УДК 519.614
doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10

Научные статьи
Articles

Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Часть 2[1]

Н. А. Балонин[a], *доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru*
М. Б. Сергеев[a], *доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-3845-9277*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ*

Введение: *гипотеза Адамара о существовании специфических квадратных матриц сформулирована не Адамаром, а математиками начала прошлого века. В середине века проблема подверглась ревизии в работах Райзера с Бруком и Човлом, а также одним из основателей дискретной математики Холлом. Она относится к задачам пограничного смешанного типа, в ней присутствует и континуальная, и дискретная составляющие. Комбинаторный подход, используемый в рамках последней, за столетие исчерпал себя, в статье рассмотрена альтернатива, опирающаяся на обе образующие.* ***Цель:*** *рассмотреть причины, по которым гипотеза о существовании всех матриц Адамара на порядках $n = 4t$ считается недоказанной, и предложить возможные варианты ее доказательства.* ***Методы:*** *переход понижением порядка $n = 4t - 2$ к двухуровневым квазиортогональным матрицам с элементами 1 и $-b$, вопрос существования которых на всех указанных порядках не вызывает затруднений в силу возможной иррациональности их элементов, с последующим построением цепочки преобразований к матрицам порядков $n = 4t - 1$, $n = 4t$, $n = 4t + 1$.* ***Результаты:*** *доказано взаимно-однозначное соответствие точек Гаусса на сфероиде $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$ с симметричными матрицами Адамара (построенными на основе массивов Балонина — Себерри), закрывающее известные в теории массивов Вильямсона пробелы неразрешимых порядков 140, 112 и т. п. Найдены и систематизированы таблицы решений, включающие так называемые «лучшие» трехблочные матрицы $\mathbf{L}(p, q)$, $p \geq q$ — количество несопряженных симметричных матриц рассматриваемого порядка, q — количество блочно-симметричных матриц, совпадающих с решениями Вильямсона. Предложен итерационный метод Прокруста, понижающий норму максимального элемента матрицы, для получения матриц Адамара поиском локального и глобального условных экстремумов детерминанта.* ***Практическая значимость:*** *полученные матрицы Адамара и квазиортогональные матрицы порядков $n = 4t - 2$, $n = 4t - 1$, $n = 4t + 1$ имеют непосредственное практическое значение для задач помехоустойчивого кодирования, сжатия и маскирования видеоинформации.*

Ключевые слова *— ортогональные матрицы, матрицы Адамара, гипотеза Адамара, циклические матрицы, негациклические матрицы, бициклические матрицы, массив Вильямсона, массив Балонина — Себерри, алгоритм Прокруста.*

Для цитирования: Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Ч. 2. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 2–10. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10
For citation: Balonin N. A., Sergeev M. B. Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 2. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10

Симметричные матрицы Адамара

Помимо известной теоремы Лагранжа о разложении любого числа на сумму четырех квадратов, есть менее широко известный результат студента Геттингенского университета Карла Гаусса, доказавшего предположение Ферма о разложении любого числа на сумму трех треугольных чисел [39].

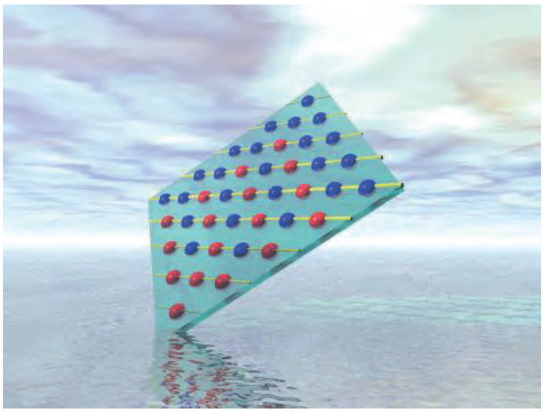
Треугольные числа, как и квадратные, принадлежат к фигурным числам, известным с древности. Они представляют собой последовательные суммы целых чисел 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$ и т. п. Впервые линейными разложениями заинтересовались Эйлер и Гольдбах, высказав предположение, что любое четное число всегда разложимо на сумму двух простых чисел. На рис. 12 разложения Гольдбаха соответствуют выделенным цветом точкам с простыми значениями координат на линиях $x + y = 2t$, опирающихся симметрично на оси координат (образуя равнобедренные треугольники).

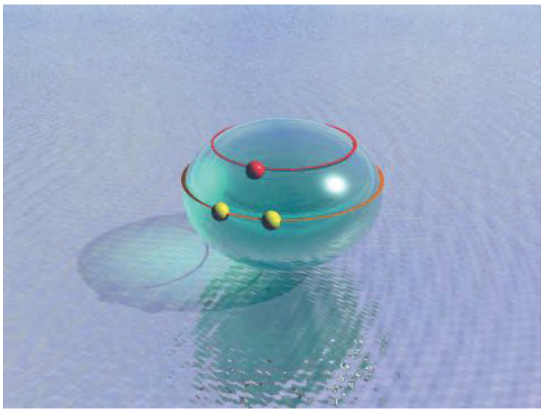
У этой задачи в трехмерном пространстве есть обобщение в виде точек Гаусса (точек с целыми координатами) на шаре или сфероиде. О простых числах речи уже нет, красным цветом выделена особая точка с равными целыми координатами. До этого мы уже связывали точки Гаусса на окружности с бициклическими конструкциями матриц (см. рис. 6 и 7). Шар и сфероид содержат совокупность окружностей, поэтому решение задачи тут значительно шире. Оказывается, что если квадрат радиуса шара является целым числом, то точки Гаусса найдутся на нем всегда и, в отличие от гипотезы Гольдбаха, это можно доказать.

