

# ВЗАИМНОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ СИГНАЛОВ И ОЦЕНКА СКОРОСТИ ВЕТРА В МНОГОПОЗИЦИОННЫХ МЕТЕОРАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

П. И. Ермаков<sup>а</sup>, аспирант

А. А. Монаков<sup>а</sup>, доктор техн. наук, профессор

<sup>а</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ

**Постановка проблемы:** в связи с активным внедрением многопозиционных метеорадиолокационных систем на базе малогабаритных метеорологических локаторов актуальна проблема разработки эффективных алгоритмов обработки сигналов в таких системах. **Цель исследования:** разработка и анализ качества алгоритмов оценки средней скорости ветра в многопозиционных метеорадиолокационных системах. **Результаты:** получено общее выражение для пространственно-временной взаимнокорреляционной функции сигналов в бистатической метеорадиолокационной системе. Сделан вывод о независимости сигналов в рассмотренной системе. Предложен двухэтапный алгоритм оценки скорости ветра, основанный на известных методах оценки доплеровской частоты и ширины спектра, а также рассмотрен ряд его упрощенных вариантов. Проведено математическое моделирование для сравнения качества работы предложенных алгоритмов. Сделан вывод о том, что определяющее значение на качество оценки скорости ветра оказывает точность используемых на первом этапе алгоритмов оценки доплеровской частоты и ширины спектра. Упрощения алгоритма на втором этапе оценки несущественно ухудшают ее качество. **Практическая значимость:** полученные результаты могут быть использованы при разработке многопозиционных метеорадиолокационных систем для оценки вектора средней скорости ветра.

**Ключевые слова** — радиолокационная метеорология, скорость ветра, объединение данных, многопозиционная метеорологическая радиолокация, доплеровская частота.

## Введение

Одной из основных задач, решаемых в рамках метеорологической радиолокации, является оценка средней скорости ветра. В случае одного метеорологического радиолокатора (МРЛ) эту задачу можно свести к оценке средней частоты доплеровского спектра метеосигнала. Полученная таким образом оценка несет информацию только о радиальной составляющей средней скорости ветра относительно направления на точку расположения МРЛ. Чтобы восстановить полный вектор скорости ветра, необходимо иметь возможность наблюдать поле скоростей ветра как минимум с трех различных ракурсов (по числу компонент скорости ветра). Такая необходимость приводит к созданию многопозиционной метеорологической радиолокационной системы (ММРЛС). Настоящая работа посвящена синтезу алгоритмов оценки вектора средней скорости ветра в ММРЛС.

Вопросу, поднимаемому в статье, посвящено большое количество публикаций (см., например, [1–4]). Обобщая материалы этих публикаций, можно считать, что в большинстве случаев оценка вектора средней скорости ветра сводится к минимизации некоторого функционала ошибок:

$$J = \sum_i J_i. \quad (1)$$

При этом  $J_0$  — основная компонента функционала ошибок, представляющая собой невязку измеренных и истинных радиальных скоростей ветра:

$$J_0 = \sum_m w_m \left( V_r^{(m)} - \mathbf{n}_m \mathbf{V}_0 \right)^2, \quad (2)$$

где суммирование ведется по всем МРЛ;  $w_m$  — вес, ассоциированный с  $m$ -м МРЛ;  $V_r^{(m)}$  — радиальная скорость ветра по отношению к  $m$ -му МРЛ;  $\mathbf{n}_m$  — единичный вектор (орт), указывающий направление на точку наблюдения из точки, где расположен  $m$ -й МРЛ;  $\mathbf{V}_0$  — вектор истинной средней скорости ветра в точке наблюдения.

Остальные члены суммы (1) характеризуют дополнительные ограничения, налагаемые на оценку скорости ветра. В качестве наиболее часто используемых ограничений можно привести требование гладкости поля скоростей ветра, требование выполнения условия неразрывности и т. п.

В настоящей работе будет рассмотрена основная компонента функции ошибок  $J_0$ . Необходимость в освещении этой темы продиктована тем, что довольно затруднительно найти в литературе строгое обоснование вида функции  $J_0$ . В особенности это касается весов  $\{w_m\}$ , входящих в выражение (2). Чаще всего встречаются два варианта их выбо-

ра: равные веса [4] или веса, обратно пропорциональные некоторой степени расстояния до точки наблюдения [3]. Однако ни один из этих вариантов не является достаточно обоснованным.

В первом разделе статьи рассмотрена пространственно-временная взаимнокорреляционная функция (ВКФ) сигналов ММРЛС. Во втором разделе, посвященном алгоритмам измерения вектора средней скорости ветра, предложен новый двухэтапный алгоритм, основанный на предварительной оценке доплеровской частоты и ширины спектра известными методами [5–7]. Также в этом разделе вычислены границы Крамера — Рао для оценок компонент вектора средней скорости ветра. В третьем разделе приведены результаты математического моделирования предложенных алгоритмов. В заключении сделаны выводы о качестве предложенных алгоритмов.

### Пространственно-временная ВКФ сигналов ММРЛС

Для покрытия большой зоны ответственности ММРЛС принято располагать отдельные МРЛ на относительно большом удалении друг от друга. Представляет интерес выяснить, имеется ли существенная корреляционная связь сигналов МРЛ, расположенных в двух удаленных точках.

#### Модель турбулентного движения воздуха

Чаще всего при описании турбулентности используют методы дискретных и непрерывных порывов [8]. Метод дискретных порывов исторически появился раньше, проще в реализации. Однако в силу довольно грубых допущений он значительно уступает методу непрерывных порывов в точности. В настоящей работе будет использоваться метод непрерывных порывов.

