

УДК 519.165, 517.938

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

## Исследование свойств классов эквивалентности перестановок с помощью обратного преобразования Робинсона — Шенстеда — Кнута

Н. Н. Васильев<sup>а, б</sup>, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, [orcid.org/0000-0002-0841-1168](https://orcid.org/0000-0002-0841-1168)

В. С. Дужин<sup>б</sup>, соискатель, [orcid.org/0000-0001-8399-284X](https://orcid.org/0000-0001-8399-284X), [vsduzhin@etu.ru](mailto:vsduzhin@etu.ru)

А. Д. Кузьмин<sup>б</sup>, студент, [orcid.org/0000-0001-9975-4686](https://orcid.org/0000-0001-9975-4686)

<sup>а</sup>Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191023, РФ

<sup>б</sup>Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, 5, Санкт-Петербург, 197376, РФ

**Введение:** вся информация о перестановке, т. е. об элементе симметрической группы  $S(n)$ , содержится в паре таблиц Юнга, сопоставляемых ей преобразованием RSK. Если же вместо перестановки рассматривать бесконечную последовательность натуральных или вещественных чисел, то вся информация о ней содержится только в записывающей бесконечной таблице Юнга. В недавней работе Д. Ромика и П. Сняды была получена явная формула, выражающая первый элемент бесконечной последовательности равномерно распределенных случайных величин через предельный угол наклона нерва нумерующей таблицы. Однако до сих пор не было произведено массовых численных экспериментов, посвященных восстановлению начала такой последовательности по началу записывающей таблицы Юнга. При этом очень важна точность такого восстановления, потому что значение даже первого элемента последовательности может быть определено только по бесконечной таблице. **Цель:** разработка программного пакета для операций над диаграммами и таблицами Юнга и его применение для компьютерных экспериментов с большими таблицами Юнга. Изучение свойств классов эквивалентности по Кнуту и двойственной эквивалентности по Кнуту на множестве перестановок посредством численных экспериментов с использованием прямого и обратного преобразования RSK. **Результаты:** разработан программный пакет на языке C++, включающий в себя функции для работы с диаграммами и таблицами Юнга. С помощью массовых численных экспериментов изучена зависимость значений первого элемента перестановки, получаемой обратным преобразованием RSK, от координат конца нерва нумерующей таблицы. Вычислены среднеквадратические отклонения этих значений для перестановок различной длины. Определялись возможные положения единицы в перестановках, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности по Кнуту. Выявлено, что количество этих положений не превышает количества угловых клеток соответствующей диаграммы Юнга. Экспериментально установлено, что при фиксированной записывающей таблице значение первого элемента перестановки зависит только от координат конца нерва нумерующей таблицы.

**Ключевые слова** — алгоритм RSK, соответствие RSK, классы эквивалентности перестановок, эквивалентность по Кнуту, двойственная эквивалентность по Кнуту, преобразование Шютценберже, процесс Планшереля, диаграммы Юнга, таблицы Юнга, кривая Вершика — Керова, диаграмма Браттели — Вершика, численные эксперименты, асимптотическая комбинаторика.

**Для цитирования:** Васильев Н. Н., Дужин В. С., Кузьмин А. Д. Исследование свойств классов эквивалентности перестановок с помощью обратного преобразования Робинсона — Шенстеда — Кнута. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 11–22. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

**For citation:** Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson — Schensted — Knuth transformation. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 11–22 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

### Введение

Преобразование Робинсона — Шенстеда — Кнута (RSK) [1–3], задающее соответствие между перестановкой натуральных чисел и парой стандартных таблиц Юнга (записывающей  $P$  и нумерующей  $Q$ ), играет важную роль в различных комбинаторных задачах. В последнее время комбинаторика диаграмм и таблиц Юнга, в частности алгоритм RSK, находит многочисленные приложения в физике, математике и информатике [4–6].