Теорема 5.1. Любое целое число r представимо суммой трех треугольных чисел $r = \underline{x} + \underline{y} + \underline{z}$.

Доказано Гауссом [39]. Впоследствии Жозеф Лиувилль обобщил универсальные свойства этого разложения на взвешенные суммы вида $r = \underline{x} + 2\underline{y} + \underline{z}$ и некоторые другие [40], что важно в нашей задаче о матрицах. Трем координатам

[1] Окончание. Начало см. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 2–13. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-2-13





■ *Рис. 12.* Плоскость Гольдбаха и сфероид с точками Гаусса
■ *Fig. 12.* Goldbach plane and spheroid with Gauss's points
doi:10.31799/1684-8853-2019-1-3-fig12

точек Гаусса сопоставляются три блока. Для построения трехблочных симметричных матриц в (9) можно приравнять блоки $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ и перестановкой пары средних блочных столбцов получить симметричные массивы

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B=C} & \mathbf{C=B} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} & -\mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{A} & -\mathbf{D} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{C} & \mathbf{B} & -\mathbf{A} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BR} & \mathbf{CR} & \mathbf{DR} \\ \mathbf{CR} & \mathbf{RD} & -\mathbf{A} & -\mathbf{RB} \\ \mathbf{BR} & -\mathbf{A} & -\mathbf{RD} & \mathbf{RC} \\ \mathbf{DR} & -\mathbf{RC} & \mathbf{RB} & -\mathbf{A} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-3-form11

Симметричную в целом матрицу несложно получить при соблюдении симметрии блока $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ или $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ или всех трех блоков сразу. Во втором случае матрицы **A** и **D** меняются местами. Такие матрицы названы Пропусами [17, 41] (Propus — звезда в созвездии Близнецов), и это название получило распространение в серии статей [18–20, 42 и др.]. Более общий массив с тремя несимметричными блоками назовем Пиритом, при том же условии, что $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ или даже $k_{\mathrm{B}} = k_{\mathrm{C}}$, имея в виду равенство не самих узоров матриц **B** и **C**, а параметров узоров. Пириты, естественно, более распространены, потребность в них ощутима в виде некоторых дополнительных к симметричной форме решений.

Теорема 5.2. Пириты (11) порядков $n = 4v$, где v — нечетное, существуют.

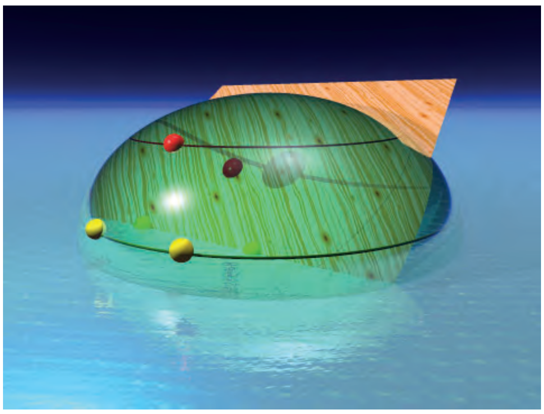
Начнем с Пиритов как наиболее универсальных конструкций, хотя большее число решений являются Пропусами. В самом деле, пусть $n = 4v = 4(2r + 1)$, где r — порядковый номер матрицы, начинающийся с 0. Диофантово уравнение реализуемого ортогонального узора имеет вид $\Sigma x_i^2 = n$ и упрощается при $x_2 = x_3$. Запишем его в форме $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$, используя теорему Гаусса. Целочисленные корни уравнения дают количество –1 в каждом из трех выделенных блоков: $k_1 = (v - x)/2$, $k_2 = (v - y)/2$, $k_3 = (v - z)/2$.

Преобразованиями $x^2 = 8\underline{x} + 1$, $y^2 = 8\underline{y} + 1$, $z^2 = 8\underline{z} + 1$ уравнение сфероида сводится к уравнению плоскости $\underline{x} + 2\underline{y} + \underline{z} = r$, где $r = (v - 1)/2$ — порядковый номер конструкции.

Доказательство закончено.

Для порядка 36 целочисленные точки Гаусса на сфероиде Лиувилля и на плоскости, где они имеют треугольные координаты, изображены на рис. 13.

Точка на центральном луче является особой и соответствует упрощенному решению задачи при $x = y = z$. Оно отвечает порядкам $n = 4u^2$, $k_1 = k_2 = k_3$, обеспечивая переход к регулярным матрицам и моноблокам, описанным как первый



■ *Рис. 13.* Сфероид и плоскость для порядка 36
■ *Fig. 13.* Spheroid and plane for order 36

случай теоремы Брука — Райзера — Човлы, в виде трехблочной конструкции

$$\mathbf{H}=\begin{pmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{BR} & -\mathbf{CR} & -\mathbf{DR} \\ -\mathbf{CR} & \mathbf{RD} & -\mathbf{A} & -\mathbf{RB} \\ -\mathbf{BR} & -\mathbf{A} & -\mathbf{RD} & \mathbf{RC} \\ -\mathbf{DR} & -\mathbf{RC} & \mathbf{RB} & -\mathbf{A} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Особые решения, ведущие к регулярным матрицам, перегружены функционально (они должны соответствовать, в том числе, моноблокам) и являются дополнительными к обычным. Эти Пириты симметричны до порядка 36 включительно. Подсчетами числа точек Гаусса занимались многие ученые, включая Дирихле, ученика Гаусса, и Зигеля. Помимо регулярного решения, всегда есть обычная точка. Ввиду симметрии сфероида точки всегда встречаются парами. На рис. 12 показана одна особая точка и две обычные, отличающиеся цветом.

