятностной структуры процессов.

**Фазовая плоскость и фазовые траектории**

Для рассмотрения особенностей структуры фазовых траекторий предположим, что при исследованиях некоторой динамической системы ее поведение в произвольный момент времени  $t$  характеризуется состоянием  $\xi(t)$  и скоростью изменения этого состояния  $\xi'(t) = d\xi(t)/dt$ . Состояние системы  $\xi(t)$ , вообще говоря, может изменяться случайным образом и, следовательно, функции  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$  при общем подходе должны рассматриваться как некоторые случайные процессы. Если значения отдельных реализаций таких функций  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$  на рассматриваемом интервале  $t \in [t_0, t_0 + T]$  интерпретировать как координаты точки на плоскости  $(\xi, \xi') = (\xi(t), \xi'(t))$ , то векторный процесс  $\{\xi(t), \xi'(t)\}$  геометрически можно представить в виде семейства траекторий, поведение которых отражает особенности изменений во времени выборочных функций процесса  $\xi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$ . Плоскость  $(\xi, \xi')$  является при этом плоскостью состояний исследуемой системы или фазовой плоскостью процесса  $\xi(t)$ , а движение изображающей точки  $M$  с координатами  $(\xi(t), \xi'(t))$  при изменении параметра от  $t_0$  до  $t_0 + T$  описывает изменения фазовой траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  процесса  $\xi(t)$ .

Для более наглядного представления на рис. 1 показаны выборочная функция  $\xi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  непрерывного случайного процесса  $\xi(t)$  и характер изменения соответствующей ей траектории  $L(\xi, \xi'; t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  на фазовой плоскости  $(\xi, \xi') = (\xi(t), \xi'(t))$ . Цифрами 1, 2, ..., 9 отмечены особые точки траекторий, соответствующие характерным значениям  $\xi(t)$  в последовательные моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_9$ .

Из приведенного рисунка видно, что фазовая траектория  $L(\xi, \xi'; t)$  описывает одновременные изменения во времени значений  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$ , отра-

жает все особые точки реализации исследуемого процесса  $\xi(t)$  и дополнительно к этому дает информацию о скорости  $\xi'(t)$  изменений состояния  $\xi(t)$  в любой момент времени  $t$  на интервале  $t \in [t_0, t_0 + T]$ . Кроме того, характерным свойством фазовой плоскости является то, что появление каждой из выделенных особых точек реализации  $\xi(t)$  отображается на плоскости  $(\xi, \xi')$  соответствующим пересечением осей  $o\xi$  и  $o\xi'$  фазовой траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$ .

Моменты появления положительных и отрицательных выбросов (точки 1, 5, 9) траектории  $\xi(t)$  на нулевом уровне  $\xi(t) = 0$  отображаются соответствующими пересечениями оси  $o\xi'$  и переходом фазовой траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  из одной полуплоскости в другую. При значениях  $\xi(t) > 0$  локальные экстремумы (точки 2, 3, 4) реализации  $\xi(t)$  связаны с пересечениями траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$  оси  $o\xi$  в правой полуплоскости  $(\xi, \xi')$ . При отрицательных значениях реализации  $\xi(t) < 0$  локальные экстремумы (точки 6, 7, 8) отображаются пересечениями фазовой траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$  оси  $o\xi$  в левой полуплоскости  $(\xi, \xi')$ .

Если в качестве наиболее простого примера рассмотреть обычное гармоническое колебание (рис. 2)

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0),$$

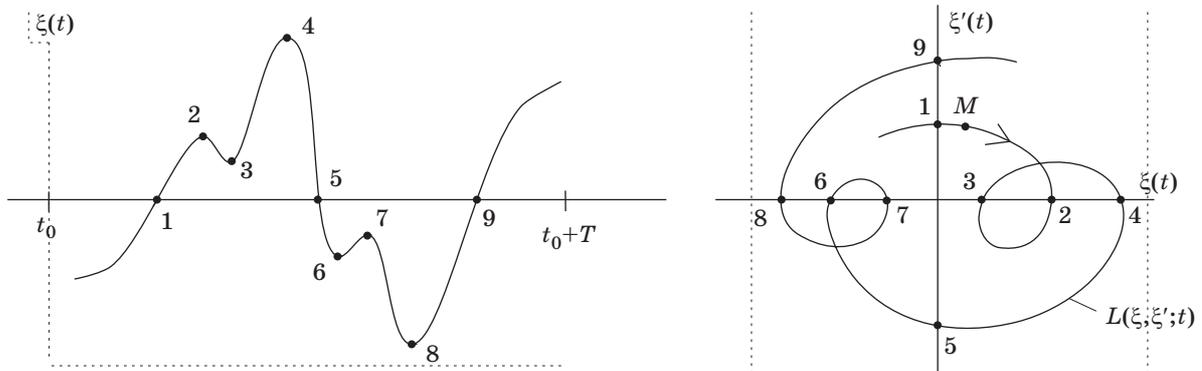
то изменения его производной будут характеризоваться функцией

$$x'(t) = dx(t)/dt = -A_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0),$$

