

УДК 681.326.7

doi:10.15217/issn1684-8853.2016.6.99

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЖЕСТКОСТИ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

В. А. Голубков^а, канд. техн. наук, доцент
В. Ф. Шишлаков^а, доктор техн. наук, профессор
Т. Т. Шарафудинов^а, преподаватель
И. Н. Лукьяненко^а, канд. техн. наук, доцент

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ

Постановка проблемы: существующие математические модели расчета вибрации редукторов с учетом некоторых погрешностей изготовления их элементов, призванные повысить надежности редукторов, не достаточно учитывают влияния погрешностей изготовления и сборки на флуктуацию жесткостных параметров зубчатых зацеплений. **Цель исследования:** математическое моделирование спектральных характеристик изменения жесткости зубчатого зацепления в зависимости от погрешностей шага зубчатых колес. **Результаты:** математическое моделирование спектральных характеристик изменения жесткости зубчатого зацепления в зависимости от погрешности шага зубчатых колес показало, что флуктуация жесткости проявляется не только на зубчатых частотах вращения колес, а также на комбинационных частотах. Соответственно, в спектре вибрации зубчатого зацепления будут содержаться гармоники не только возмущающих сил, но и комбинационные гармоники от этих сил и флуктуации жесткости. **Практическая значимость:** предложенная математическая модель позволяет более точно проводить расчет вибрации редукторов, оценку динамических нагрузок в зонах контакта элементов, а также значительно точнее оценивать ресурс работы и надежность редуктора. На стадии проектирования позволяет нормировать технологические погрешности элементов для достижения заданного ресурса работы.

Ключевые слова — зубчатое зацепление, жесткость, моделирование, спектральные характеристики.

Введение

Зубчатые зацепления входят в состав редукторов специального и бытового назначения. Наличие вибрации зубчатых зацеплений ощутимо влияет на точность исполняемых функций, а также снижает качественные характеристики, такие как надежность и ресурс [1].

Точность изготовления элементов зубчатых зацеплений на стадии производства, а также дефекты, которые возникают в процессе эксплуатации, вследствие износа, значительно влияют на характеристики жесткости зубчатых зацеплений и, как следствие, увеличивают виброактивность редукторов [2–4], повышают динамические нагрузки в зонах контакта элементов редуктора, снижают ресурс его работы [5].

Следовательно, анализ спектральных характеристик жесткости зубчатых зацеплений в зависимости от погрешностей изготовления зубчатых колес приобретает большую актуальность.

Деформации и функции контактирования в зубчатом зацеплении

Для анализа характеристик жесткости зацепления необходимо рассмотреть потенциальную энергию деформации зубьев. Потенциальная энергия деформации зубьев в зацеплении ше-

стерни и колеса носит нелинейный характер от обобщенных координат [1–5]:

$$\Pi = \frac{1}{p} \sum_{iq} B \delta_{iq}^p e(\delta_{iq}) \varepsilon_i(t) \varepsilon_q(t),$$

где B — параметр, характеризующий упругие свойства шестерни и колеса: δ_{iq} — полная деформация в зацеплении i -го зуба шестерни и q -го зуба колеса;

$$e(\delta_{iq}) = \begin{cases} 1, & \delta_{iq} > 0 \\ 0, & \delta_{iq} \leq 0 \end{cases};$$

$\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_q(t)$ — функции контактирования i -го зуба шестерни и q -го зуба колеса соответственно.

Полная деформация в зацеплении δ_{iq} функционально связана с координатами вибрации X_{kj} следующим образом [5]:

$$\delta_{iq} = \delta_{0iq} + \sum_{kj} (-1)^{k+1} a_{kj} x_{kj} - \Delta h,$$

где δ_{0iq} — статическая деформация зацепления; a_{kj} — конструктивный параметр k -го колеса в j -м направлении ($k = 1$ — шестерня, $k = 2$ — колесо); Δh — функция профильной ошибки зацепления.