Теорема 5.3. Матрицы Адамара порядков, кратных 4, существуют.

Доказательство: Ранее мы показали, что Пириты (11) порядков $n = 4v$, где v — нечетное, существуют. Существование всех промежуточных матриц вдвое больших порядков является элементарным следствием возможности построения матриц Адамара кронекеровым произведением Пиритов на матрицы Адамара второго порядка.

Доказательство закончено.

Согласно оценке Гаусса, на каждом порядке задача разрешима как минимум двумя точками с отличающимися параметрами, причем количество таких точек растет в среднем приблизительно как $\sqrt{v}$. Точки Гаусса на шаре соответствуют возможным решениям в форме Пиритов и более интересных нам Пропусов.

Особое решение-исключение в форме Пирита с $k_\mathbf{A} = k_\mathbf{D} = 1$, $k_\mathbf{B} = k_\mathbf{C} = 2$ наблюдается на стартовом порядке 20, причем у него есть альтернатива в виде Пропуса с $k_\mathbf{A} = k_\mathbf{D} = 2$, $k_\mathbf{B} = k_\mathbf{C} = 1$, совпадающего с конструкцией Вильямсона. Эти матрицы эквивалентны. На следующем порядке 28 пиритность решения проявляется слабее одной версией матрицы из четырех возможных с $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ в виде Пирита с параметрами $k_1 = 3$, $k_2 = 3$, $k_3 = 1$ и симметричной матрицей **D**. Он также эквивалентен Пропусу с реверсным ходом параметров. Эти матрицы дополняют пару простых Пропусов, эквивалентных конструкциям Вильямсона с параметрами $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2$ и $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 3$.

Для исключения эквивалентных матриц, появляющихся ввиду симметрий сфероида по вертикали и по горизонтали, имеет смысл опускать парные сопряженные решения, называя оставшиеся, по предложению Дженифер Себерри, «лучшими» и обозначая их **L**.

Количественное представление о версиях матриц Адамара в форме массивов Вильямсона **W** [35] и лучших Пропусов **L** (исключая регулярные особые точки и сопряженные точки из рассмотрения) в зависимости от порядка n дает таблица. Цифрами через запятую указаны количество точек Гаусса, разрешимых матрицей с симметричным блоком **A**, и число решений в них, которые можно классифицировать также как массивы Вильямсона.

Как видно, теорему Адамара можно дополнить значительно более емким предположением, что все матрицы Адамара симметричны и могут быть построены на основе одного симметричного и двух несимметричных циклических блоков, порождая версии $\mathbf{L}(p, q)$. Оно дополняет ранее высказанное предположение Дженифер Себерри о кососимметрии всех возможных матриц Адамара.

Адамар показал [1], что среди матриц с элементами, не превосходящими по абсолютному значению 1 (лежащими в круге единичного радиуса), искомые матрицы имеют максимальный по абсолютному значению детерминант. Поэтому их можно определить иначе, как продукт решения экстремальной задачи на поиск условного максимума модуля детерминанта, учитывающего уравнение связи (1), при заданных ограничениях на значения элементов не более 1. Ответом будут, естественно, матрицы с элементами 1 и –1, поскольку только так можно получить значение весового коэффициента n в правой части уравнения связи.

Далее отвлечемся на время от матричных уравнений и поставим вопрос вычисления матриц Адамара итерационным процессом так, как это было сделано алгоритмом для скалярного корня квадратного. Эта тема позволяет обосновать существование матриц Адамара безотносительно к ее орнаменту, т. е. дает более сильные условия существования.

■ Количество несопряженных Пропусов **L**

■ The numbers of non-conjugated **L**-Propusi

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-4-table

n	W	L	n	W	L	n	W	L
4	1	1,1	76	6	3,1	148	4	5,1
12	1	1,1	84	7	2,1	156	1	2,0
20	1	1,1	92	1	2,0	164	1	2,1
28	2	2,1	100	10	3,1	172	2	5,0
36	3	1,1	108	6	4,1	180	1	5,1
44	1	1,0	116	1	1,0	188	0	4,0
52	4	3,1	124	2	4,1	196	1	4,1
60	4	2,1	132	5	4,0	204	2	2,1
68	4	2,0	140	0	2,0	212	0	3,0

Со времен построения алгоритма Эвклида итерационные процессы пользуются заслуженным вниманием. Ведущие к ним экстремальные задачи допускают более широкое толкование решения, чем задачи на поиск «точного равенства». Заметим, что если следовать порядкам, кратным четырем, то матрицы абсолютного максимума детерминанта [3] тоже будут матрицами Адамара (если последние существуют).

Смысл дополнительного уравнения связи (1) состоит в том, что оно позволяет построить итерационный алгоритм нахождения матрицы, и предлагаем этим воспользоваться.

Сжимающее отображение Прокруста

Обращаясь к прошлому квадратичной проблемы, отметим весьма похожее на матричное (1) скалярное уравнение $h^2 = 2$, связывающее длину гипотенузы h элементарного равнобедренного прямоугольного треугольника с суммой квадратов сторон его катетов. В античные времена обнаружено, что h в принципе нельзя выразить отношением целых чисел — отношением к длине катета. Отсюда можно было бы заключить, что таких прямоугольных треугольников не существует. Но ведь они есть, их легко построит школьник при помощи циркуля и линейки. Потребность выразить эту не существующую в отношениях целых величин длину продвинула теорию чисел изобретением радикалов.