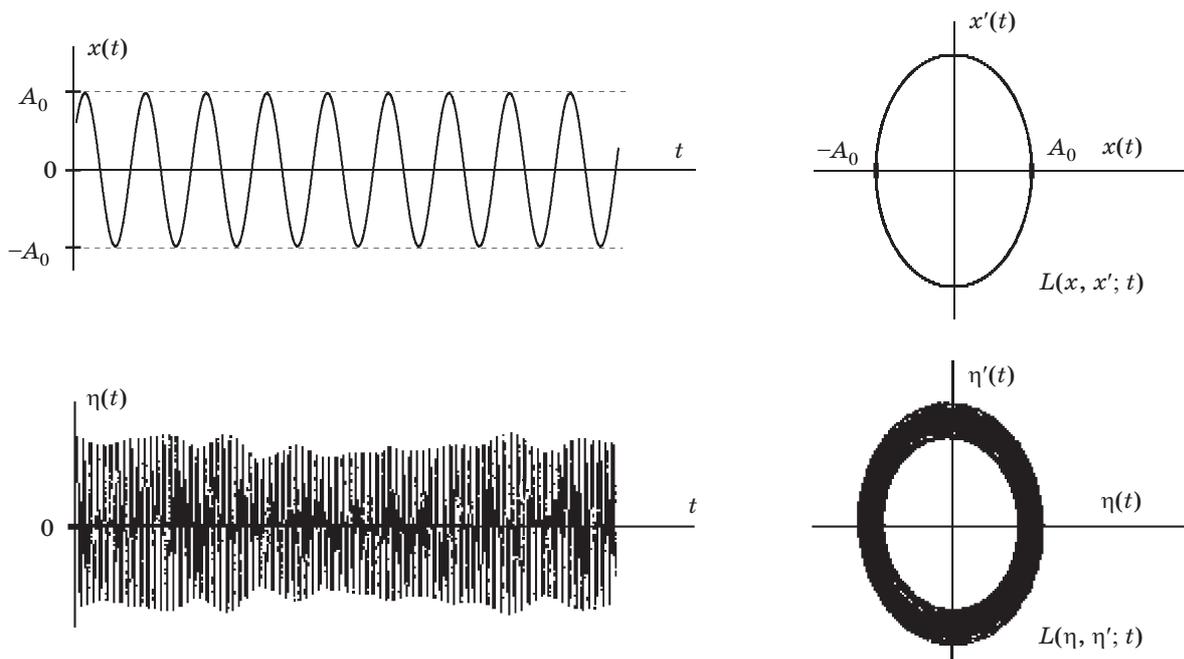
а представление такого колебания на фазовой плоскости  $(x(t), x'(t))$  в общем случае будет описываться уравнением эллипса

$$\left(\frac{x(t)}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{x'(t)}{A_0 \omega_0}\right)^2 = 1.$$

*Детерминированные модели процессов и систем всегда приводят к детерминированным представлениям фазовых траекторий.*



■ Рис. 1. Отдельная реализация непрерывного случайного процесса и ее отображение на фазовой плоскости



■ **Рис. 2.** Фазовые траектории простых колебательных процессов

При рассмотрении ситуации, когда на гармоническое колебание  $\xi(t)$  накладываются случайные флуктуационные помехи  $\zeta(t)$ , результирующий процесс  $\eta(t) = x(t) + \zeta(t)$  будет сопровождаться случайными изменениями амплитуды. На фазовой плоскости  $(\eta, \eta')$  эти изменения приводят к соответствующим флуктуационным изменениям компонент — состояния  $\eta(t)$  и скорости  $\eta'(t)$ , и, как следствие, к флуктуационному «размытию» фазовых траекторий  $L(\eta, \eta'; t)$  (см. рис. 2).

Таким образом, информация о структуре непрерывных случайных функций  $\zeta(t)$  может быть достаточно наглядно представлена в геометрической форме в виде отображений процесса  $\zeta(t)$  в фазовом пространстве  $(\xi, \xi')$ . Характер поведения фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  непосредственно связан при этом с особенностями поведения выборочных функций  $\zeta(t), t \in [t_0, t_0 + T]$  рассматриваемого процесса. Сопоставление особых точек 1, 2, ..., 9 на реализации  $\zeta(t)$  и соответствующей ей фазовой траектории (см. рис. 1) показывает взаимную связь и характерные различия в отображениях детальной структуры исследуемого процесса.

### Числовые характеристики фазовых траекторий

Задачи представления и исследования случайных процессов на фазовой плоскости требуют рассмотрения разнообразных структур фазовых траекторий. Для их описания, сравнения и обще-

го анализа, помимо визуальных и качественных показателей, необходимо также иметь и количественные характеристики, отражающие особенности вероятностного поведения фазовых траекторий при различных моделях исследуемых процессов. В качестве таких характеристик принципиально могут быть использованы характеристики типа «пересечений уровней» [12] или характеристики выбросов случайных процессов [13].

Из общих свойств фазовой плоскости видно, что для фазовой траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  каждое пересечение координатных осей  $-\xi_0\xi$  и  $-\xi'_0\xi'$  на плоскости  $(\xi, \xi')$  связано с наличием определенного вида особой точки реализации  $\xi(t), t \in [t_0, t_0 + T]$  исследуемого процесса (см. рис. 1). В свою очередь особые точки выборочных функций  $\zeta(t), t \in [t_0, t_0 + T]$  позволяют описывать детальную вероятностную структуру процессов  $\zeta(t)$ . Следовательно, по аналогии с характеристиками выбросов для непрерывных случайных процессов  $\zeta(t)$  могут быть определены характеристики пересечений уровней в задачах анализа структуры фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$ .

Рассмотрим более подробно характерные особенности поведения выборочной функции  $\zeta(t), t \in [t_0, t_0 + T]$  непрерывного случайного процесса  $\xi(t)$  и поведение соответствующей ей траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  на плоскости  $(\xi, \xi')$ . На рис. 1 несложно заметить, что при математическом ожидании процесса  $m_\xi = M\{\xi(t)\} = 0$  фазовая траектория  $L(\xi, \xi'; t)$  пересекает полуось  $o\xi'$  в те моменты времени  $t_i$ , когда функция  $\zeta(t)$  пересекает нулевой

уровень снизу вверх, т. е. в моменты появления положительного выброса процесса  $\xi(t)$  над уровнем  $H = m_\xi = 0$  (точки 1 и 9). Если воспользоваться результатами общей теории выбросов [12, 13], то для среднего числа пересечений  $N_L(o\xi', T)$  фазовой траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$  полуоси  $o\xi'$  на интервале времени  $t \in [t_0, t_0 + T]$  получим общую формулу

$$N_L(o\xi', T) = N_\xi^+(0, T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_0^\infty \xi' p(0, \xi'; t) d\xi', \quad (1)$$

где  $p(0, \xi'; t) = p(\xi(t), \xi'(t))|_{\xi(t)=0}$  — совместная плотность вероятностей для значений  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$  при условии  $\xi(t) = m_\xi = 0$ .