Этот метод позволяет охарактеризовать поле скоростей в некоторой точке тремя независимыми стационарными гауссовыми случайными процессами:  $u_x(t)$ ,  $u_y(t)$  и  $u_z(t)$ . При этом ось  $x$  системы координат ориентирована по направлению средней скорости ветра  $V_0$ , ось  $y$  лежит в горизонтальной плоскости, а ось  $z$  составляет с  $x$  и  $y$  правую систему координат. В такой системе  $u_x(t)$  называется продольной составляющей турбулентности,  $u_y(t)$  — поперечной, а  $u_z(t)$  — вертикальной. Поскольку процессы  $u_x(t)$ ,  $u_y(t)$  и  $u_z(t)$  в силу сделанного предположения стационарны, для них можно ввести спектральные плотности мощности (СПМ)  $\Phi_x(\omega)$ ,  $\Phi_y(\omega)$  и  $\Phi_z(\omega)$ , которых достаточно для полного статистического описания турбулентности, поскольку его компоненты по допущению гауссовы. Наиболее известными моделями метода непрерывных порывов являются модели Драйдена (Dryden) [9] и фон Кармана (von Kármán) [10]. СПМ компонент турбулент-

ности в этих моделях задаются следующим образом:

$$\Phi_x^{(D)}(\omega) = \sigma_x^2 \frac{2L_x}{\pi V_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{L_x \omega}{V_0}\right)^2},$$

$$\Phi_y^{(D)}(\omega) = \sigma_y^2 \frac{2L_y}{\pi V_0} \frac{1 + 12 \left(\frac{L_y \omega}{V_0}\right)^2}{\left(1 + 4 \left(\frac{L_y \omega}{V_0}\right)^2\right)^2},$$

$$\Phi_z^{(D)}(\omega) = \sigma_z^2 \frac{2L_z}{\pi V_0} \frac{1 + 12 \left(\frac{L_z \omega}{V_0}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{L_z \omega}{V_0}\right)^2\right)^2},$$

$$\Phi_x^{(K)}(\omega) = \sigma_x^2 \frac{2L_x}{\pi V_0} \frac{1}{\left(1 + \left(1,339 \frac{L_x \omega}{V_0}\right)^2\right)^{\frac{5}{6}}};$$

$$\Phi_y^{(K)}(\omega) = \sigma_y^2 \frac{2L_y}{\pi V_0} \frac{1 + \frac{8}{3} \left(2,678 \frac{L_y \omega}{V_0}\right)^2}{\left(1 + \left(2,678 \frac{L_y \omega}{V_0}\right)^2\right)^{\frac{11}{6}}};$$

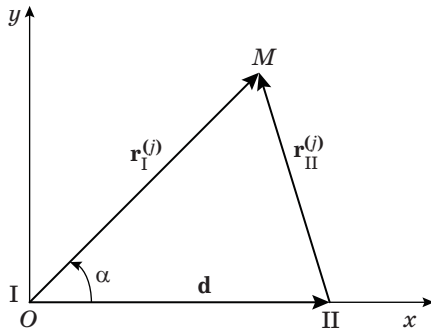
$$\Phi_z^{(K)}(\omega) = \sigma_z^2 \frac{2L_z}{\pi V_0} \frac{1 + \frac{8}{3} \left(2,678 \frac{L_z \omega}{V_0}\right)^2}{\left(1 + \left(2,678 \frac{L_z \omega}{V_0}\right)^2\right)^{\frac{11}{6}}},$$

где  $\sigma_i^2$ ,  $L_i$  — дисперсия и масштаб соответствующей компоненты поля турбулентности. В статье использована модель фон Кармана.

#### Общее выражение

##### для пространственно-временной ВКФ

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 1: в точке I, совпадающей с началом координат O, расположен первый МРЛ; в точке II расположен второй МРЛ, и его положение относительно первого МРЛ определяется радиус-вектором  $\mathbf{d}$ , направленным вдоль оси  $x$ ; в точке M на плоскости  $xOy$  расположена метеочастица пренебрежимо малого размера, движение которой характеризуется вектором скорости  $\mathbf{V}$ . Положение точ-



■ **Рис. 1.** К выводу пространственно-временной ВКФ  
 ■ **Fig. 1.** On the deduction of spatio-temporal cross-correlation function

ки  $M$  относительно точек  $I$  и  $II$  характеризуется радиус-векторами  $r_I^{(j)}$  и  $r_{II}^{(j)}$  соответственно. Ось  $z$  направлена перпендикулярно к плоскости рисунка и образует с осями  $x$  и  $y$  правую систему координат (СК) СК<sub>0</sub>.

При выводе выражения для ВКФ примем следующие физически обоснованные допущения:

— пренебрежем перемещением антенн МРЛ за время наблюдения сигнала. Данное допущение оправдано при типичных для МРЛ скоростях вращения антенн и частотах повторения сигнала [7];

— будем считать диаграммы направленности МРЛ настолько узкими, что можно пренебречь разницей в доплеровских сдвигах сигналов, входящих с разных угловых направлений;

— будем полагать, что расстояние между МРЛ  $d = |d|$  много меньше расстояний от МРЛ до точки  $M$ :

$$\begin{aligned} d \ll r_I^{(j)} &= |r_I^{(j)}|; \\ d \ll r_{II}^{(j)} &= |r_{II}^{(j)}|. \end{aligned} \quad (3)$$

Если при данном допущении окажется, что радиус пространственной корреляции сигнала, рассеянного разрешаемым объемом метеоцели, меньше, чем расстояние между МРЛ, то анализ прочих случаев не нужен.