Древнейший рецепт минимизирует норму невязки $h^2 - 2$ итерациями оценки длины вида $h_{k+1} = h_{k-1} + h_k/2$, начиная с приближения $h_0 = 1$. Он был известен еще создателям глиняных таблиц, недаром именуется вавилонским.

Теперь задумаемся, есть ли прямой метод найти матрицу Эйлера, Мерсенна или Адамара, подобно тому, как находит корень квадратный вавилонский алгоритм? Как ни странно, такой метод есть, и легенда о нем насчитывает как минимум двухтысячелетнюю историю. Известно, что герой греческих мифов царь-разбойник Прокруст укорачивал ноги своих гостей, укладывая их спать на короткую постель. Чрезмерно длинных сонных скитальцев он укорачивал мечом, а коротких, наоборот, растягивал при помощи ворота и веревки. Ортогональные матрицы тоже имеют «ноги» в виде наиболее выделяющихся своей величиной элементов, в то время как у матриц Адамара элементы все одинаковы по абсолютной величине.

За этим обстоятельством скрывается простое правило повышения детерминанта квазиортогональной матрицы [43, 44].

Теорема 6.1. Алгоритм Прокруста сходится к матрице Адамара.

Доказательство: Приведем матрицу Адамара масштабированием ее столбцов к строго ортогональной форме $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = \mathbf{I}$. В таком случае детерминант матрицы $\mathbf{H}$ будет равен 1. Путь назад состоит в делении ее элементов на максимальный элемент μ и возвращении значения элементов вновь к 1. Чем меньше делитель μ, тем больше коэффициент увеличения определителя матрицы. На множестве квазиортогональных матриц с максимальными элементами, равными 1, искомую матрицу условного максимума детерминанта отличают ортогональность ее столбцов и самое малое значение ее максимального элемента (после приведения норм столбцов к 1). Метод Прокруста, состоящий в итерационном уменьшении амплитуд элементов ортогональной матрицы, действительно ведет к ней.

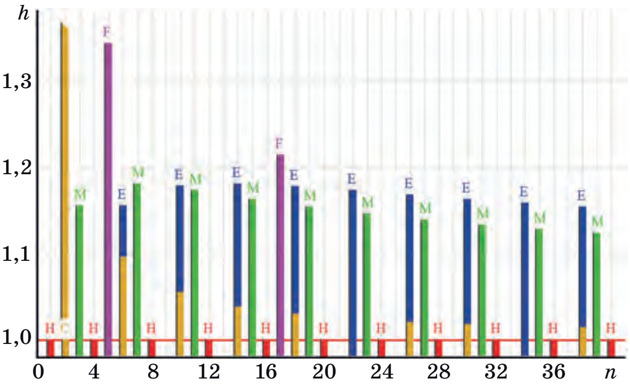
Доказательство закончено.

Задача на итерационный поиск максимального условного экстремума детерминанта при квадратичном матричном уравнении связи, разумеется, имеет препятствия в форме областей притяжения вокруг локальных оптимумов. Поскольку они локальные, их можно обойти перебором начальных условий. Области притяжения к локальным экстремумам представляют собой запрещенные значения элементов $\mathbf{H}$. В силу конечности радиусов, описывающих области притяжения, число попыток, позволяющих их избежать, теоретически конечно. Алгоритм Прокруста не нуждается в задании вида узора. Тем самым отпадают возражения о совместности узора матрицы, хотя их тоже можно перебрать. Разумеется, использование априорной информации ускоряет поиск [44].

Матрица Адамара является частным случаем квазиортогональных матриц $\mathbf{A}$ с вещественными элементами, не превышающими по своему абсолютному значению 1, удовлетворяющих уравнению $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \omega\mathbf{I}$, где ω — вес матрицы, заданный свободно, так что при разрешенных значениях переменных элементов матрицы $0 < \omega \le n$. Несложно заметить, что $|\det(\mathbf{A})| = \omega^{n/2}$, где $\omega = 1/\mu^2$. Поскольку график детерминанта быстро растет, для иллюстрации достаточно вывести график делителя $|\det(\mathbf{A})| = n^{n/2}/h^n$ — адамаровой нормы $h = \mu\sqrt{n}$.

Если делитель стремится к единице, а он стремится к ней у всех отмеченных ранее матриц, то такие матрицы с ростом порядка мало отличаются от адамаровых. Графики h-норм рассмотренных матриц Эйлера ($\mathbf{E}$), Мерсенна ($\mathbf{M}$), Адамара ($\mathbf{H}$), Белевича ($\mathbf{C}$) и Ферма ($\mathbf{F}$) приведены на рис. 14.

Матрицы Ферма $\mathbf{F}$ порядков $4t + 1$ сопровождают регулярные матрицы Адамара так же, как матрицы Эйлера и Мерсенна сопровождают Пропусы. Весовые функции $\omega(n)$ и h-нормы семейств матриц с порядками, смежными 4, опре-



■ ***Рис. 14.*** h-нормы квазиортогональных матриц
■ ***Fig. 14.*** h-norms of quasiorthogonal matrices

деленные по ограниченному числу точек, имеют аналитическое продолжение на бесконечное множество порядков, так как в задаче с нефиксированным правым уровнем порядки не имеют предпочтений. Аналогом этого процесса у динамических систем является задача идентификации параметров передаточной функции динамической системы, или, что то же самое, коэффициентов дифференциального или разностного уравнения [45, 46]. Находя параметры по серии точек, можно идентифицировать в целом всю систему для всего бесконечного интервала ее функционирования.