По аналогии с этим подходом среднее число пересечений  $N_L(-\xi'o, T)$  фазовой траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  полуоси  $-\xi'o$  будет совпадать со средним числом отрицательных выбросов процесса  $\xi(t)$  на уровне  $H = m_\xi = 0$ , и для этой величины можно записать

$$N_L(-\xi'o, T) = N_\xi^-(0, T) = - \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_{-\infty}^0 \xi' p(0, \xi'; t) d\xi'. \quad (2)$$

Выходы реализации  $\xi(t)$  за уровень  $H = 0$  (точки 1 и 9) и входы  $\xi(t)$  под уровень  $H = m_\xi = 0$  (точка 5) приводят к переходу фазовой траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  из левой полуплоскости  $\xi(t) < 0$  в правую полуплоскость  $\xi(t) > 0$  и, соответственно, из правой полуплоскости в левую. При исследовании случайных процессов  $\xi(t)$  такие переходы происходят с различной скоростью. На фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  координаты точек 1, 5, 9 при  $\xi(t) = 0$  дают наглядную информацию о значениях производной  $\xi'(t)$  в моменты пересечения траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$  оси  $-\xi'o\xi'$ , т. е. непосредственно отображают скорость нарастания и положительных (точки 1, 9), и отрицательных (точка 5) выбросов процесса  $\xi(t)$ .

Общее поведение траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  в правой полуплоскости при  $\xi(t) > 0$  описывает характерные особенности положительных выбросов процесса  $\xi(t)$  над уровнем  $H = m_\xi = 0$ . В левой полуплоскости при  $\xi(t) < 0$  структура фазовой траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  отражает особенности поведения отрицательных выбросов процесса  $\xi(t)$ .

Моменты пересечений фазовой траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$  оси абсцисс  $-\xi'o\xi'$  связаны с моментами появления локальных экстремумов (максимумов и минимумов) выборочной функции  $\xi(t)$ . При этом общая структура фазовых траекторий (см. рис. 1) показывает, что в моменты локальных максимумов реализации  $\xi(t)$  изображающая точка  $M$  пересекает на фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  ось абсцисс сверху вниз (точки 2, 4, 7), а в моменты

локальных минимумов пересечение оси  $-\xi'o\xi'$  происходит снизу вверх (точки 3, 6, 8). Нахождение среднего числа таких пересечений можно выполнить на основе общих результатов [12, 13] для вычисления числа максимумов, минимумов и числа экстремальных значений случайного процесса.

Так, в частности, общее число пересечений оси абсцисс  $-\xi'o\xi'$  траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$  определяется общим числом экстремальных значений реализации  $\xi(t)$  на рассматриваемом интервале времени  $t \in [t_0, t_0 + T]$ :

$$N_L(-\xi'o\xi, T) = N_{\text{ext}}(T) = \int_{t_0}^{t_0+T} dt \int_{-\infty}^\infty |\xi''| p(0, \xi''; t) d\xi'', \quad (3)$$

где  $p(0, \xi''; t) = p(\xi', \xi''; t)|_{\xi'(t)=0}$ .

Среднее число экстремумов (3) может совпадать со средним числом выбросов лишь для наиболее простой структуры рассматриваемых процессов (см. рис. 1), например для фазовых траекторий  $L(x, x'; t)$  гармонического колебания  $x(t)$  и фазовых траекторий  $L(\eta, \eta'; t)$  узкополосного процесса  $\eta(t)$ , когда каждый выброс сопровождается лишь одним экстремальным значением. Расширение спектрального состава исследуемых процессов  $\xi(t)$  усложняет общую структуру выборочных функций, и на фазовых траекториях  $L(\xi, \xi'; t)$  появляются дополнительные особые точки — дополнительные пересечения оси  $-\xi'o\xi'$ .

Если при описании рассматриваемых процессов  $\xi(t)$  ввести отношение

$$\frac{N_L(-\xi'o\xi, T)}{N_L(-\xi'o\xi', T)} = \frac{N_{\text{ext}}(T)}{N_\xi(0, T)} = k, \quad (4)$$

то коэффициент  $k$  может быть использован в качестве удобной характеристики сложности для структуры фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$ . По своему физическому смыслу такой коэффициент отражает среднее количество экстремальных значений, приходящихся на один положительный или отрицательный выброс функции  $\xi(t)$ .

В соответствии с результатами (1)–(3) коэффициент сложности (4) будет определяться общей формулой

$$k = \frac{N_L(-\xi'o\xi, T)}{N_L(-\xi'o\xi', T)} = \frac{\int_{-\infty}^\infty |\xi''| p(0, \xi''; t) d\xi''}{\int_{-\infty}^\infty |\xi'| p(0, \xi'; t) d\xi'}. \quad (5)$$

Для широкополосных случайных процессов  $\xi(t)$ , как правило, выполняется неравенство  $N_{\text{ext}}(T) \geq N_\xi(0, T)$ ,  $k > 1$ . При переходе к анализу простых гармонических колебаний  $k = 1$ .