Преобразование RSK может быть легко обобщено на бесконечные последовательности элементов линейно упорядоченного множества, если в качестве записывающих таблиц использовать

полустандартные таблицы Юнга, заполненные элементами этого упорядоченного множества. Отсюда следует, что преобразование RSK может быть применено к последовательности случайных независимых величин, равномерно распределенных на отрезке  $[0, 1]$ , т. е. к схеме Бернулли. В работе [7] было построено соответствие между двумя динамическими системами: схемой Бернулли и итерациями преобразования Шютценберже. В работе [8] было доказано, что данное соответствие является изоморфизмом. Также результатом этой работы является тот факт, что первый элемент последовательности равномерно распределенных случайных величин можно однозначно восстановить только по углу наклона пути Шютценберже нумерующей таблицы. В силу изоморфизма, по-

следовательно применяя преобразование Шютценберге к бесконечной нумерующей таблице, можно однозначно восстановить всю исходную последовательность, а следовательно, и соответствующую ей записывающую таблицу.

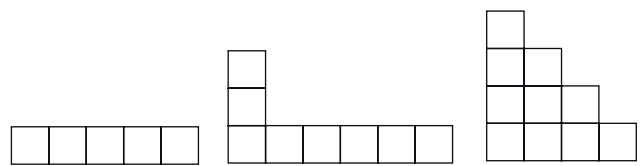
Другим результатом статьи [8] является то, что угол наклона пути Шютценберге в бесконечной таблице Юнга с вероятностью 1 по мере Планшереля имеет некоторое предельное значение. При этом в силу того, что с ростом размера таблиц скорость стремления к предельному значению крайне низка, точность восстановления значений в перестановках также не высока.

Настоящая работа посвящена изучению соответствия между углами наклона нервов нумерующих таблиц Юнга большого размера и первыми элементами конечных последовательностей посредством численных экспериментов. Разработанный программный инструментариум включает в себя набор операций для работы с диаграммами и таблицами Юнга, средства их визуализации, различные генераторы случайных таблиц Юнга, алгоритмы прямого и обратного преобразований RSK для стандартных и полустандартных таблиц Юнга, преобразование Шютценберге и многие другие функции.

Преобразование RSK позволяет задать два отношения эквивалентности на множестве перестановок. Те перестановки, которым соответствует одинаковая таблица  $P$ , называются эквивалентными по Кнуту, а те, которым соответствует одинаковая таблица  $Q$ , — двойственно эквивалентными по Кнуту. Численные эксперименты, проведенные в рамках настоящей работы, посвящены изучению свойств данных классов эквивалентности. Эта работа выполнена в рамках цикла работ по численным экспериментам в области асимптотической комбинаторики на двумерном [9–12] и трехмерном [13, 14] графах Юнга.

### Определения и основные обозначения

*Диаграмма Юнга* представляет собой конечный набор клеток, составленных в столбцы, выровненные по нижней границе, длины которых образуют невозрастающую последовательность [15]. Диаграммы можно задавать разбиением целого числа  $n = l_1 + l_2 + \dots + l_n$ , где  $n$  — число клеток. Соответствующая этому разбиению диаграмма Юнга формы  $\lambda(l_1, l_2, \dots, l_n)$  состоит из  $n$  столбцов, где столбец номер  $i$  состоит из  $l_i$  ячеек. Существуют различные способы изображения диаграмм Юнга. В данной работе используется так называемая французская нотация, в которой клетки диаграммы выровнены по левому и нижнему краям. На рис. 1 изображены следующие примеры диаграмм Юнга:  $\lambda(1, 1, 1, 1, 1)$ ,  $\lambda(3, 1, 1, 1, 1)$ ,  $\lambda(4, 3, 2, 1)$ .