Несовместность аналитического продолжения (если бы такое имело место) находит свое выражение в особых точках аналитических зависимостей, описывающих параметры. Если функции монотонны, а это так, и не имеют разрывов, то такие семейства существуют на всех значениях порядков.

Заключение

Интерес к узорам стал возникать в 30-х годах прошлого века в агрокультурных задачах, связанных с подсчетами сортов зерен и хранилищ для них. Методы конечных полей позволяли найти решения, что давало повод для шуток о том, что в то время как агрономы ищут зерна на обычных полях, Фишер, основатель математики узоров, пропадает на полях Галуа. В то время метод конечных полей был нов, и интерес к нему заметен как в работах Пэли, так и в работах Холла, пересматривавшего достижения шестидесятых.

Подавляющее число работ по матрицам Адамара составлено в комбинаторном ключе, когда тема иррациональностей закрыта. Надо отдать должное Райзеру с коллегами, что они вообще додумались до ограничений, следующих из моноблочности структуры. Но ведь матрица Адамара не моноблок. Холл, движимый интуицией, склоняется к мысли, что условия теоремы Брука — Райзера — Човлы, скорее, необходимы и достаточны (чем наоборот).

Проективный дизайн $v = q^2 + q + 1$, $k = q + 1$, $\lambda = 1$ при $q = 2$ имеет параметры матрицы Мерсенна $\{7, 3, 1\}$ порядка $n = 4t - 1 = 7$ с уровнями 1 и $-b$, $b = \dfrac{t}{t+\sqrt{t}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. В тех случаях, когда матрицу инцидентности найти можно, как видно, ортогональные матрицы не обязательно рациональны. Особые точки $\{43, 7, 1\}$ и $\{29, 8, 2\}$, указанные в работах [10–12] как примеры исключений, несложно подвергнуть проверке на ортогонализацию матрицы заданием $a = 1$ с заменой 0 на значение «плавающего уровня» $-b$. Условие ортогональности $(n - 2k + \lambda)b^2 - 2(k - \lambda)ab + \lambda a^2 = 0$ для примеров дает $30b^2 - 12b + 1 = 0$ и $15b^2 - 12b + 2 = 0$ соответственно. Корни этих уравнений иррациональны: $b = \left(1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)/5$ и $b = \left(2 \pm \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)/5$.

Помимо двухуровневых матриц, структура содержит резерв в виде варьируемой диагонали (нулевая у конференц-матриц), она тоже может быть настраиваемым уровнем [38]. Получим двухуровневые (или трехуровневые) квазиортогональные матрицы, в работах [5, 15 и др.] их предложено называть *критскими*. Тем самым в аргументах Холла, пересматривавшего теорему существования матриц Адамара, есть слабые места. Он брал во внимание целочисленную матрицу инцидентности, а не ортогональную матрицу.

При движении по числовой оси все взаимные произведения чисел отбрасываются вверх, поэтому количество простых чисел, которые можно встретить в выделенном диапазоне, неизбежно убывает. Следовательно, простые по орнаменту матрицы Адамара (с простыми по размеру блоками) тоже убывают. Вместе с тем известно (теорема Дженифер Себерри [2, 3]), что есть верхняя граница для сомнительных порядков. Состыковать эти два положения вместе можно тем, что универсальные узоры заполняют промежутки между простыми орнаментами. Вывод подкреплен составлением таблиц симметричных матриц Адамара вплоть до 212-го порядка и выше [17–19].

Два пути, характеризуемые как непрерывный и дискретный подходы, представляют собой крайние варианты, между которыми возможны компромиссы, обнаруживающие смесь непрерывного и дискретного. Теория чисел тесно пересекается с матричной тематикой, однако разработанные еще в XVIII веке рецепты решения квадратичных уравнений столь велики, что для установления полного соответствия требовался свой Гаусс, рискнувший в этакие дебри забрести. Вместе с тем изобретение, скажем, иррациональности требует не столько штудирования обширного материала, сколько смены парадигмы о том, что именно вкладывается в понятие числа. К иррациональной матрице Эйлера мы проложили путь через градиент оптимизируемой функции или его заменители, которыми оперирует алгоритм Прокруста, убавляющий норму максимального элемента ортогональной матрицы сколь угодно малой вариацией. Финальные шаги: от матрицы Эйлера к матрице Мерсенна и далее к матрице Адамара (и потом к матрице Ферма для регулярных структур) с помощью добавляемой каймы — представляют собой дискретный процесс.

Благодарности

Мы приносим благодарность за многолетнее сотрудничество и поддержку профессорам Дженифер Себерри и Драгомиру Джоковичу. Большую помощь в технической работе с рукописью статьи и ссылками (более полный перечень работ можно найти на http://mathscinet.ru/tamara) оказала Т. В. Балонина.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ при проведении научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности по заданию № 2.2200.2017/4.6.