Выражение для профильной ошибки зацепления записывается в виде

$$\Delta h = \sum_l h_{il} \cos \left[\omega_1 t + \frac{2\pi l}{z_1} (i-1) + \varphi_{il} \right] -$$

$$-\sum_p h_{qp} \cos \left[p\omega_2 t + \frac{2\pi p}{z_2}(q-1) + \varphi_{qp} \right],$$

где h_{il} — амплитудное значение профильной ошибки i -го зуба шестерни на частоте $l\omega_1$; h_{qp} — амплитудное значение профильной ошибки q -го зуба колеса на частоте $p\omega_2$; ω_1, ω_2 — угловые частоты вращения шестерни и колеса соответственно.

Поскольку контакт зубьев носит импульсный характер, то функции контактирования $\varepsilon_i(t), \varepsilon_q(t)$ могут быть заданы в виде

$$\varepsilon_i(t-t_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t-t_i| < \frac{T}{2}; \\ 0 & \text{при } |t-t_i| \geq \frac{T}{2}; \end{cases}$$

$$\varepsilon_q(t-t_q) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t-t_q| < \frac{T}{2}; \\ 0 & \text{при } |t-t_q| \geq \frac{T}{2}; \end{cases}$$

где t_i и t_q — моменты зацепления i -го зуба шестерни и q -го зуба колеса соответственно:

$$t_i = \frac{2\pi}{\omega_1} \frac{i-1}{z_1};$$

$$t_q = \frac{2\pi}{\omega_2} \frac{q-1}{z_2};$$

T — длительность контактирования i -го и q -го зубьев:

$$T = \frac{2\pi\varepsilon_a}{\omega_1 z_1},$$

ε_a — коэффициент перекрытия:

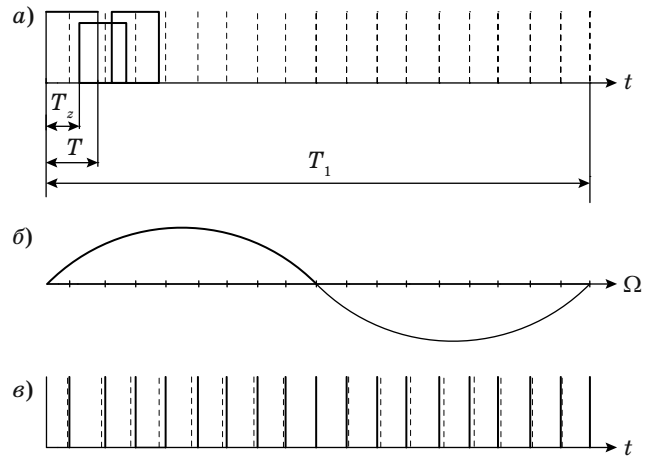
$$\varepsilon_a = \left[\left(\frac{z_1^2}{4} \sin^2 \alpha + z_1 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{z_2^2}{4} \sin^2 \alpha + z_2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \alpha \right] / \pi \cos \alpha,$$

α — угол зацепления.

Функцию контактирования i -го зуба шестерни можно представить в виде последовательности импульсов (рисунок, а), где T_1 — период контактирования i -го зуба. При наличии погрешности шага, изменяющейся по синусоидальному закону с частотой Ω_i (рисунок, б), функция контактирования изменяется (рисунок, в) и описывается выражением

$$\varepsilon_i(t) = A_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{0i} \left(\frac{\Delta f'_{mi}}{r_1} \right) \times$$

$$\times \cos \left(n\omega_1 t + 2\pi n \frac{i-1}{z_1} + \varphi_n \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_i=1}^{\infty} A_n J_{ki} \left(k_i \frac{\Delta f'_{mi}}{r_1} \right) \times$$



■ Моделирование погрешностей зубчатого зацепления: а — идеальная функция контактирования; б — функция, описывающая погрешность шага; в — функция контактирования при наличии погрешности шага

$$\times \cos \left(n\omega_1 t + 2\pi n \frac{i-1}{z_1} + \varphi_n + k_i \Omega_i t_i \right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_i=1}^{\infty} (-1)^{k_i} A_n J_{ki} \left(\frac{k_i \Delta f'_{mi}}{r_1} \right) \times$$

$$\times \cos \left(n\omega_1 t + 2\pi n \frac{i-1}{z_1} + \varphi_n - k_i \Omega_i t_i \right),$$