■ *Рис. 1.* Примеры диаграмм Юнга  
 ■ *Fig. 1.* Some examples of Young diagrams

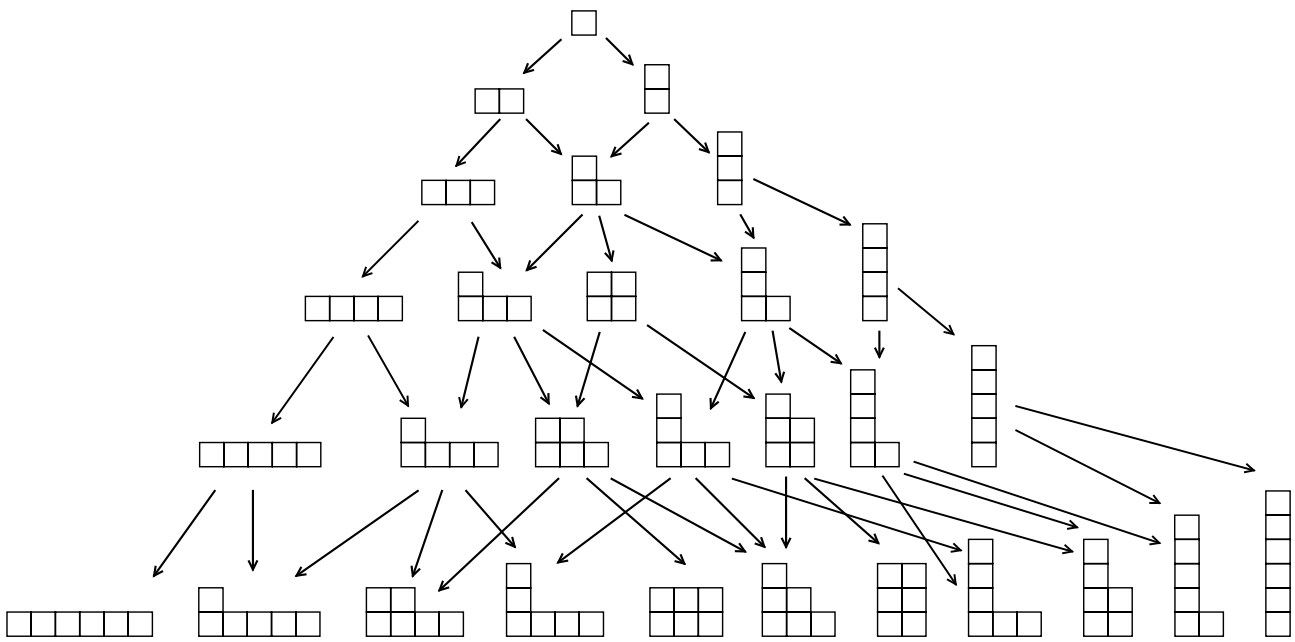
Диаграммы Юнга удобно рассматривать в качестве вершин бесконечного ориентированного градуированного графа, называемого *графом Юнга*. В этом графе ребра соединяют диаграммы Юнга, отличающиеся на одну клетку. Если ребро соединяет диаграммы  $\lambda_n$  и  $\lambda_{n+1}$ , то  $\lambda_{n+1}$  может быть получена из  $\lambda_n$  добавлением одной клетки. Начало графа Юнга изображено на рис. 2.

Если каждому ребру поставить в соответствие некоторую переходную вероятность, то на графе Юнга будет определен марковский процесс. Важнейшим классом таких процессов является класс *центральных* процессов, для которых вероятности путей между любой парой диаграмм одинаковы. На двумерном графе Юнга существует единственный выделенный центральный процесс, который называется *процессом Планшереля*. Его характерным свойством является медленный рост ширины и высоты диаграммы. Такой процесс и явные формулы переходных вероятностей для него описаны в работе [16].

*Таблица Юнга* — это диаграмма Юнга, заполненная значениями, строго возрастающими по строкам и столбцам. Значениями могут быть элементы произвольного линейно упорядоченного множества. При этом мы говорим, что эта таблица является таблицей на диаграмме  $\lambda$ , или что  $\lambda$  — форма данной таблицы.