Литература

1. **Hadamard J.** Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246.
2. **Seberry J., Yamada M.** *Hadamard matrices, sequences, and block designs*. In: *Contemporary design theory: A collection of surveys*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds. John Wiley and Sons, 1992. P. 431–560.
3. *Handbook of combinatorial designs* (Discrete mathematics and its applications). Ed. by Charles J. Colbourn, Jeffrey H. Dinitz. 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, 2006. 1000 p.
4. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Нормы обобщенных матриц Адамара. *Вестник СПбГУ*, сер. 10, 2014, вып. 2, с. 5–11.
5. **Balonin N. A., and Seberry, Jennifer.** Remarks on extremal and maximum determinant matrices with real entries ≤1. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 5, с. 2–4.
6. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрица золотого сечения G10. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 6, с. 2–5.
7. **Williamson J.** Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, pp. 65–81.
8. **Baumert L., Golomb S. W., Marshall M.** Discovery of an Hadamard matrix of order 92. *Bull. Amer. Math. Soc., JR. Communicated by F. Bohnenblust, California Institute of Technology*, 1962, vol. 68, pp. 237–238.
9. **Seberry Wallis J.** A class of Hadamard matrices. Communicated by Marshall Hall. *Journal of Combinatorial Theory*, 1969, vol. 6, pp. 40–44.
10. **Bruck R. H., Ryser H. J.** The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian J. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 88–93. doi:10.4153/cjm-1949-009-2
11. **Chowla S., Ryser H. J.** Combinatorial problems. *Canadian J. Math.*, 1950, vol. 2, pp. 93–99. doi:10.4153/cjm-1950-009-8
12. **Hall M.** *Combinatorial theory*. 2nd ed. New York, Wiley, 1998. 464 p.
13. **Ryser H. J.** *Combinatorial mathematics*. The carus mathematical monographs. The mathematical association of America, New York, JohnWiley and Sons, 1963, no. 14. 162 p.
14. **Балонин Н. А., Джокович Д. Ж.** Симметрия двуциклических матриц Адамара и периодические пары Голея. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 3, с. 2–16. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
15. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Расширение гипотезы Райзера на двуциклические структуры и разрешимость матриц Адамара орнаментом в виде бицикла с двойной каймой. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 1, с. 2–10. doi:10.15217/issnl684-8853.2017.1.2
16. **Balonin N. A., Seberry J.** Two infinite families of symmetric Hadamard matrices. *Australian Journal of Combinatorics*, 2017, vol. 69(3), pp. 349–357.
17. **Balonin N. A., Balonin Y. N., Djokovic D. Z., Karbovskiy D. A., Sergeev M. B.** Construction of symmetric Hadamard matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 5, с. 2–11. doi:10. 15217/issn1684-8853.2017.5.2 (16 Aug 2017: arXiv:1708.05098).
18. **Balonin N. A., Djokovic D. Z., Karbovskiy D. A.** Construction of symmetric Hadamard matrices of order $4v$ for $v = 47, 73, 113$. *Special Matrices*, 2018, vol. 6, pp. 11–22 (9 Oct 2017: arXiv:1710.03037).
19. **Balonin N. A., Djokovic D. Z.** Symmetric Hadamard matrices of orders 268, 412, 436 and 604. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 4, с. 2–8. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-2-8 (23 Mar 2018: arXiv:1803.08787)
20. **Balonin N. A., Djocovic D. Z.** Negaperiodic Golay pairs and Hadamard matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 5, с. 2–17. doi:10. 15217/issn1684-8853.2015.5.2
21. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Взвешенная конференц-матрица, обобщающая матрицу Белевича на 22-м порядке. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 5, с. 97–98.

22. **Balonin N. A., Seberry J.** A review and new symmetric conference matrices. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 4, с. 2–7.
23. **Silvester J. J.** Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, no. 34, pp. 461–475.
24. **Scarpis U.** Sui determinanti di valore Massimo. *Rendiconti Della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, no. 31, pp. 1441–1446.
25. **Djokovic D. Z.** Generalization of Scarpis' theorem on Hadamard matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, no. 10, pp. 1985–1987. doi:10.1080/03081087.2016.1265062
26. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы Мерсенна и Адамара. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 1, с. 2–15. doi.org/10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
27. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы Мерсенна и Адамара, произведения. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 5, с. 2–14. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.2
28. **Gilman R. E.** On the Hadamard determinant theorem and orthogonal determinants. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 1931, vol. 37, pp. 30–31.
29. **Paley R. E. A. C.** On orthogonal matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
30. **Malcolm W. Browne**. *Is a math proof a proof if no one can check it*? The New York Times. 1 december. 1988.
31. **Janko Z.** The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 36 and two new infinite classes of symmetric designs. *Journal of Combinatorial Theory*, ser. A, 2001, vol. 95, no. 2, pp. 360–364.
32. **Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D.** Bush-type Hadamard matrices and symmetric symmetric designs. *J. Combin.*, 2001, no. 1, pp. 72–78.
33. **Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D.** The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 324 and two new infinite classes of symmetric designs. *Des. Codes Cryptogr*, 2001, vol. 24, no. 2, pp. 225–232.
34. **Doković D. Ž.** Williamson matrices of order $4n$ for $n = 33;35;39$. *Discrete Math.*, 1993, vol. 115, pp. 267–271.
35. **Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B.** Williamson matrices up to order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, no. 46, pp. 343–352.
36. **Балонин Н. А.** О существовании матриц Мерсенна 11-го и 19-го порядков. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 2, с. 89–90.
37. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара. *Информационно-управляющие системы*, 2013, № 5, с. 2–8.
38. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрицы локального максимума детерминанта. *Информационно-управляющие системы*, 2014, № 1, с. 2–15.
39. **Гаусс К. Ф.** Труды по теории чисел/ пер. Б. Б. Демьянова; под ред. И. М. Виноградова; комментарии Б. Н. Делоне. М., АН СССР, 1959. 978 с.
40. **Liouville J.** Nouveaux théorémes concernant les nombres triangulaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1863, no. 8, pp. 73–84.
41. **Seberry J., Balonin N. A.** *The Propus construction for symmetric Hadamard matrices*. 2015. http://arXiv:1512.01732v1 (дата обращения: 22 мая 2017).
42. **Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.** Symmetric Hadamard matrices of order 116 and 172 exist. *Spec. Matrices*, 2015, no. 3, pp. 227–234.
43. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Суздаль В. С.** Динамические генераторы квазиортогональных матриц семейства Адамара. *Тр. СПИИРАН*, 2017, вып. 5(54), с. 224–243. doi:http://dx.doi.org/10.15622/sp.54
44. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** О значении матриц начального приближения в алгоритме поиска обобщенных взвешенных матриц глобального и локального максимума детерминанта. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 6, с. 2–9. doi:org/10.15217/issn1684-8853.2015.6.2
45. **Балонин Н. А.** *Теоремы идентифицируемости*. СПб., Политехника, 2010. 48 с.
46. **Балонин Н. А.** *Новый курс теории управления движением*. СПб., СПбГУ, 2000. 160 с.