где $A_{0i} = \frac{T\omega_1}{2\pi}$; $A_n = \left(\frac{\omega_1 T}{2\pi} \right) \sin c \left(\frac{n\omega_1 T}{2} \right)$; $\varphi_n = \frac{n\omega_1 T}{2}$;

Ω_i — частота изменения погрешности шага шестерни; $\Delta f'_{mi}$ — амплитудное значение погрешности шага; $J_{ki} \left(\frac{\Delta f'_{mi}}{r_1} \right)$ — функция Бесселя первого рода k_i -го порядка от аргумента $\Delta f'_{mi}/r_1$.

Конструктивный параметр B определяется выражением

$$B = \frac{2E}{3(1-\varepsilon^2)} \left(\frac{R_{l1} R_{l2}}{R_{l1} + R_{l2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где ε — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; R_{lk} — радиус выступов рабочих поверхностей контактирующих зубьев k -го колеса:

$R_{lk} = \frac{2a_k k}{\pi}$, a_k — амплитуда k -й преобладающей гармоники разложения профиля зуба по ширине зубчатого венца в ряд Фурье.

Спектральные характеристики жесткости

Учитывая, что характер контактирования зубьев определяется значением статистической деформации δ_{0iq} , и используя линеаризацию

с помощью разложения в ряд Тейлора, обобщенные силы, действующие в зацеплении, запишем в виде

$$\begin{aligned}
 Q = & -\frac{d\Pi}{d\delta_{iq}} + F_{\text{ст}} = -\sum_{i,q} B\delta_{0iq}^{p-1} e(\delta_{0iq})\varepsilon_i(t)\varepsilon_q(t) - \\
 & - \sum_{i,k,q,p} (-1)^{k+1} B\alpha_{kj}x_{kj}(p-1)\delta_{0iq}^{p-1} e(\delta_{0iq})\varepsilon_i(t)\varepsilon_q(t) - \\
 & - \sum_{i,q} B \left[\sum_l h_{il} \cos \left[l\omega_1 t + \frac{2\pi l}{z_1}(i-1) + \varphi_{il} \right] - \right. \\
 & \left. - \sum_p h_{qp} \cos \left[p\omega_2 t + \frac{2\pi p}{z_2}(q-1) + \varphi_{qp} \right] \right] \times \\
 & \times \delta_{0iq}^{p-1} e(\delta_{0iq})(p-1)\varepsilon_i(t)\varepsilon_q(t) + F_{\text{ст}}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где $F_{\text{ст}} = M/r_1$ — статическая нагрузка в зацеплении, M — крутящий момент на валу шестерни; r_1 — радиус делительной окружности шестерни.

Из выражения (1) следует, что жесткость зацепления определяется из следующего соотношения:

$$C_3 = \sum_{i,k,q,p} (-1)^{k+1} (p-1) B \delta_{0iq}^{p-2} a_{kj} \varepsilon_i(t) \varepsilon_q(t).$$

Статистическая деформация δ_{0iq} находится из решения нелинейного уравнения

$$\sum_{i,q} B \delta_{0iq}^{p-1} e(\delta_{0iq}) \varepsilon_i(t) \varepsilon_q(t) - F_{\text{ст}} = 0. \quad (2)$$

Как видно из выражения (2), жесткость зубчатого зацепления определяется произведением функций контактирования. Спектральные характеристики произведения функций контактирования $\varepsilon_i(t)$, $\varepsilon_q(t)$ представлены в таблице с учетом того, что частоты изменения погрешности шага от зуба к зубу шестерни и колеса Ω_i , Ω_q кратны частотам вращения ω_1 и ω_2 соответственно.