*Стандартная таблица Юнга* — диаграмма Юнга размера  $n$ , заполненная натуральными числами от 1 до  $n$ , возрастающими по строкам и столбцам. Заметим, что каждой стандартной таблице Юнга соответствует некоторый путь на графе Юнга. В этом случае числа таблицы задают порядок добавления клеток при движении из корня графа. *Полустандартная таблица Юнга* — таблица Юнга, значения в которой не убывают по строкам и возрастают по столбцам.

Помимо конечных таблиц Юнга, состоящих из  $n$  клеток, можно также рассматривать бесконечные таблицы. Под *бесконечной таблицей Юнга* мы понимаем отображение  $\sigma: \mathbb{Z}_+^2 \Rightarrow \mathbb{N}$  такое, что при фиксированных  $i, j \in \mathbb{N}$  значения  $\sigma_{i,k}$  и  $\sigma_{k,j}$  строго возрастают при  $k \in \mathbb{N}$ . Такие бесконечные таблицы называются также нумерациями целочисленной решетки  $\mathbb{Z}_+^2$ . Заметим, что в случае бесконечных стандартных или полустандартных таблиц некоторые натуральные числа могут не



■ *Рис. 2.* Первые шесть уровней графа Юнга  
 ■ *Fig. 2.* The first six levels of the Young graph

являться значениями какой-нибудь из клеток, т. е. соответствующее отображение  $\mathbb{Z}_+^2$  во множестве натуральных чисел  $\mathbb{N}$  не обязательно является биекцией.

В данной работе рассматривались как стандартные таблицы Юнга, заполненные натуральными числами, так и полустандартные таблицы, заполненные вещественными числами, принадлежащими отрезку  $[0, 1]$ .

**Алгоритм Робинсона — Шенстеда — Кнута**

Стандартное преобразование Робинсона — Шенстеда — Кнута [1–3], называемое также алгоритмом RSK, преобразует перестановку из  $n$  целых чисел в пару стандартных таблиц Юнга размера  $n$  одинаковой формы. Одна из таблиц называется записывающей (таблица  $P$ ), а другая — нумерующей (таблица  $Q$ ). Перестановка элементов множества  $(1, 2, \dots, n)$  может рассматриваться как  $n$ -элементная последовательность, в которой все значения различны. Хорошо известно, что алгоритм RSK задает биекцию между множеством перестановок и множеством пар стандартных таблиц Юнга из  $n$  клеток [3].

В начале работы алгоритма в пустую таблицу  $P$  помещается первое значение перестановки, а в таблицу  $Q$  помещается 1. На каждом шаге алгоритма новое значение перестановки сравнивается с числами первого столбца таблицы  $P$ . В случае если данное значение больше всех значений в столбце, мы увеличиваем высоту столбца на единицу и за-

писываем значение в добавленную ячейку. Иначе оно записывается на место ближайшего большего числа, которое в свою очередь «выталкивается» в соседний справа столбец. Вытолкнутое значение ячейки занимает позицию в следующем столбце по тому же принципу. Данный процесс завершается, когда одно из вытолкнутых чисел окажется максимальным в столбце. Затем в таблицу  $Q$  помещается порядковый номер элемента перестановки в ячейку, изменившую форму таблицы  $P$ . Алгоритм завершает работу после обработки всех элементов перестановки.

На вход алгоритма может быть подана не только перестановка целых чисел, но и элементы любого линейно упорядоченного множества. В последнем случае в результате работы алгоритма будут сформированы полустандартная таблица  $P$ , заполненная элементами этого линейно упорядоченного множества, и стандартная таблица  $Q$ . В дальнейшем мы часто будем использовать в роли такого множества отрезок  $[0, 1]$ .