При сделанных допущениях комплексные амплитуды сигналов на выходах приемников первого и второго МРЛ будут равны:

$$\begin{aligned} e_j^{(I)}(t) &= \dot{\rho}_j \exp(-i2kr_I^{(j)}); \\ e_j^{(II)}(t) &= \dot{\rho}_j \exp(-i2kr_{II}^{(j)}), \end{aligned}$$

где  $\dot{\rho}_j$  — комплексная амплитуда сигнала, отраженного от метеочастицы  $M$ ;  $k$  — волновое число. Комплексные амплитуды  $\dot{\rho}_j$  для обоих МРЛ положены одинаковыми, поскольку влиянием раз-

ницы в затухании принятых волн на значение ВКФ можно пренебречь в силу неравенства (3).

Пусть в некоторой области  $S$  присутствует большое количество метеочастиц со своими собственными скоростями движения. Тогда комплексные напряжения на входах приемников первого и второго МРЛ будут соответственно равны суммам напряжений, созданных отражениями от всех метеочастиц в области  $S$ :

$$\begin{aligned} e^{(I)}(t) &= \sum_j \dot{\rho}_j \exp(-i2kr_I^{(j)}); \\ e^{(II)}(t) &= \sum_j \dot{\rho}_j \exp(-i2kr_{II}^{(j)}). \end{aligned}$$

Вычислим ВКФ комплексных напряжений на выходах приемников первого и второго МРЛ:

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \left\langle e^{*(I)}(t) e^{(II)}(t+\tau) \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{j_1, j_2} \dot{\rho}_{j_1}^* \dot{\rho}_{j_2} \exp\left\{i2k \left[ r_I^{(j_1)}(t) - r_{II}^{(j_2)}(t+\tau) \right] \right\} \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_j p_j \exp\left\{i2k \left[ r_I^{(j)}(t) - r_{II}^{(j)}(t+\tau) \right] \right\} \right\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $p_j = \left\langle |\dot{\rho}_j|^2 \right\rangle$  — средняя мощность сигнала, отраженного от  $j$ -й частицы.

Последнее равенство в формуле (4) справедливо, так как сигналы, отраженные от разных метеочастиц, независимы [11]. Рассмотрим отдельно показатель экспоненты в (4) и опустим для простоты индексы  $j$ , имея их в виду при дальнейших вычислениях:

$$\begin{aligned} r_I(t) - r_{II}(t+\tau) &= |r_I(0) + \mathbf{V}t| - \\ &- |r_I(0) + \mathbf{V}(t+\tau) - \mathbf{d}| \approx \mathbf{n}(0)\mathbf{d} - \mathbf{n}(0)\mathbf{V}\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}(t) = r_I(t)/r_I(t)$  — орт направления от первого МРЛ к  $j$ -й метеочастице. Приближенное равенство в (5) справедливо, поскольку верны неравенства (3). Тогда

$$r_I(t) - r_{II}(t+\tau) \approx d \cos \alpha_j + V_j \tau,$$

где  $\alpha_j$  — угол между осью  $x$  и направлением от первого МРЛ к  $j$ -й метеочастице;  $V_j$  — радиальная составляющая скорости  $j$ -й метеочастицы по отношению к первому МРЛ (сближение соответствует положительному значению  $V_j$ ).

Тогда корреляционная функция (КФ) равна

$$R(\tau) = \left\langle \sum_j p_j \exp\left\{i2k(d \cos \alpha_j + V_j \tau)\right\} \right\rangle. \quad (6)$$

Исследуем статистические характеристики радиальной скорости  $V_j$ , пользуясь моделью непрерывных порывов, описанной в подразд. «Модель турбулентного движения воздуха». Для этого выразим  $V_j$  через компоненты поля скоростей:

$$V_j = \mathbf{n}(0)\mathbf{V} = \mathbf{n}(0)(\mathbf{V}_0 + \mathbf{M}\mathbf{u}(0)). \quad (7)$$

Перепишем (7) с учетом допущения о том, что ширина диаграммы направленности МРЛ мала:

$$V_j = \mathbf{n}(0)(\mathbf{V}_0 + \mathbf{M}\mathbf{u}(0)) = V_r + \mathbf{n}^T\mathbf{M}\mathbf{u}, \quad (8)$$

где  $V_r$  — средняя радиальная скорость ветра по отношению к первому МРЛ, при этом в силу (3) мы будем трактовать эту скорость как радиальную скорость по отношению к системе из двух МРЛ;  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$  — орт вектора, проведенного из точки расположения первого МРЛ в центр наблюдаемой области  $S$ ;  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$  — вектор турбулентной скорости в СК<sub>v</sub>, ориентированной по вектору средней скорости  $\mathbf{V}_0 = (V_x, V_y, V_z)^T$  (см. подразд. «Модель турбулентного движения воздуха»);  $\mathbf{M}$  — ортогональная матрица преобразования СК<sub>v</sub> для ее совмещения с СК<sub>0</sub>. Этот поворот позволяет преобразовать координаты  $\mathbf{u}$  в СК<sub>0</sub>. Искомое преобразование — это композиция поворота вокруг  $y$  против часовой стрелки на угол  $\pi/2 - \theta$  и поворота вокруг  $z$  по часовой стрелке на угол  $\varphi$ , где  $\varphi$  и  $\theta$  — азимут и полярный угол вектора  $\mathbf{V}_0$ .