Рассматривая общую структуру фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$ , можно дополнительно определить вероятность нахождения и среднюю длительность нахождения траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  в правой полуплоскости:

$$P\{L(\xi, \xi'; t) \in [\xi(t) \geq 0]\} = P\{\xi(t) \geq 0\} = \int_0^\infty p_\xi(\xi; t) d\xi;$$

$$T_L^+(0) = TP\{\xi(t) \geq 0\} = T \int_0^\infty p_\xi(\xi; t) d\xi. \quad (6)$$

Эти результаты с учетом формул (1) и (2) позволяют найти среднюю длительность положительных выбросов  $\bar{\tau}_L^+(0)$  и среднюю длительность отрицательных выбросов  $\bar{\tau}_L^-(0)$  фазовой траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  на уровне  $\xi(t) = m_\xi = 0$ :

$$\bar{\tau}_L^+(0) = \int_0^\infty p_\xi(\xi; t) d\xi / N_\xi^+(0, 1);$$

$$\bar{\tau}_L^-(0) = \left[ 1 - \int_0^\infty p_\xi(\xi; t) d\xi \right] / N_\xi^-(0, 1). \quad (7)$$

Приведенные результаты (1)–(7) показывают возможность вероятностного анализа детальной структуры непрерывных случайных процессов при их отображении на фазовой плоскости. Рассмотренные при этом числовые характеристики (1)–(7) являются достаточно общими, они однозначно связаны с характеристиками выбросов [12, 13] и позволяют не только описать качественные изменения структуры исследуемых процессов, но и выполнить количественный анализ вероятностных свойств фазовых траекторий.

**Фазовые траектории случайных гауссовых процессов**

В задачах обработки информации модели гауссовых процессов занимают особое положение и часто используются в качестве основной «рабочей» модели. Такая модель относится к классу наиболее распространенных при описании сигналов, помех и флуктуационных явлений в статистической физике, радиофизике и радиотехнике. Она широко используется в задачах распознавания образов, задачах технической и медицинской диагностики, задачах анализа систем телеметрии, локации, навигации и связи. Учитывая все эти особенности, конкретизируем числовые характеристики (1)–(7) фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  для такого класса вероятностных моделей.

Предположим, что исследуемый случайный процесс  $\xi(t)$  является непрерывным стационарным гауссовым процессом с математическим

ожиданием  $m_\xi = M\{\xi(t)\} = 0$  и некоторой корреляционной функцией общего вида

$$R_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 r(\tau), \quad \sigma_\xi^2 = R_\xi(0) < \infty. \quad (8)$$

Помимо этого, для рассмотрения фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  будем предполагать, что  $\xi(t)$  относится к классу дважды дифференцируемых процессов, и, следовательно, наряду с условием непрерывности (8) выполняются необходимые условия дифференцируемости

$$-R_\xi''(0) = -\left. \frac{d^2}{d\tau^2} R_\xi(\tau) \right|_{\tau=0} < \infty;$$

$$R_\xi^{(4)}(0) = \left. \frac{d^4}{d\tau^4} R_\xi(\tau) \right|_{\tau=0} < \infty. \quad (9)$$

Вычисление основных характеристик фазовых траекторий связано с предварительным нахождением совместных распределений  $p(\xi, \xi'; t)$  и  $p(\xi', \xi''; t)$  для значений  $\xi(t)$  и его производных  $\xi'(t)$  и  $\xi''(t)$  в совпадающие моменты времени. Для модели гауссовых процессов такие распределения находятся достаточно просто [13]. Так, если одномерная плотность вероятностей процесса  $\xi(t)$  имеет вид

$$p_\xi(\xi; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right), \quad (10)$$

то совместная плотность вероятностей для значений  $\xi(t)$  и  $\xi'(t) = d\xi(t)/dt$  записывается как

$$p(\xi, \xi'; t) = p_\xi(\xi; t) p_{\xi'}(\xi'; t) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_1} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2} - \frac{\xi'^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad (11)$$

где  $\sigma_1^2 = \sigma_{\xi'}^2 = -\left. \frac{d^2 R_\xi(\tau)}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = -R_\xi''(0)$  — дисперсия

производной  $\xi'(t)$ .

Результат (11) непосредственно следует из общих свойств устойчивости гауссовых распределений при линейных преобразованиях (в данном случае при дифференцируемости) и известного свойства некоррелированности значений  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$  для стационарных процессов.

По аналогии с формулой (11) может быть определена и совместная плотность вероятностей для значений первой и второй производных рассматриваемого процесса:

$$p(\xi', \xi''; t) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{\xi'^2}{2\sigma_1^2} - \frac{\xi''^2}{2\sigma_2^2}\right), \quad (12)$$

где  $\sigma_2^2 = \sigma_{\xi''}^2 = \left. \frac{d^4 R_{\xi}(\tau)}{d\tau^4} \right|_{\tau=0} = R_{\xi}^{(4)}(0)$  — дисперсия

процесса  $\xi''(t)$ .

Выражения (10)–(12) являются достаточными исходными данными для вычисления основных характеристик (1)–(7) и описания структуры фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  в явной форме.

Вход траектории  $L(\xi, \xi'; t), t \in [t_0, t_0 + T]$  в правую полуплоскость  $\xi(t) > 0$  может происходить только за счет пересечения изображающей точкой  $M$  полуоси  $o\xi'$  на фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  (см. рис. 1). Среднее число таких пересечений определяется формулой (1) и для гауссовых процессов после интегрирования, с учетом выражения (11), равно

$$N_L(o\xi', T) = N_{\xi}^+(0, T) = \frac{T}{2\pi} [-r''(0)]^{1/2}. \quad (13)$$

Выходы фазовой траектории  $L(\xi, \xi'; t), t \in [t_0, t_0 + T]$  в левую полуплоскость  $\xi(t) < 0$  связаны с отрицательными выбросами реализации  $\xi(t)$  на уровне  $H = m_{\xi} = 0$  и происходят за счет пересечений изображающей точкой  $M$  полуоси  $-\xi'o$  по часовой стрелке. По аналогии с выражением (13) среднее число таких пересечений

$$\begin{aligned} N_L(-\xi'o, T) &= N_{\xi}^-(0, T) = \\ &= N_L(o\xi', T) = \frac{T}{2\pi} [-r''(0)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (14)$$