Ключевым моментом в доказательстве биективности соответствия RSK между перестановками и парами таблиц Юнга является тот факт, что каждый шаг алгоритма RSK обратим. Действительно, ячейка с максимальным числом таблицы  $Q$  соответствует последней вытолкнутой ячейке таблицы  $P$ . Очевидно, что число, находящееся в этой ячейке в таблице  $P$ , могло быть вытолкнуто из предыдущего столбца только ближайшим меньшим значением. Руководствуясь этим принципом, можно дойти до первого столбца таблицы  $P$  и определить последнее значение в исходной перестановке.

Затем, удалив из таблицы  $Q$  ячейку с максимальным числом, а из таблицы  $P$  ячейку с теми же координатами, можно продолжить последовательно повторять вышеописанные шаги, что позволит восстановить всю исходную перестановку вплоть до первого значения. В этом состоит доказательство биективности преобразования  $RSK$ . Так как в силу этого факта исходные перестановки взаимно-однозначно соответствуют получаемым парам таблиц Юнга, то может быть также определено обратное ему преобразование  $RSK^{-1}$ .

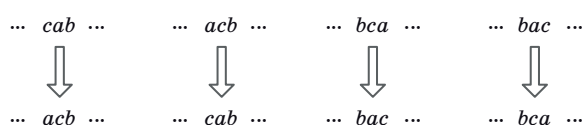
Элементы столбцов, выталкиваемые в процессе алгоритма, образуют так называемый путь вставки, или путь  $RSK$ . Асимптотика путей вставки была исследована в работах [17, 18].

### Классы эквивалентности по Кнуту и преобразования Кнута

Классы эквивалентности по Кнуту и двойственной эквивалентности по Кнуту могут быть также определены в терминах так называемых преобразований Кнута. Преобразованием Кнута последовательности целочисленных элементов называется ее преобразование в другую последовательность целочисленных элементов, имеющую один из типов, приведенных на рис. 3, где  $a < b < c$ , все остальные элементы остаются на месте.

Таким образом, преобразование Кнута меняет два соседних элемента  $a$  и  $c$  при условии, что рядом с ними стоит элемент  $b$ , для которого выполнено условие  $a < b < c$ . Например, фрагмент последовательности 7, 3, 5 может быть заменен на 3, 7, 5. Кнутом было доказано, что две перестановки эквивалентны тогда и только тогда, когда одну можно получить из другой последовательностью преобразований Кнута [19].

Другим важным свойством стандартного преобразования  $RSK$  является то, что при обращении перестановки соответствующие ей таблицы  $P$  и  $Q$  меняются местами. А потому, если пара перестановок  $\sigma$  и  $\pi$  эквивалентны по Кнуту, то  $\sigma^{-1}$  и  $\pi^{-1}$  — двойственно эквивалентны по Кнуту и наоборот. Перестановка, полученная в ходе обратного преобразования  $RSK^{-1}$ , примененного к паре таблиц  $P, Q$ , эквивалентна обратной перестановке, полученной в ходе преобразования  $RSK^{-1}$ , примененного к паре таблиц  $Q, P$ .



■ Рис. 3. Типы преобразований Кнута  
 ■ Fig. 3. Types of Knuth transformation

Из этого свойства вытекает, что поиск значения первого элемента перестановок  $w$  для таблиц, входящих в класс двойственной эквивалентности по Кнуту, эквивалентен поиску положения элемента перестановки  $w^{-1}$  со значением «единица» у таблиц, эквивалентных по Кнуту.

### Преобразование Шютценберже

Преобразование Шютценберже [20], известное также как игра в пятнадцать (jeu de taquin), преобразует таблицу Юнга размера  $n$  в таблицу Юнга размера  $n - 1$ . Это преобразование часто применяется для решения различных комбинаторных задач и, как показано в статьях [7, 8], связано с преобразованием  $RSK$ . Заметим, что преобразование Шютценберже также применимо к бесконечным таблицам Юнга.