Анализируя (8), приходим к выводу, что  $\mathbf{n}^T\mathbf{M}\mathbf{u}$  — линейная комбинация компонент турбулентной скорости и, следовательно, является нормальной случайной величиной  $\delta V$  с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_V^2$ . Тогда  $V_j$  можно представить в следующем виде:

$$V_j = V_r + \delta V. \quad (9)$$

Подставим (9) в (6):

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \sum_j p_j \exp(i2kV_r\tau) \times \\ &\times \exp(i2kd\cos\alpha_j) \langle \exp(i2k\delta V\tau) \rangle = \\ &= \exp(i2kV_r\tau) \langle \exp(i2k\delta V\tau) \rangle \times \\ &\times \sum_j p_j \exp(i2kd\cos\alpha_j). \end{aligned}$$

Поскольку  $\delta V$  — нормальная случайная величина:

$$\langle \exp(i2k\delta V\tau) \rangle = \varphi_V(2k\tau) = \exp\{-2(k\sigma_V\tau)^2\},$$

где  $\varphi_V(\cdot)$  — характеристическая функция случайной величины  $\delta V$ . Окончательно пространственно-временная ВКФ

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \exp(i2kV_r\tau) \exp\{-2(k\sigma_V\tau)^2\} \times \\ &\times \sum_j p_j \exp(i2kd\cos\alpha_j). \end{aligned}$$

Распределение средней мощности по метеочастицам  $p_j$  характеризует отражающие свойства рассматриваемого объема и в силу высокой пространственной плотности метеочастиц обычно выражается в форме непрерывной функции пространственных координат  $p(x, y)$ . Тогда КФ можно представить в виде

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \exp(i2kV_r\tau) \exp\{-2(k\sigma_V\tau)^2\} \times \\ &\times \int_S p(x, y) \exp(i2kd\cos\alpha) ds. \quad (10) \end{aligned}$$

В формуле (10) пространственную корреляцию характеризует множитель  $\int_S p(x, y) \exp(i2kd\cos\alpha) \times ds$ . Введем понятие пространственной корреляционной функции (ПКФ):

$$B(x) = \int_S p(\mathbf{r}) \exp(i2kx\cos\alpha) d\mathbf{r}, \quad (11)$$

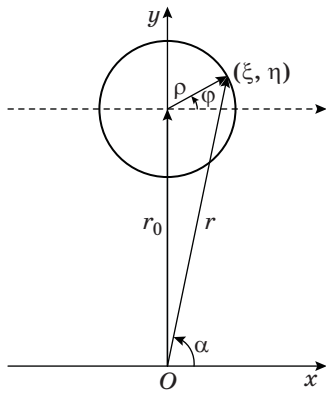
где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки в области  $S$ ;  $x$  — параметр, характеризующий расстояние между точками наблюдения метеосигнала. На практике удобно пользоваться нормированной ПКФ:

$$b(x) = \frac{\int_S p(\mathbf{r}) \exp(i2kx\cos\alpha) d\mathbf{r}}{\int_S p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}.$$

Эта функция характеризует статистическую связь между значениями принимаемого метеосигнала в разных пространственных точках.

### Оценка интервала пространственной корреляции

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 2: на расстоянии  $r_0$  от первого МРЛ по оси  $y$  находится центр облака метеочастиц в виде круга радиусом  $s$ . Распределение  $p(\mathbf{r})$  внутри облака будем считать равномерным и равным единице. Текущая точка внутри облака характеризуется координатами  $(\xi, \eta)$  относительно его центра. Расстояние от точки  $(\xi, \eta)$  до центра облака —  $\rho$ . Угол  $\varphi$  — это угол между вектором, проведенным из центра облака в точку  $(\xi, \eta)$ , и осью  $x$ . Расстояние между позицией первого МРЛ и точкой  $(\xi, \eta)$  обозначено как  $r$ . Угол между вектором,



■ **Рис. 2.** Пример расчета пространственно-временной ВКФ  
 ■ **Fig. 2.** Example of spatio-temporal cross-correlation function computing

проведенным из позиции первого МРЛ в точку  $(\xi, \eta)$ , и осью  $x$  обозначен как  $\alpha$ .

Вычислим ПКФ по формуле (11):

$$B(x) = \int_S \exp(i2kx \cos \alpha) dr.$$

Вычислим  $\cos \alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (\eta + r_0)^2}} \approx \frac{\rho \cos \varphi}{r_0}.$$

Тогда

$$B(x) \approx \int_S \exp\left(\frac{i2kx\rho \cos \varphi}{r_0}\right) dr. \quad (12)$$

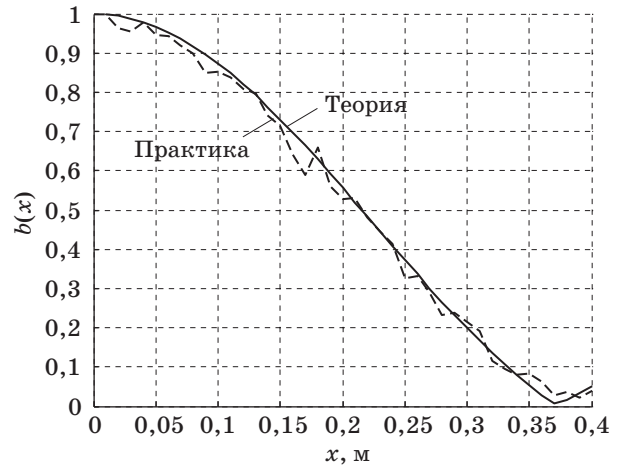
Перейдем к полярным координатам и вычислим интеграл (12):

$$B(x) \approx \int_S \exp\left(\frac{i2kx\rho \cos \varphi}{r_0}\right) dr = \int_0^s \int_0^{2\pi} \rho \exp\left(\frac{i2kx\rho \cos \varphi}{r_0}\right) d\rho d\varphi = 2\pi s^2 \frac{J_1\left(\frac{2ksx}{r_0}\right)}{\left(\frac{2ksx}{r_0}\right)}, \quad (13)$$

где  $J_1(\cdot)$  — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Интервал пространственной корреляции можно оценить по первому нулю функции Бесселя в (13). Известно, что первый ноль  $J_1(t)$  равен  $t_0 = 3,832$ . Зная это, можно вычислить соответствующее значение радиуса корреляции:

$$x_0 = 3,832 \frac{r_0}{2ks} \approx 0,37 \text{ м.}$$



■ **Рис. 3.** Пространственная корреляционная функция и ее оценка  
 ■ **Fig. 3.** True spatial correlation function and its estimate

Результаты расчета  $B(x)$  в соответствии с уравнением (13) и оценка по результатам математического моделирования, представленные на рис. 3, подтверждают правильность уравнения (13).