Заключение

Разработанная модель расчета спектральных характеристик жесткости зубчатого зацепления учитывает погрешность шага нарезки зубьев колес редуктора. Установлено, что при возникновении погрешности шага, кроме зубцовых и кратных им частот, в спектре изменения жесткостей

■ Спектральные характеристики произведений функций контактирования

Частота	Амплитуда	Примечание
0	$z_1 z_2 A_{0i} A_{0q}$	—
$L\omega_z$	$z_1 z_2 A_{0q} A_{ni} J_{0i} \left(\frac{\Delta f' m_i}{r_1} \right)$	$n = lz_1$
$L\omega_z$	$z_1 z_2 A_{0i} A_{mq} J_{0q} \left(\frac{\Delta f' m_1}{r_2} \right)$	$m = lz_2$
$(l+p)\omega_z$	$z_1 z_2 A_{ni} A_{mq} J_{0i} \left(\frac{\Delta f' m_i}{r_1} \right) J_{0q} \left(\frac{\Delta f' m_q}{r_2} \right)$	$m = pz_2$ $n = lz_1$
$l\omega_z \pm k_i \omega_1$	$z_1 z_2 A_{0q} A_{ni} J_{k_i} \left(k_i \frac{\Delta f' m_i}{r_1} \right)$	$n = lz_1 \pm k_i$
$(l+p)\omega_z \pm k_i \omega_1$	$z_1 z_2 A_{ni} A_{mq} J_{k_i} \left(k_i \frac{\Delta f' m_i}{r_1} \right) J_{0q} \left(\frac{\Delta f' m_q}{r_2} \right)$	$m = pz_2$ $n = lz_1 \pm k_i$
$p\omega_z \pm k_q \omega_2$	$z_1 z_2 A_{0i} A_{mq} J_{k_q} \left(k_q \frac{\Delta f' m_1}{r_2} \right)$	$m = pz_2 \pm k_q$
$(p+l)\omega_z \pm k_q \omega_2$	$z_1 z_2 A_{ni} A_{mq} J_{0i} \left(\frac{\Delta f' m_i}{r_1} \right) J_{k_q} \left(k_q \frac{\Delta f' m_q}{r_2} \right)$	$n = lz_1$ $m = pz_2 \pm k_q$
$(p+l)\omega_z \pm k_i \omega_1 \pm k_q \omega_2$	$z_1 z_2 A_{ni} A_{mq} J_{k_i} \left(k_i \frac{\Delta f' m_i}{r_1} \right) J_{k_q} \left(k_q \frac{\Delta f' m_q}{r_2} \right)$	$n = lz_1 \pm k_i$ $m = pz_2 \pm k_q$
$(p+l)\omega_z \pm k_i \omega_1 \pm k_q \omega_2$	$z_1 z_2 A_{ni} A_{mq} J_{k_i} \left(k_i \frac{\Delta f' m_i}{r_1} \right) J_{k_q} \left(k_q \frac{\Delta f' m_q}{r_2} \right)$	$n = lz_1 \pm k_i$ $m = pz_2 \pm k_q$

зубчатого зацепления появляются комбинационные частоты

$$(l + p)\omega_z \pm k_i\omega_1 \pm k_q\omega_z; p\omega_z \pm k_q\omega_z; l\omega_z \pm k_i\omega_1,$$

где ω_z — зубцовая частота; l, p, k_i, k_q — целые числа 1, 2, 3... .

За счет погрешности шага в спектре вибрации редуктора появляется много дополнительных составляющих. В нем будут содержаться гармо-

ники не только возмущающих сил от неточности изготовления зубчатых зацеплений, но и комбинационные гармоники от этих сил и флуктуации жесткости. При увеличении погрешности шага происходит расширение спектра комбинационных частот изменения жесткости, увеличение вибрации, возрастание динамических нагрузок в местах контакта зубьев и сокращение ресурса работы.