В моменты входов траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  в правую полуплоскость  $\xi(t) > 0$  и в моменты выходов значение производной  $\xi'(t)$ , согласно результатам работы [13], будет описываться условной плотностью вероятностей

$$\begin{aligned} p(\xi'_0 | \xi = 0) &= \frac{|\xi'_0|}{2\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{\xi_0'^2}{2\sigma_1^2}\right), \\ \xi'_0 &\in (-\infty, \infty), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\xi'$  — значение производной  $\xi'(t)$  в моменты  $t_i$  пересечений траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$  оси  $-\xi'o\xi'$  при условии, что  $\xi(t_i) = 0$ , а входящая в формулу (15) величина  $\sigma_1^2$  соответствует дисперсии производной:

$$\sigma_1^2 = \sigma_{\xi'}^2 = M\left\{[\xi'(t)]^2\right\} = -R_{\xi}''(0) = -\sigma_{\xi}^2 r''(0). \quad (16)$$

Результаты (15) и (16) позволяют определить наиболее вероятные значения производной  $\xi'_0$ , при которых траектория  $L(\xi, \xi'; t)$  пересекает на фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  ось  $-\xi'o\xi'$ :

$$\xi'_0 = \pm \sigma_{\xi} \sqrt{-r''(0)} = \pm \sigma_1. \quad (17)$$

Величина  $\sigma_1$ , как это следует из соотношений (16) и (17), определяется спектрально-корреляци-

онными свойствами процесса  $\xi(t)$  и характеризует наиболее вероятные значения скорости перехода траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  из одной полуплоскости  $(\xi, \xi')$  в другую.

Пересечения фазовой траекторией  $L(\xi, \xi'; t)$  оси абсцисс  $-\xi'o\xi$  совпадают с моментами появления локальных экстремумов выборочной функции  $\xi(t)$ . Следовательно, пользуясь формулами (3) и (12), для среднего числа пересечений  $N_L(o\xi, T)$  полуоси  $o\xi$  и среднего числа пересечений  $N_L(-\xi'o, T)$  полуоси  $-\xi'o$  функцией  $L(\xi, \xi'; t), t \in [t_0, t_0 + T]$  получим

$$\begin{aligned} N_L(o\xi, T) &= N_L(-\xi'o, T) = \frac{1}{2} N_{\text{ext}}(T) = \\ &= \frac{T}{2\pi} \left[ \frac{r^{(4)}(0)}{-r''(0)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Если теперь для фазовой траектории  $L(\xi, \xi'; t)$  рассмотреть характеристики длительностей положительных и отрицательных выбросов, то предварительно нужно заметить, что гауссовы процессы обладают симметричным относительно оси  $\xi = m_{\xi} = 0$  распределением и, следовательно:

$$\int_{-\infty}^0 p_{\xi}(\xi; t) d\xi = \int_0^{\infty} p_{\xi}(\xi; t) d\xi = \frac{1}{2}.$$

С учетом этого свойства формулы (7), (13) и (14) позволяют определить среднюю длительность выбросов фазовой траектории на уровне  $\xi(t) = m_{\xi} = 0$ :

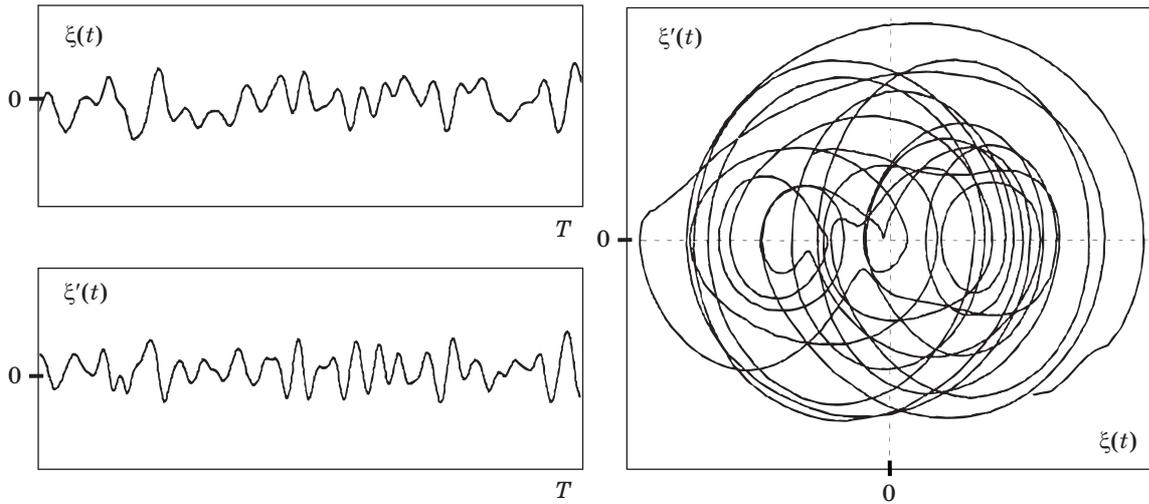
$$\bar{\tau}_L^+(0) = \bar{\tau}_L^-(0) = \pi [-r''(0)]^{-1/2}. \quad (19)$$

Результаты (10)–(19), по существу, полностью отражают характерные особенности фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  гауссовых процессов. Они позволяют определять на фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  основные числовые характеристики и справедливости для описания процессов  $\xi(t)$  с различными спектрально-корреляционными свойствами. При вычислении характеристик в основных формулах (13)–(19) достаточно подставить значения производных  $-r''(0)$  и  $r^{(4)}(0)$  от нормированной корреляционной функции  $r(\tau) = \sigma_{\xi}^{-2} R_{\xi}(\tau)$ . Эти значения непосредственно связаны с дисперсиями производных  $\xi'(t)$  и  $\xi''(t)$  исследуемого процесса:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi'}^2 &= -R_{\xi}''(0) = -\sigma_{\xi}^2 r''(0); \\ \sigma_{\xi''}^2 &= R_{\xi}^{(4)}(0) = \sigma_{\xi}^2 r^{(4)}(0), \end{aligned} \quad (20)$$

и для моделей гауссовых процессов  $\xi(t)$  являются основными величинами, влияющими на структуру фазовых траекторий.