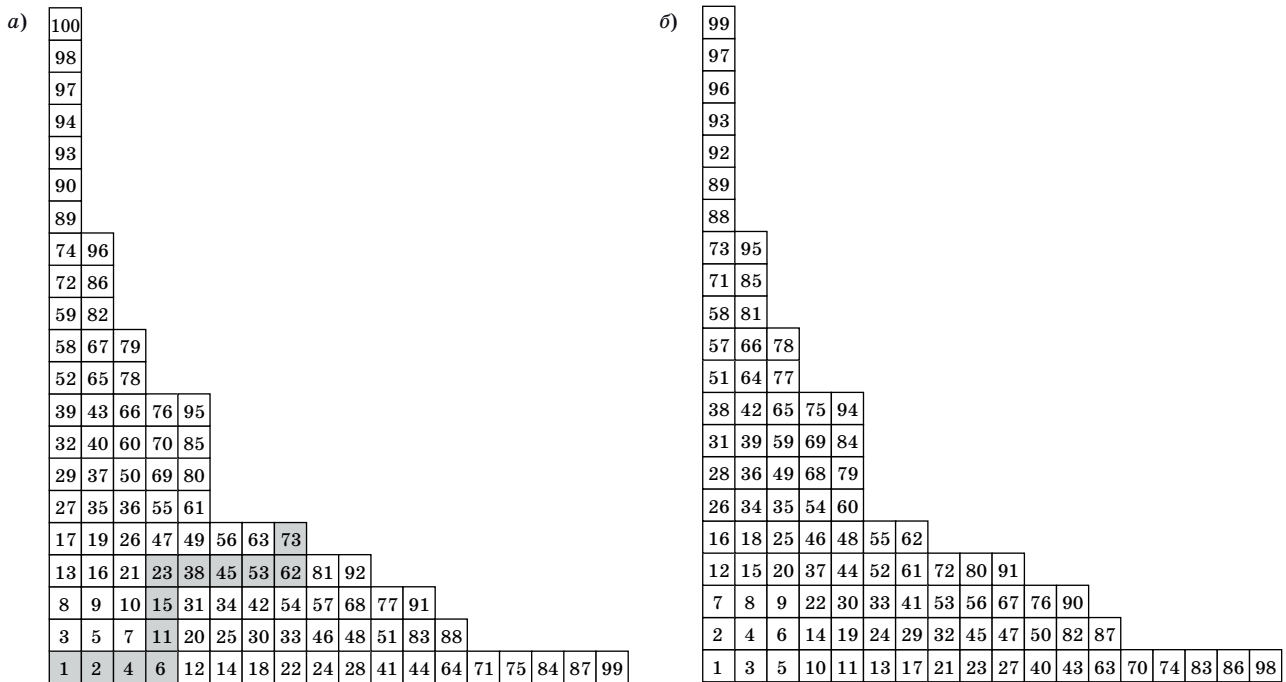
В начале работы алгоритма из таблицы удаляется первая клетка. На освободившееся место перемещается одна из двух соседних клеток, расположенных сверху или справа от удаленной. Для перемещения выбирается клетка с меньшим значением. На освободившееся место по такому же принципу ставится значение одной из клеток, соседних с перемещаемой. Алгоритм завершает работу при достижении угловой клетки диаграммы, поскольку у таких клеток отсутствуют соседи сверху и справа. В полученной таблице размера  $n - 1$  уменьшаются на единицу все значения, после чего она оказывается приведенной к виду стандартной таблицы Юнга.

Путь Шютценберже (нерв) таблицы Юнга — множество клеток таблицы, смещаемых при преобразовании Шютценберже. На рис. 4,  $a$  изображена исходная таблица Юнга и соответствующий ей нерв, а на рис. 4,  $b$  — образ этой таблицы после применения к ней преобразования Шютценберже.