Литература

1. Семенова Е. Г. Основы моделирования и диагностики антенных устройств бортовых комплексов. — СПб.: Политехника, 2003. — 186 с.
2. Голубков В. А. и др. Математическая модель расчета вибрации ступени редуктора / В. А. Голубков, А. О. Смирнов, Т. Т. Шарафудинов, И. Н. Лукьяненко // Информационно-управляющие системы. 2014. № 6. С. 87–92.
3. Голубков В. А., Голубков А. В., Шарафудинов Т. Т. Анализ вибрации зубчатых зацеплений при проскальзывании зубьев // Завалишинские чтения'13: тр. конф., Санкт-Петербург, 8–12 апреля 2013 г. СПб.: ГУАП, 2013. С. 46–48.
4. Голубков В. А., Голубков А. В., Шарафудинов Т. Т. Анализ влияния процессов проскальзывания на вибрацию зубчатых зацеплений // Завалишинские чтения'14: тр. конф., Санкт-Петербург, 8–12 апреля 2014 г. СПб.: ГУАП, 2014. С. 101–104.
5. Веркович Г. А. и др. Справочник конструктора точного приборостроения / Г. А. Веркович, Е. Н. Головенкин, В. А. Голубков и др. — Л.: Машиностроение, 1989. — 792 с.

UDC 681.326.7

doi:10.15217/issn1684-8853.2016.6.99

Modeling Spectral Characteristics of Gear Engagement Stiffness

Golubkov V. A.^a, PhD, Tech., Associate Professor, viktor-golubkov@yandex.ru

Shishlakov V. F.^a, Dr. Sc., Tech., Professor, svfmail@yandex.ru

Sharafudinov T. T.^a, Lecturer, timsx@mail.ru

Lukyanenko I. N.^a, PhD, Tech., Associate Professor, irina.n.lukyanenko@gmail.com

^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The available mathematical models of calculating gear vibration take into account possible manufacturing errors in order to improve reliability. However, these models do not take into account the influence of the errors in manufacturing and assembly on the fluctuation of stiffness parameters of the gears. **Purpose:** Our goal is mathematical modeling of spectral characteristics of a gear engagement stiffness which varies depending on the inaccuracies in the gear pitch. **Results:** The mathematical modeling has shown that the stiffness fluctuates not only at the gear frequencies but also at the combination frequencies. Hence, the vibration spectrum will contain not just the harmonics of the perturbing forces but also the combination harmonics of these forces and stiffness fluctuations. **Practical relevance:** The proposed mathematical model allows you to more precisely calculate the vibration of the gears, evaluate the dynamic loads in the contact zones, and much more accurately estimate the operational life and the reliability of a gearbox. At the development stage, it allows you to normalize technological errors of the elements to achieve the desired operational life.

Keywords — Gearing, Stiffness, Modeling, Spectral Characteristics.

References

6. Semenova E. G. *Osnovy modelirovaniia i diagnostiki antennykh ustroystv bortovykh kompleksov* [Fundamentals of Modeling and Diagnostics Antenna Devices Onboard Complexes]. Saint-Petersburg, Politekhnik Publ., 2003. 186 p. (In Russian).
7. Golubkov V. A., Smirnov A. O., Sharafudinov T. T., Lukyanenko I. N. Mathematical Model of Reducer Step Vibration. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2014, no. 6(73), pp. 87–93 (In Russian).
8. Golubkov V. A., Golubkov A. V., Sharafudinov T. T. Vibration Analysis of Slip Teeth Gearing. *Trudy konferentsii "Zavalishinskie chteniia'13"* [Proc. Conf. "Zavalishinskie Reading'13"]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2013, pp. 46–48 (In Russian).
9. Golubkov V. A., Golubkov A. V., Sharafudinov T. T. Analysis of the Impact of Slip Processes on Vibration Gearing. *Trudy konferentsii "Zavalishinskie chteniia'14"* [Proc. Conf. "Zavalishinskie Reading'14"]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2014, pp. 101–104 (In Russian).
10. Verkovich V. A., Golovenkin E. N., Golubkov V. A., et al. *Spravochnik konstruktora tochnogo priborostroeniia* [Reference Book for Precision Instruments Designer]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1989. 792 p. (In Russian).