Таким образом, поскольку значение  $x_0$  пренебрежимо мало по сравнению с применяемыми на практике значениями пространственного разнесения МРЛ, сигналы МРЛ в ММРЛС можно считать статистически независимыми.

### Оценка скорости ветра

Пользуясь результатами разд. «Пространственно-временная ВКФ сигналов ММРЛС», можно получить выражения, связывающие параметры сигнала (доплеровскую частоту и ширину спектра) с параметрами поля скоростей ветра (средней скоростью ветра и дисперсией компонент вектора скорости).

Средняя частота СПМ метео сигнала

$$f_{cp} = \frac{2V_r}{\lambda} = \frac{2nV_0}{\lambda}. \quad (14)$$

Среднеквадратическая ширина СПМ

$$\Delta F = \frac{2\sigma_V}{\lambda}. \quad (15)$$

В соответствии с результатами предыдущего раздела будем считать сигналы отдельных МРЛ в составе ММРЛС статистически независимыми.

### Функция правдоподобия принятого сигнала и потенциальная точность оценки скорости ветра

Рассмотрим отдельно один МРЛ системы. В качестве исходных данных пусть имеется выборка

отсчетов комплексной огибающей принятого сигнала размера  $N$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_n = (u[1], \dots, u[k], \dots, u[N]),$$

где  $\mathbf{u}_s$  — вектор отсчетов метеосигнала;  $\mathbf{u}_n$  — вектор отсчетов дискретного белого шума.

В соответствии со сделанным в предыдущем разделе предположением  $\mathbf{u}(t)$  — комплексный стационарный гауссовый случайный процесс [11]. Тогда его фурье-образ

$$\mathbf{U}(f) = F[\mathbf{u}(t)](f) = \mathbf{U}_s(f) + \mathbf{U}_n(f)$$

тоже будет комплексным гауссовым процессом в силу линейности преобразования Фурье. При этом в силу стационарности его КФ равна

$$R_U(f, f') = A(f)\delta(f - f'), \quad (16)$$

где  $A(f)$  — СПМ метеосигнала.

Полагая, что средняя скорость ветра  $\mathbf{V}_0$  является параметром СПМ  $A(f)$ , получим следующее выражение для плотности распределения случайного отсчета  $S[i] = |U[i]|^2$ :

$$p(S[i] | \mathbf{V}_0) = \frac{1}{A(i\Delta f, \mathbf{V}_0) + A_n} \exp\left\{-\frac{S[i]}{A(i\Delta f, \mathbf{V}_0) + A_n}\right\},$$

где  $\Delta f = 1/(NT)$  — шаг дискретизации по частоте;  $T$  — шаг дискретизации по времени;  $A_n$  — средняя мощность дискретного белого шума.

Тогда совместная плотность распределения случайного вектора

$$\mathbf{S} = (|U[1]|^2, \dots, |U[i]|^2, \dots, |U[N]|^2)$$

будет равна произведению частных плотностей:

$$p(\mathbf{S} | \mathbf{V}_0) = \prod_{i=1}^N p(S[i] | \mathbf{V}_0),$$

так как согласно (16) отсчеты выборочной СПМ вектора  $\mathbf{S}$  статистически независимы [11]. Тогда в силу независимости сигналов отдельных МРЛ функция правдоподобия (ФП) для выборок всех МРЛ будет равна

$$p(\mathbf{S}^{(1)}, \dots, \mathbf{S}^{(M)} | \mathbf{V}_0) = \prod_{m=1}^M \prod_{i=1}^N \frac{1}{A^{(m)}(i\Delta f, \mathbf{V}_0) + A_n^{(m)}} \times \exp\left\{-\frac{S^{(m)}[i]}{A^{(m)}(i\Delta f, \mathbf{V}_0) + A_n^{(m)}}\right\}, \quad (17)$$

где  $M$  — общее число МРЛ в ММРЛС;  $A^{(m)}(f)$  и  $A_n^{(m)}(f)$  — СПМ полезного сигнала и средняя мощность шума для  $m$ -го МРЛ;  $\mathbf{S}^{(m)}$  — выборочный вектор  $m$ -го МРЛ.

Дважды дифференцируя логарифм ФП (17) по  $j$ -й компоненте вектора скорости ветра, можно вычислить границу Крамера — Рао для этой компоненты:

$$\sigma_{j \min}^2 \approx \frac{\Delta f}{\sum_{m=1}^M \int_{-1/(2T)}^{1/(2T)} \left( \frac{1}{A^{(m)}(f, \mathbf{V}_0) + A_n^{(m)}} \times \frac{\partial A^{(m)}(f, \mathbf{V}_0)}{\partial V_j} \right)^2 df} \quad (18)$$

### Алгоритм оценки вектора средней скорости ветра

Вернемся к ФП (17). Рассмотрим задачу совместной оценки компонент вектора средней скорости ветра  $\mathbf{V}_0$ . Для решения этой задачи необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln p(\mathbf{S}^{(1)}, \dots, \mathbf{S}^{(M)} | \mathbf{V}_0)}{\partial V_x} = 0 \\ \frac{\partial \ln p(\mathbf{S}^{(1)}, \dots, \mathbf{S}^{(M)} | \mathbf{V}_0)}{\partial V_y} = 0 \\ \frac{\partial \ln p(\mathbf{S}^{(1)}, \dots, \mathbf{S}^{(M)} | \mathbf{V}_0)}{\partial V_z} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Введем функцию

$$\Lambda(\mathbf{S}^{(m)} | f_{cp}^{(m)}(\mathbf{V}_0), \Delta F^{(m)}(\mathbf{V}_0)) = \ln p(\mathbf{S}^{(m)} | \mathbf{V}_0),$$