Преобразования  $RSK$  и Шютценберже связаны между собой: смещение последовательности на один элемент влево (забывание первого элемента последовательности) равносильно применению к нумерующей таблице преобразования Шютценберже. Заметим, что, помимо классического преобразования Шютценберже, существуют также его модификации [21], на основе которых, в частности, может быть реализован генератор равномерно распределенных таблиц Юнга.

### Соответствие между значением первого элемента последовательности и углом наклона пути Шютценберже нумерующей таблицы

В настоящей работе для обозначения конца нерва и визуализации диаграмм применяются



■ **Рис. 4.** Преобразование Шютценберже: *a* — исходная таблица Юнга и путь Шютценберже; *б* — преобразованная таблица Юнга

■ **Fig. 4.** The Schützenberger transformation: *a* — the initial Young tableau and its nerve; *б* — the transformed Young tableau

нормированные координаты Вершика — Керова. Эта система координат  $(u, v)$  получается из прямоугольной системы координат  $(x, y)$  поворотом осей на  $45^\circ$  против часовой стрелки. Для некоторых задач комбинаторики диаграмм Юнга ее удобнее использовать вместо прямоугольной системы координат  $(x, y)$ .

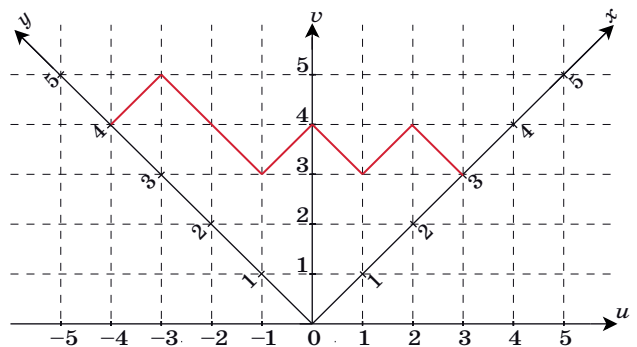
Красной линией (рис. 5) выделена форма диаграммы Юнга из семи клеток, представленной в обеих системах координат. Заметим, что изображение диаграмм Юнга в системе координат Вершика — Керова часто называют русской нотацией.

Пусть  $W_n \in [-2, 2]$  означает нормированную проекцию конца нерва нумерующей таблицы  $t_n$  на ось абсцисс системы координат Вершика — Керова, а  $\theta_n$  — угол наклона нерва, который определяется как угол наклона прямой, соединяющей конец этого нерва с началом координат.

В теореме 1.1 работы [8] было доказано, что с вероятностью 1 по мере Планшереля у бесконечной таблицы Юнга  $t$  существует предельное значение угла наклона  $\theta$  пути Шютценберже:

$$(\cos \theta(t), \sin \theta(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{p}(t_k)}{\|\mathbf{p}(t_k)\|},$$

где  $\mathbf{p}(t_k)$  — вектор, соединяющий начало координат с концом нерва таблицы  $t_k$ , состоящей из  $k$  первых клеток таблицы  $t$ .



■ **Рис. 5.** Диаграмма Юнга в системе координат Вершика — Керова и в прямоугольной системе координат

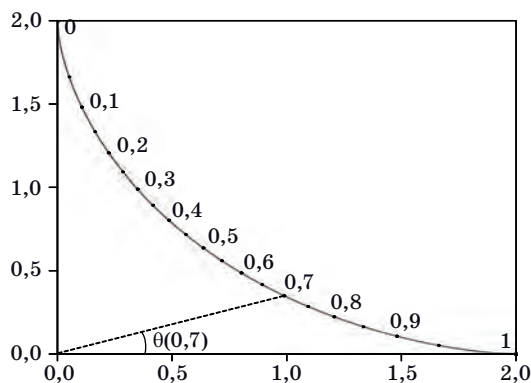
■ **Fig. 5.** A Young diagram in the Vershik — Kerov coordinate system and in the rectangular coordinate system