УДК 519.614
doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10

Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 2

N. A. Balonin[a], Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0001-7338-4920, korbendfs@mail.ru
M. B. Sergeev[a], Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-3845-9277
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Hadamard conjecture about the existence of specific square matrices was formulated not by Hadamard but by other mathematicians in the early 20th century. Later, this problem was revised by Ryser together with Bruck and Chowla, and also by Hall, one of the founders of discrete mathematics. This is a problem of the boundary mixed type, as it includes both the continuous and discrete components. The combinatorial approach used in the framework of the discrete component has run its course by the end of the century.

The article discusses an alternative based on both concepts. **Purpose:** To analyze the reasons why the conjecture about the existence of Hadamard matrices of all orders $n = 4t$ is considered unproven, and to propose possible ways to prove it. **Methods:** Transition, by lowering the order $n = 4t - 2$, to two-level quasiorthogonal matrices with elements 1 and $-b$ whose existence on all specified orders is not a difficult problem due to the possible irrationality of their entries. Subsequent construction of a chain of transformations to matrix orders $n = 4t-1$, $n = 4t$, $n = 4t + 1$. **Results:** It is proved that Gauss points on an $x^2 + 2y^2 + z^2 = n$ spheroid are in one-to-one correspondence with symmetric Hadamard matrices (constructed on the basis of the Balonin — Seberry arrays), covering up the gaps on the unsolvable orders 140, 112, etc. known in Williamson's array theory. Solution tables are found and systematized, which include so-called «best» three-block matrices $\mathbf{L}(p, q)$, where $p \geq q$ is the number of non-conjugated symmetric matrices of the order in question, and q is the number of block-symmetric matrices which coincide with Williamson's solutions. The iterative Procrustes algorithm which reduces the norm of the maximum entry in a matrix is proposed for obtaining Hadamard matrices by searching for local and global conditional extremes of the determinant. **Practical relevance:** The obtained Hadamard matrices and quasi-orthogonal matrices of orders $n = 4t - 2$, $n = 4t - 1$, $n = 4t + 1$ are of immediate practical importance for the problems of noise-resistant coding, compression and masking of video information.

Keywords — orthogonal matrices, Hadamard matrices, Hadamard conjecture, circulant matrices, negacirculant matrices, two-circulant matrices, Williamson array, Balonin — Seberry array, Procrustes algorithms.

Citation: Balonin N. A., Sergeev M. B. Helping Hadamard conjecture to become a theorem. Part 2. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-2-10