где  $f_{cp}^{(m)}$  и  $\Delta F^{(m)}$  — доплеровская частота и ширина спектра для  $m$ -го МРЛ, зависящие от вектора средней скорости ветра. Такая запись допустима, если принять допущение о гауссовой СПМ полезного сигнала, которое оправдано в большинстве практических ситуаций [11]. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\mathbf{S}^{(1)}, \dots, \mathbf{S}^{(M)} | \mathbf{V}_0)}{\partial V_j} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \ln p(\mathbf{S}^{(m)} | \mathbf{V}_0)}{\partial V_j} = \\ &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial \Lambda(\mathbf{S}^{(m)} | f_{cp}^{(m)}, \Delta F^{(m)})}{\partial f_{cp}^{(m)}} \frac{df_{cp}^{(m)}}{dV_j} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^M \frac{\partial \Lambda(\mathbf{S}^{(m)} | f_{cp}^{(m)}, \Delta F^{(m)})}{\partial \Delta F^{(m)}} d\Delta F^{(m)}.$$

Можно показать [12], что частные производные  $\Lambda$  в этом уравнении обращаются в ноль тогда, когда  $f_{cp}^{(m)}$  и  $\Delta F^{(m)}$  — оценки максимального правдоподобия доплеровской частоты и ширины спектра в  $m$ -м МРЛ. Таким образом, если в систему (19) подставить оценки максимального правдоподобия доплеровских частот и ширин спектра для всех МРЛ ММРЛС, то система будет совместна.

Из проведенных рассуждений можно заключить, что в качестве оценки вектора средней скорости ветра можно взять такой вектор  $\mathbf{V}_0$ , значение которого соответствует оценкам максимального правдоподобия  $f_{cp}(\mathbf{V}_0)$  и  $\Delta F(\mathbf{V}_0)$  для всех МРЛ в составе ММРЛС. Зависимости доплеровской частоты и ширины спектра от вектора средней скорости ветра уже известны [см. (14) и (15)]. Таким образом, поставленную задачу можно решить в два этапа:

- получить оценки максимального правдоподобия доплеровских частот и ширин спектра [12];
- по известным значениям  $f_{cp}$  и  $\Delta F$  для произвольного числа МРЛ определить  $\mathbf{V}_0$ .

### Вычисление средней скорости ветра

При известных оценках  $f_{cp}$  и  $\Delta F$  для всех МРЛ можно вычислить соответствующий этим оценкам вектор скорости ветра  $\mathbf{V}_0$ . В общем случае при известных функциональных зависимостях доплеровских частот и ширин спектра от скорости ветра (14), (15) такая задача должна сводиться к решению системы уравнений

$$\begin{cases} f_{cp}^{(1)}(\mathbf{V}_0) = f_{cp}^{(1)} \\ \vdots \\ f_{cp}^{(M)}(\mathbf{V}_0) = f_{cp}^{(M)} \\ \Delta F^{(1)}(\mathbf{V}_0) = \Delta F^{(1)} \\ \vdots \\ \Delta F^{(M)}(\mathbf{V}_0) = \Delta F^{(M)} \end{cases}, \quad (20)$$

где  $f_{cp}^{(m)}$  и  $\Delta F^{(m)}$  — оценки доплеровской частоты и ширины спектра  $m$ -го МРЛ.

Ввиду того, что получение оценок  $f_{cp}^{(m)}$  и  $\Delta F^{(m)}$  сопровождается ошибками, решение системы (20) не представляется возможным в силу возможной некорректности данной задачи [13]. Если известны характеристики ошибок измерителей, общий подход к решению подобного рода задач заключается в применении кри-

терия взвешенного минимума среднеквадратической ошибки:

$$\mathbf{V}_{0MSE} = \arg \min_{\mathbf{V}_0} \times \sum_{m=1}^M \left[ \frac{\left( f_{cp}^{(m)}(\mathbf{V}_0) - f_{cp}^{(m)} \right)^2}{\sigma_f^{2(m)}} + \frac{\left( \Delta F^{(m)}(\mathbf{V}_0) - \Delta F^{(m)} \right)^2}{\sigma_{\Delta F}^{2(m)}} \right], \quad (21)$$

при этом можно использовать оценки  $f_{cp}^{(m)}$  и  $\Delta F^{(m)}$ , полученные любыми методами, для которых известны дисперсии оценок средней частоты  $\sigma_f^2$  и ширины спектра  $\sigma_{\Delta F}^2$ .

### Компьютерное моделирование

Будем рассматривать ММРЛС наземного базирования, в состав которой входят три МРЛ со следующими координатами:  $M_1 = (-7000, -7000, 0)$ ,  $M_2 = (5000, -5000, 0)$ ,  $M_3 = (0, 12000, 0)$ .

Будем считать характеристики всех МРЛ одинаковыми и типичными:

- длина волны излучения  $\lambda = 3,2$  см;
- ширина диаграммы направленности в азимутальной и угломестной плоскостях  $\alpha_{\perp} = \varepsilon_{\perp} = 3^\circ$ ;
- разрешающая способность по дальности  $\delta r_u = 100$  м;
- размер выборки  $N = 64$ ;
- частота повторения импульсов  $F_n = 1/T = 2$  кГц.