В соответствии с определением (4), (5), для гауссовых моделей  $\xi(t)$  через дисперсии производ-



■ **Рис. 3.** Выборочная функция  $\xi(t)$  широкополосного гауссова процесса, поведение ее производной  $\xi'(t)$  и структура фазовых траекторий

ных (20) выражается и коэффициент сложности общей структуры функций  $L(\xi, \xi'; t)$ :

$$k = \frac{N_{\text{ext}}(T)}{N_{\xi}(0, T)} = \frac{\left[ \frac{r^{(4)}(0)}{-r''(0)} \right]^{1/2}}{\left[ -r''(0) \right]^{1/2}} = \frac{\left( r^{(4)}(0) \right)^{1/2}}{-r''(0)} = \frac{\sigma_{\xi} \sigma_{\xi''}}{\sigma_{\xi'}^2}. \quad (21)$$

В качестве простой иллюстрации на рис. 3 показан характер отдельной реализации  $\xi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  стационарного широкополосного гауссова процесса, особенности изменения ее производной  $\xi'(t)$  и структура фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  на плоскости  $(\xi, \xi')$ .

Полезно здесь подчеркнуть, что при исследованиях гауссовых процессов  $\xi(t)$  во многих задачах интерес представляет зависимость характеристик вероятностной структуры фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  непосредственно от спектрально-корреляционных свойств процесса  $\xi(t)$ . В данном случае эта зависимость определяется параметром

$$-r''(0) = \sigma_1^2 / \sigma_{\xi}^2 = \int_0^{\infty} \omega^2 S_{\xi}(\omega) d\omega \Big/ \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = \lambda_2. \quad (22)$$

При широкополосных процессах  $\xi(t)$ , когда спектральная плотность  $S_{\xi}(\omega)$  сосредоточена в окрестностях частоты  $\omega_0 = 0$ , а корреляционная функция имеет вид  $R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 r(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \rho(\tau)$ , где  $\rho(\tau)$  — некоторая монотонно убывающая функция  $\tau$ , значение спектрального момента  $\lambda_2$  полностью определяется эффективной шириной  $\Delta\omega_s$

и коэффициентом формы спектральной плотности [12, 13]

$$\lambda_2 = -R_{\xi}''(0) / \sigma_{\xi}^2 = -\rho''(0) = \alpha^2 \Delta\omega_s^2. \quad (23)$$

Для нескольких типовых моделей функций  $R_{\xi}(\tau)$  и  $S_{\xi}(\omega)$  в таблице приведены значения всех основных параметров, необходимых для вероятностного анализа фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  широкополосных процессов  $\xi(t)$ .

Если исследуемый гауссов процесс  $\xi(t)$  относится к классу узкополосных и его корреляционная функция  $R_{\xi}(\tau)$  имеет вид

$$R_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 r(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \rho(\tau) \cos \omega_0 \tau, \quad \omega_0 \gg \Delta\omega_s, \quad (24)$$

то значение спектрального момента

$$\lambda_2 = -R_{\xi}''(0) / \sigma_{\xi}^2 = \omega_0^2 - \rho''(0) = \omega_0^2 + \alpha^2 \Delta\omega_s^2. \quad (25)$$

Иначе говоря, как и следовало ожидать при рассмотрении узкополосных случайных процессов  $\xi(t)$ , на вероятностную структуру фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$ , помимо формы и ширины спектра, существенное влияние оказывает средняя частота спектральной плотности  $S_{\xi}(\omega)$ .

С учетом приведенных результатов (22)–(25) характеристики (13)–(21) позволяют в различных по своему содержанию задачах выполнять детальный вероятностный анализ структуры гауссовых процессов и исследовать влияние спектрально-корреляционных свойств на поведение случайно-го процесса  $\xi(t)$  в фазовом пространстве  $(\xi, \xi')$ .

При более общем подходе к исследованиям вероятностных свойств процессов  $\xi(t)$ , для фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  на плоскости  $(\xi, \xi')$  могут задаваться некоторые пороговые уровни или

■ Значения основных параметров для анализа фазовых траекторий типовых моделей гауссовых процессов

Функция $R(\tau)$	Функция $S(\omega)$	Параметр			
		$-r''(0)$	$r^{(4)}(0)$	$\Delta\omega_3$	$\alpha$
$e^{-\alpha\tau^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\alpha}\right)$	$2\alpha$	$12\alpha^2$	$2\sqrt{\pi\alpha}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
$\frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau/2}$	$\frac{2\pi}{\Delta\omega}$ при $ \omega  \leq \frac{\Delta\omega}{2}$ $0$ при $ \omega  > \frac{\Delta\omega}{2}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2$	$\frac{1}{5}\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^4$	$\Delta\omega$	$\frac{1}{\sqrt{12}}$
$\left[1 + \alpha\left \tau + \frac{1}{3}(\alpha\tau)^2\right \right] e^{-\alpha \tau }$	$\frac{16\alpha^5}{3(\alpha^2 + \omega^2)^3}$	$\frac{1}{3}\alpha^2$	$\alpha^4$	$\frac{3}{8}\pi\alpha$	$\frac{8}{3\sqrt{3}\pi}$
$\left[1 + (\alpha\tau)^2\right]^{-1}$	$\frac{\pi}{\alpha} \exp\left(-\frac{ \omega }{\alpha}\right)$	$2\alpha^2$	$24\alpha^4$	$2\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

определенные области допустимых значений и, в соответствии с условиями решаемых задач, могут, например, рассматриваться характеристики выходов фазовых траекторий за заданный уровень, скорости выходов, вероятности и длительности нахождения процессов в заданных областях допустимых значений для  $\xi(t)$  и  $\zeta'(t)$ .