References

1. Hadamard J. Résolution d'une Question Relative aux Déterminants. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246.
2. Seberry J., Yamada M. *Hadamard matrices, sequences, and block designs*. In: *Contemporary design theory: A collection of surveys*. J. H. Dinitz and D. R. Stinson eds. John Wiley and Sons, 1992. P. 431–560.
3. *Handbook of combinatorial designs* (Discrete mathematics and its applications). Ed. by Charles J. Colbourn, Jeffrey H. Dinitz. 2nd ed. Chapman and Hall/CRC, 2006. 1000 p.
4. Balonin N. A., Sergeev M. B. The generalized Hadamard matrix norms. *Vestnik SPbGU*, ser. 10, 2014, vol. 2, pp. 5–11 (In Russian).
5. Balonin N. A., Seberry Jennifer. Remarks on extremal and maximum determinant matrices with real entries ≤1. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 5, pp. 2–4.
6. Balonin N. A., Sergeev M. B. Matrix of golden ratio G10. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 6, pp. 2–5 (In Russian).
7. Williamson J. Hadamard's determinant theorem and the sum of four squares. *Duke Math. J.*, 1944, vol. 11, pp. 65–81.
8. Baumert L., Golomb S. W., Marshall M. Discovery of an Hadamard matrix of order 92. *Bull. Amer. Math. Soc., JR. Communicated by F. Bohnenblust, California Institute of Technology*, 1962, vol. 68, pp. 237–238.
9. Seberry Wallis J. A class of Hadamard matrices. Communicated by Marshall Hall. *Journal of Combinatorial Theory*, 1969, vol. 6, pp. 40–44.
10. Bruck R. H., Ryser H. J. The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian J. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 88–93. doi:10.4153/cjm-1949-009-2
11. Chowla S., Ryser H. J. Combinatorial problems. *Canadian J. Math.*, 1950, vol. 2, pp. 93–99. doi:10.4153/cjm-1950-009-8
12. Hall M. *Combinatorial theory*. 2nd ed. New York, Wiley, 1998. 464 p.
13. Ryser H. J. *Combinatorial mathematics*. The carus mathematical monographs. The mathematical association of America, New York, John Wiley and Sons, 1963, no. 14. 162 p.
14. Balonin N. A., Djokovic D. Z. Symmetry of two-circulant Hadamard matrices and periodic Golay pairs. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2015, no. 3, pp. 2–16 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.2
15. Balonin N. A., Sergeev M. B. Ryser's conjecture expansion for bicirculant strictures and Hadamard matrix resolvability by double-border bicycle ornament. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2017, no. 1, pp. 2–10 (In Russian). doi:10.15217/issnl684-8853.2017.1.2
16. Balonin N. A., Seberry J. Two infinite families of symmetric Hadamard matrices. *Australian Journal of Combinatorics*, 2017, vol. 69(3), pp. 349–357.
17. Balonin N. A., Balonin Y. N., Đoković D. Ž., Karbovskiy D. A., Sergeev M. B. Construction of symmetric Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2017, no. 5, pp. 2–11. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.5.2 (16 Aug 2017: arXiv:1708.05098).
18. Balonin N. A., Đoković D. Ž., Karbovskiy D. A. Construction of symmetric Hadamard matrices of order $4v$ for $v = 47$, 73, 113. *Special Matrices*, 2018, vol. 6, pp. 11–22 (9 Oct 2017: arXiv:1710.03037).
19. Balonin N. A., Đoković D. Ž. Symmetric Hadamard matrices of orders 268, 412, 436 and 604. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2018, no. 4, pp. 2–8. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-2-8 (23 Mar 2018: arXiv:1803.08787).
20. Balonin N. A., Djocovic D. Z. Negaperiodic Golay pairs and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2015, no. 5, pp. 2–17. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.5.2
21. Balonin N. A., Sergeev M. B. Weighted conference matrix generalizing Belevich matrix at the 22nd order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 5, pp. 97–98 (In Russian).
22. Balonin N. A., Seberry J. A review and new symmetric conference matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 4, pp. 2–7.
23. Silvester J. J. Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, no. 34, pp. 461–475.
24. Scarpis U. Sui determinanti di valore Massimo. *Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, no. 31, pp. 1441–1446 (In Italian).
25. Djokovic D. Z. Generalization of Scarpis' theorem on Hadamard matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2017, vol. 65, no. 10, pp. 1985–1987. doi:10.1080/03081087.2016.1265062
26. Balonin N. A., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2016, no. 1, pp. 2–15 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.1.2
27. Balonin N. A., Sergeev M. B. Mersenne and Hadamard matrices, products. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2016, no. 5, pp. 2–14 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.5.2
28. Gilman R. E. On the Hadamard determinant theorem and orthogonal determinants. *Bulletin Amer. Math. Soc.*, 1931, vol. 37, pp. 30–31.
29. Paley R. E. A. C. On orthogonal matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
30. Malcolm W. Browne. *Is a math proof a proof if no one can check it*? The New York Times. 1 december. 1988.
31. Janko Z. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 36 and two new infinite classes of symmetric designs. *Journal of Combinatorial Theory*, ser. A, 2001, vol. 95, no. 2, pp. 360–364.
32. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. Bush-type Hadamard matrices and symmetric symmetric designs. *J. Combin.*, Dec. 9, 2001, no. 1, pp. 72–78.
33. Janko Z., Kharaghani H., Tonchev V. D. The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 324 and two new infinite classes of symmetric designs. *Des. Codes Cryptogr*, 2001, vol. 24, no. 2, pp. 225–232.
34. Đoković D. Ž. Williamson matrices of order $4n$ for $n = 33$; 35; 39. *Discrete Math.*, 1993, vol. 115, pp. 267–271.

35. Holzmann W. H., Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. Williamson matrices up to order 59. *Designs, Codes and Cryptography*, 2008, no. 46, pp. 343–352.
36. Balonin N. A. Existence of Mersenne matrices of 11th and 19th orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 2, pp. 89–90 (In Russian).
37. Balonin N. A., Sergeev M. B. On the issue of existence of Hadamard and Mersenne matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2013, no. 5, pp. 2–8 (In Russian).
38. Balonin N. A., Sergeev M. B. Local maximum determinant matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2014, no. 1, pp. 2–15 (In Russian).
39. Gauss K. F. *Trudy po teorii chisel* [Works on Number Theory]. Trans. B. B. Dem`yanova, ed. I. M. Vinogradova, comments B. N. Delone. Moscow, AN SSSR Publ., 1959. 978 p.
40. Liouville J. Nouveaux théorémes concernant les nombres triangulaires. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1863, no. 8, pp. 73–84 (In French).
41. Seberry J., Balonin N. A. *The Propus construction for symmetric Hadamard matrices*. 2015. Available at: http://arXiv:1512.01732v1 (accessed 22 May 2017).
42. Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S. Symmetric Hadamard matrices of order 116 and 172 exist. *Spec. Matrices*, 2015, no. 3, pp. 227–234.
43. Balonin N. A., Sergeev M. B., Suzdal V. S. Dynamic generators of the quasiortogonal Hadamard matrix family. *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings], 2017, vol. 5(54), pp. 224–243 (In Russian). doi:http://dx.doi.org/10.15622/sp.54
44. Balonin N. A., Sergeev M. B. Initial approximation matrices in search for generalized weighted matrices of global or local maximum determinant. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control System], 2015, no. 6, pp. 2–9 (In Russian). doi.org/10.15217/issn1684-8853.2015.6.2
45. Balonin N. A. *Teoremy identificiruemosti* [Identifiability Theorems]. Saint-Petersburg, Politekhnika Publ., 2010. 48 p. (In Russian).
46. Balonin N. A. *Novyj kurs teorii upravleniya dvizheniem* [New course of motion control theory]. Saint-Petersburg, SPbGU Publ., 2000. 160 p. (In Russian).