Для моделирования турбулентности будем использовать модель фон Кармана, при этом будем считать вектор средней скорости ветра неизменным в пространстве. Примем следующие характеристики модели турбулентности:

- масштаб турбулентности  $L_x = L_y = L_z = 2000$  м;
- среднеквадратическое отклонение (СКО) продольной составляющей скорости ветра  $\sigma_x = 3$  м/с;
- СКО поперечной составляющей скорости ветра  $\sigma_y = 2$  м/с;
- СКО вертикальной составляющей скорости ветра  $\sigma_z = 1,5$  м/с;
- средняя скорость ветра  $V_0 = 8$  м/с;
- ориентация вектора средней скорости ветра (азимут и угол места):  $\varphi = 45^\circ$ ,  $\theta = -10^\circ$ .

Отражающие свойства наблюдаемого метеообразования и мощность шума приемников МРЛ выбраны такими, чтобы обеспечить для МРЛ отношение сигнал/шум 10 дБ на дальности 10 км.

Для анализа качества алгоритмов оценки средней скорости ветра построим графики зависимостей нормированных к  $V_0$  СКО оценок компонент вектора средней скорости ветра от точки оценивания.

Рассмотрим точки наблюдения, расположенные вдоль прямой, параллельной оси  $x$  и проходящей на высоте 3000 м ( $z = 3000$ ). Концы инте-

ресующего нас отрезка по оси  $x$  будут иметь координаты  $-5000$  и  $5000$  м.

На графиках построим следующие кривые:

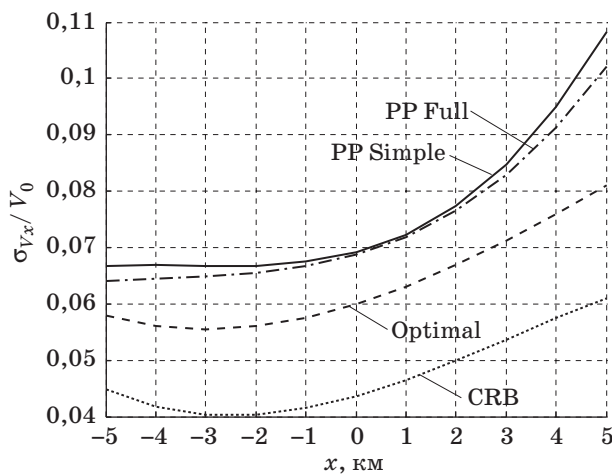
— границы Крамера — Рао для СКО оценок компонент средней скорости ветра, вычисленные по формуле (18) с гауссовой аппроксимацией СПМ полезного сигнала (обозначение — CRB);

— СКО оценок компонент скорости ветра по формуле (21), вычисляемых на основе оценок максимального правдоподобия доплеровской частоты и ширины спектра (обозначение — Optimal);

— СКО оценок компонент скорости ветра по формуле (21), вычисляемых на основе оценок доплеровской частоты и ширины спектра по методу пульс-пары [11] (обозначение — PP Full);

— СКО упрощенных оценок компонент скорости ветра по формуле (2) с одинаковыми весами, вычисляемых на основе оценок доплеровской частоты и ширины спектра по методу пульс-пары (обозначение — PP Simple).

Проиллюстрируем результаты на примере графика СКО ошибки измерения для компоненты  $V_x$  (рис. 4). Можно заметить, что поведение кривых для разных методов оценок одинаково и соответствует характеру кривой потенциальной точности. При этом выше всех проходит график PP Simple-оценки (наихудшая оценка), которая является наиболее простой. Следом за ней по точности идет PP Full-оценка, которая дополнительно использует взвешивание и информацию о ширине спектра. Самой высокой точностью обладает Optimal-оценка, использующая оценки максимального правдоподобия доплеровской частоты и ширины спектра. Для последней СКО ошибки не превосходит 10 % от значения модуля вектора средней скорости  $V_0$ .



■ **Рис. 4.** Зависимость нормированного СКО оценки  $x$ -компоненты вектора средней скорости ветра от положения точки оценивания

■ **Fig. 4.** Normalized RMS for estimate of  $x$ -wind speed component as a function of estimation attitude

Также можно заметить, что разница в точности между PP Full- и PP Simple-оценками не такая существенная, как разница в точности между этими оценками и Optimal-оценкой. Отсюда можно сделать вывод, что основное влияние на точность оценки компонент средней скорости ветра оказывают точности оценок доплеровской частоты и ширины спектра. Упрощение алгоритма на втором этапе не столь существенно ухудшает качество оценок, поэтому может считаться оправданным.

### Заключение

В работе выведено выражение для пространственно-временной ВКФ сигналов в бистатистической метеорологической радиолокационной системе и сделан вывод об отсутствии значимой корреляции между сигналами удаленных друг от друга МРЛ. На основе полученного выражения выведены границы Крамера — Рао для оценок компонент вектора средней скорости ветра. Синтезирован алгоритм оценки вектора средней скорости ветра, основанный на применении известных оценок доплеровской частоты и ширины спектра. Проведено математическое моделирование полученного алгоритма для случаев оценок доплеровской частоты и ширины спектра методами максимального правдоподобия и пульс-пары. Также проведено моделирование упрощенного алгоритма без использования информации о ширине спектра. По результатам моделирования можно сделать вывод, что теоретическое соотношение между точностью исследованных методов подтвердилось. Выяснено, что определяющую роль в качестве получаемой оценки играет точность используемых методов оценки доплеровской частоты и ширины спектра. Показано, что упрощенная версия алгоритма дает вполне удовлетворительные результаты, и ее применение оправдано.

### Литература

1. Gao J., Xue M., Shapiro A., Droegemeier K. K. A Variational Method for the Analysis of Three-Dimensional Wind Fields from Two Doppler Radars // Monthly Weather Review. 1999. N 9(127). P. 2128–2142.
2. Gao J., Xue M., Brewster K., Droegemeier K. K. A Three-Dimensional Variational Data Analysis Method with Recursive Filter for Doppler Radars // Journal of Atmospheric and Oceanic Technology. 2004. N 3(21). P. 457–469.
3. López Carrillo C., Raymond D. J. Retrieval of Three-Dimensional Wind Fields from Doppler Radar Data Using an Efficient Two-Step Approach // Atmospheric Measurement Techniques. 2011. N 12(4). P. 2717–2733.