### Общая структура фазовых траекторий

В зависимости от необходимой детальности исследований при рассмотрении случайных процессов интерес могут представлять различные вероятностные характеристики. Выделим здесь основные особенности фазового пространства  $(\xi, \xi')$ , которые позволяют получать полезную информацию о вероятностной структуре процессов  $\xi(t)$  без анализа количественных характеристик (1)–(7) фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$ , из одного их общего вида.

— При исследовании случайных процессов  $\xi(t)$  фазовые траектории  $L(\xi, \xi'; t)$ , как и следовало ожидать, также имеют случайную структуру. На фазовых отображениях (см. рис. 3) отсутствуют замкнутые траектории и не проявляются какие-либо явно выраженные закономерности (предельные циклы). Общее поведение фазовых траекторий определяется характером совместного вероятностного распределения для значений  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$ .

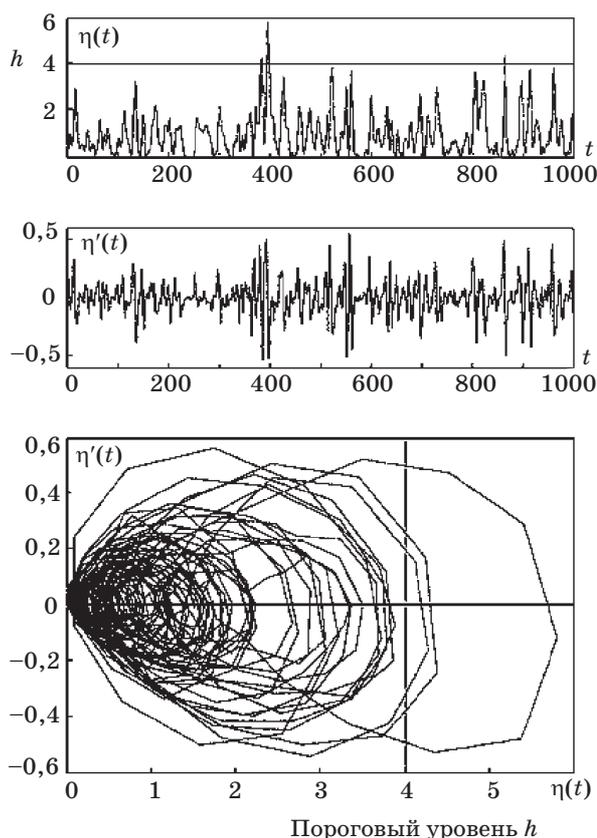
— Расположение фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  относительно координатных осей на плоскости  $(\xi, \xi')$  показывает, что значения  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$  в совпадающие моменты времени обладают свойством некоррелированности (ортогональности). При исследованиях гауссовых процессов (см. рис. 3) это свойство приводит к общей статистической независимости значений  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$  не только в совпадающие моменты времени.

— При возрастании длительности выборочных функций  $\xi(t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  общая структура фазовых отображений позволяет делать приближенные выводы относительно характера плотностей вероятностей случайных процессов  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$ , выполнять приближенное оценивание дисперсий и вероятностей нахождения значений  $\xi(t)$  и  $\xi'(t)$  в определенной области фазового пространства  $(\xi, \xi')$ .

— Для стационарных случайных процессов  $\xi(t)$  изменения производной  $\xi'(t)$  в положительную и отрицательную сторону на фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  носят приближенно одинаковый характер. Это показывает, что случайная функция  $\xi'(t)$  имеет нулевое математическое ожидание и, кроме того, подтверждает известное свойство симметрии относительно среднего значения плотности вероятностей производной  $\xi'(t)$  стационарного процесса  $\xi(t)$ .

— Общее поведение фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  позволяет наглядно отображать на фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  информацию о появлении различных неоднородностей в вероятностной структуре процессов  $\xi(t)$ , появлении «загрязнений», аномальных значений, изменениях спектральных свойств и структуры производной  $\xi'(t)$  исследуемых процессов.

В качестве дополнительной иллюстрации на рис. 4 показаны фазовые траектории  $L(\eta, \eta'; t)$ ,  $t \in [t_0, t_0 + T]$  случайного процесса  $\eta(t)$  с экспоненциальным распределением. Структура фазового отображения на плоскости  $(\eta, \eta')$  наглядно характеризует здесь высокую концентрацию (высокую вероятность появления) мгновенных значений процесса  $\eta(t)$  в области относительно малых величин и заметное уменьшение вероятностей появления больших значений  $\eta(t)$ . Общий характер изменения «плотности» фазовых траекторий хорошо согласуется с экспоненциальной



■ **Рис. 4.** Выборочная функция случайного процесса с экспоненциальным распределением и ее отображение на фазовой плоскости

формой плотности вероятностей  $p_\eta(\eta; t)$  процесса  $\eta(t)$ .

В целом выделенные особенности фазового пространства показывают, что при отсутствии аналитических решений отдельные свойства вероятностной структуры процессов  $\xi(t)$  могут быть исследованы на качественном уровне по общему виду фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$ . Такой подход важен в задачах оперативной обработки данных, задачах экспресс-анализа случайных процессов, задачах телеметрии и мониторинга состояния сложных динамических систем.

### Литература

1. **Poincare H.** Sur le Problem des Trois Corps et Les Equations de la Dynamique // Acta. Math. 1890. Vol. 13. P. 1–270.
2. **Арнольд В. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984. — 272 с.
3. **Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E.** Theory of Oscillators. — Oxford: Pergamon Press, 1966.
4. **Landa P. S.** Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems. — Dordrecht – Boston – London: Kluwer Academic Publ., 1996.

### Заключение

По существу, представленные в данной работе результаты показывают характерные особенности отображения непрерывных случайных процессов  $\xi(t)$  на фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  и дают основу для количественного описания вероятностной структуры фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$ . Эти результаты позволяют сделать несколько общих выводов.

В задачах обработки и анализа данных представление информации на фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  позволяет сформировать фазовое пространство исследуемого случайного процесса  $\xi(t)$ , в котором дается наглядное отображение информации о состоянии процесса  $\xi(t)$  и скорости изменения этого состояния  $\xi'(t) = d\xi(t)/dt$  в произвольный момент времени на рассматриваемом интервале  $t \in [t_0, t_0 + T]$ .

На основе использования методов фазовой плоскости  $(\xi, \xi')$  появляются возможности накопления и усреднения выборочных функций, возможности получения дополнительной информации о вероятностных свойствах процесса и возможности отображения информационной структуры случайных процессов «в целом» на выбранном интервале анализа.

По своему содержанию методы количественного описания фазовых траекторий  $L(\xi, \xi'; t)$  непосредственно связаны с общей теорией выбросов случайных функций, хотя и используется при этом иная форма представления информации.

Исследования структуры фазовых отображений позволяют выполнять вероятностный анализ особых точек реализаций  $\xi(t)$ , оценивать экстремальные значения случайных процессов, рассматривать вероятности выхода и скорости выхода функций  $\xi(t)$  из области заданных значений.

Все рассмотренные в данной работе числовые характеристики фазовых траекторий относятся к классу «измеряемых» — для многих моделей случайных процессов их удается определить аналитически в явном виде, они имеют наглядную физическую интерпретацию и в задачах обработки информации достаточно просто измеряются аппаратно.

5. **Анищенко В. С.** Сложные колебания в простых системах. — М.: УРСС, 2009. — 312 с.
6. **Анищенко В. С.** и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. — М.: Ижевск: ИКИ, 2003. — 544 с.
7. **Ott E.** Chaos in Dynamical Systems. — Cambridge University Press, 1993. — 385 p.
8. **Магницкий Н. А.** Теория динамического хаоса. — М.: ЛЕНАНД, 2011. — 320 с.
9. **Кузнецов С. П.** Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2006. — 356 с.
10. **Moon F.** Chaotic Vibrations. — N. Y.: Wiley, 1987. — 312 p.

11. Sprott J. C. *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*. — Singapore: World Scientific Publishing, 2010. — 328 p.
12. Тихонов В. И., Хименко В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами. *Радиофизические приложения // Радиотехника и электроника*. 1998. Т. 43. № 5. С. 501–523.

13. Тихонов В. И., Хименко В. И. Выбросы траекторий случайных процессов. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

UDC 519.21:537.86

doi:10.15217/issn1684-8853.2016.3.85

**Probability Structure of Phase Trajectories of Random Processes**

Khimenko V. I.<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, vih.13@yandex.ru

<sup>a</sup>JSC «The Scientific Research and Experimental Centre of Intelligent Technologies “Petrokometa”», 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Purpose:** We analyze the ways to present random processes on a phase plane, and study the detailed probabilistic structure of phase trajectories at the level of quantitative descriptions. **Results:** Studying continuous random processes has demonstrated the characteristic features of forming a phase space of states. Quantitative characteristics are introduced to describe sample functions. A universal approach is offered to the analysis of probabilistic structure of phase trajectories. On the example of Gausse models, we discussed the influence of spectral-correlation properties of the processes to their phase reflections. **Practical relevance:** The obtained results can increase the information capacity of studying random processes, provide the ways for probabilistic analysis of the general structure of phase presentations, unite the classic methods of phase space with the methods of general theory of level crossings of random functions, and clearly present the data in the problems of collection, transformation and processing of information.

**Keywords** — Information Processing, Random Processes, Phase Space, Phase Trajectories, Probabilistic Analysis.

**References**

- Poincare H. Sur le Problem des Trois Corps et les Equations de la Dynamique. *Acta. Math.*, 1890, vol. 13, pp. 1–270 (In French).
- Arnold V. I. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniia* [Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 272 p. (In Russian).
- Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Theory of Oscillators*. Oxford, Pergamon Press, 1966.
- Landa P. S. *Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems*. Dordrecht — Boston — London, Kluwer Academic Publ., 1996.
- Anishchenko V. S. *Slozhnye kolebaniia v prostykh sistemakh* [Complicated Oscillations in Simple Systems]. Moscow, URSS Publ., 2009. 312 p. (In Russian).
- Anishchenko V. S., et al. *Nelineinye efekty v khaoticheskikh i stokhasticheskikh sistemakh* [Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems]. Moscow — Izhevsk, IKI Publ., 2003. 544 p. (In Russian).
- Ott E. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1993. 385 p.
- Magnitskii N. A. *Teoriia dinamicheskogo khaosa* [Theory of Dynamical Chaos]. Moscow, Lenand Publ., 2011. 320 p. (In Russian).
- Kuznetsov S. P. *Dinamicheskii khaos* [Dynamical Chaos]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 356 p. (In Russian).
- Moon F. *Chaotic Vibrations*. New York, Wiley, 1987. 312 p.
- Sprott J. C. *Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*. Singapore, World Scientific Publishing, 2010. 328 p.
- Tikhonov V. I., Khimenko V. I. Level-Crossing Problems in Physics and Radio Engineering: An Overview. *Radiotekhnika i elektronika*, 1998, vol. 43, no. 5, pp. 501–523 (In Russian).
- Tikhonov V. I., Khimenko V. I. *Vybrosy traektorii sluchainykh protsessov* [Trajectories Emissions of Stochastic Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 304 p. (In Russian).