4. Kabeche F., Lemaître Y., Kemkemia S., Artis J.-P. Airborne Radar Retrieved 3D Wind Fields for Turbulence Detection // 7th European Radar Conf. on Radar in Meteorology and Hydrology, Toulouse, June 25–29, 2012. P. 1–6.
5. Sirmans D., Bumgarner B. Numerical Comparison of Five Mean Frequency Estimators // Journal of Applied Meteorology. 1975. N 6(14). P. 991–1003.
6. Bamler R. Doppler Frequency Estimation and the Cramer-Rao Bound // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 1991. N 3(29). P. 385–390.
7. Монаков А. А., Монаков Ю. А. Наблюдение турбулентных атмосферных областей в бортовых метеорологических радиолокаторах: измерение параметров турбулентности // Успехи современной радиоэлектроники. 2012. № 5. С. 14–28.
8. Доброленский Ю. П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. — М.: Машиностроение, 1969. — 257 с.
9. Dryden H. L. A Review of the Statistical Theory of Turbulence // Quarterly of Applied Mathematics. 1943. N 1(1). P. 7–42.
10. Von Karman T. Progress in the Statistical Theory of Turbulence // Proc. of the National Academy of Sciences. 1948. N 11(34). P. 530–539.
11. Doviak R. J., Zrnic D. S. Doppler Radar and Weather Observations. — Courier Corporation, 1993. — 592 p.
12. Levin M. Power Spectrum Parameter Estimation // IEEE Transactions on Information Theory. 1965. N 1(11). P. 100–107.
13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с.

UDC 621.396.967.2

doi:10.15217/issn1684-8853.2017.4.86

**Cross-Correlation Function of Signals and Wind Speed Estimation in Weather Radar Networks**Ermakov P. I.<sup>a</sup>, Post-Graduate Student, big.awesome.pie@gmail.comMonakov A. A.<sup>a</sup>, Dr. Sc., Tech., Professor, a\_monakov@mail.ru<sup>a</sup>Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** Due to the active promotion of weather radar networks based on small weather radars, the development of effective signal processing algorithms for such systems is important. **Purpose:** We develop mean wind speed estimation algorithms for weather radar networks, and analyze their performance. **Results:** In the paper, we discuss the derivation of a general expression for the signals cross-correlation function in a bistatic weather radar network, and make a conclusion that the signals in the system are independent. The core result is a two-step algorithm of wind speed estimation which is based on estimating the mean Doppler frequency and the efficient spectral bandwidth. The paper discusses a number of simplifications of the proposed algorithm with lower computational difficulty. Computer simulation has been carried out to compare the quality of the proposed algorithms. The main conclusion is that the performance of the mean Doppler frequency and the efficient spectral bandwidth estimation at the first step are of critical importance. Simplifications at the second step have little impact on the overall algorithm performance. **Practical relevance:** The obtained results can be used in the development of weather radar networks for mean wind speed vector estimation.

**Keywords** — Radar Meteorology, Wind Speed, Data Fusion, Weather Radar Network, Doppler Frequency.

**References**

1. Gao J., Xue M., Shapiro A., Droegemeier K. K. A Variational Method for the Analysis of Three-Dimensional Wind Fields from Two Doppler Radars. *Monthly Weather Review*, 1999, no. 9(127), pp. 2128–2142.
2. Gao J., Xue M., Brewster K., Droegemeier K. K. A Three-Dimensional Variational Data Analysis Method with Recursive Filter for Doppler Radars. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 2004, no. 3(21), pp. 457–469.
3. López Carrillo C., Raymond D. J. Retrieval of Three-Dimensional Wind Fields from Doppler Radar Data Using an Efficient Two-Step Approach. *Atmospheric Measurement Techniques*, 2011, no. 12(4), pp. 2717–2733.
4. Kabeche F., Lemaître Y., Kemkemia S., Artis J.-P. Airborne Radar Retrieved 3D Wind Fields for Turbulence Detection. *7th European Radar Conf. on Radar in Meteorology and Hydrology*, Toulouse, 2012, pp. 1–6.
5. Sirmans D., Bumgarner B. Numerical Comparison of Five Mean Frequency Estimators. *Journal of Applied Meteorology*, 1975, no. 6(14), pp. 991–1003.
6. Bamler R. Doppler Frequency Estimation and the Cramer-Rao Bound. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1991, no. 3(29), pp. 385–390.
7. Monakov A. A., Monakov Y. A. Observation of Atmospheric Turbulence in Airborne Weather Radars: Detection of Weather Signals. *Uspekhi sovremennoi radioelektroniki*, 2012, no. 5, pp. 14–28 (In Russian).
8. Dobrolenskii Y. P. *Dinamika poleta v nespokoynoi atmosfere* [The Dynamics of Flight in a Turbulent Atmosphere]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1989. 257 p. (In Russian).
9. Dryden H. L. A Review of the Statistical Theory of Turbulence. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1943, no. 1(1), pp. 7–42.
10. Von Karman T. Progress in the Statistical Theory of Turbulence. *Proc. of the National Academy of Sciences*, 1948, no. 11(34), pp. 530–539.
11. Doviak R. J., Zrnic D. S. *Doppler Radar and Weather Observations*. Courier Corporation, 1993. 592 p.
12. Levin M. Power Spectrum Parameter Estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1965, no. 1(11), pp. 100–107.
13. Tihonov A. N., Arsenin V. J. *Metody resheniia nekorrektnykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 288 p. (In Russian).