Аналогично существует предельное значение  $W$  нормированной проекции  $W_n$ . Значения угла  $\theta$  и проекции  $W$  связаны уравнением

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \theta \right) = \frac{2}{\pi} \left( \sin^{-1} \left( \frac{W}{2} \right) + \frac{\sqrt{4 - W^2}}{W} \right). \quad (1)$$

Угол  $\theta_n$  наклона нерва таблицы  $t_n$  определен соотношением

$$\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \theta_n \right) = \frac{x_n + y_n}{x_n - y_n}, \quad (2)$$



■ **Рис. 6.** Связь между значениями первых элементов входящих бесконечных последовательностей и предельными углами наклона нервов таблиц  $Q$

■ **Fig. 6.** The connection between the values of first elements of infinite sequences and limit angles of nerves of  $Q$  tableaux

где  $x_n, y_n$  — прямоугольные координаты конца нерва таблицы  $t_n$ .

Первый элемент  $z \in [0, 1]$  из входящей бесконечной последовательности может быть определен по значению  $W \in [-2, 2]$  по формуле

$$z = \frac{1}{2} + \frac{W\sqrt{4-W^2}}{4\pi} + \frac{\sin^{-1}\left(\frac{W}{2}\right)}{\pi}. \quad (3)$$

Заметим, что правая часть этого соотношения является функцией распределения случайной величины  $W$ , полученной по случайной таблице  $t$  с планшерелевским распределением.

Значение  $W$ , соответствующее конкретному первому элементу  $z \in [0, 1]$  входящей последовательности, определяется из уравнения (3), рассматриваемого как неявное трансцендентное уравнение относительно  $W$ . Значение предельного угла  $\theta$  вычисляется из (2). В вычислениях мы использовали итерационный процесс Ньютона для решения этого уравнения относительно  $W$ . На рис. 6 показаны точки кривой Вершика — Керова — Логана — Шеппа, задающей предельную форму для типичной планшерелевской диаграммы, соответствующие различным значениям параметра  $z$ . Параметр  $z \in [0, 1]$  можно также использовать для параметризации кривой Вершика — Керова — Логана — Шеппа.

### Программная реализация

В рамках настоящей работы был разработан программный пакет на языке C++, ориентированный для работы с таблицами Юнга. Пакет включает в себя следующие функции:

- алгоритм  $RSK$ ;

- обратный алгоритм  $RSK^{-1}$ ;
- построение частотной гистограммы значений первого элемента перестановки;
- построение списка позиций, занимаемых единицей в перестановках;
- генератор случайных планшерелевских таблиц Юнга одинаковой формы;
- генератор случайных таблиц Юнга заданной формы с заданным концом нерва;
- генератор случайных таблиц Юнга заданной формы с фиксированными значениями в первой строке;
- преобразование Шютценберже и его модификации;
- средства визуализации.

В силу того, что задачи асимптотической комбинаторики, связанные с исследованием диаграмм и таблиц Юнга, имеют очень высокую сложность, их моделирование требует привлечения диаграмм и таблиц очень больших размеров. По этой причине некоторые функции были реализованы с применением технологии параллельных вычислений OpenMP.

С использованием разработанного пакета были проведены компьютерные эксперименты, в которых исследовались классы эквивалентности и двойственной эквивалентности по Кнуту. Генерировались различные случайные записывающие и нумерующие таблицы Юнга, распределенные по мере Планшереля (типичные по Планшерелю) и принадлежащие определенному классу эквивалентности или двойственной эквивалентности по Кнуту.

### Численные эксперименты

Все приведенные численные эксперименты делятся на несколько групп. Для каждой группы экспериментов при помощи генератора типичных планшерелевских таблиц Юнга генерировалось определенное количество пар таблиц (разное для каждого отдельного эксперимента). Для формирования определенного класса эквивалентности или двойственной эквивалентности по Кнуту фиксировалась либо записывающая, либо нумерующая таблица. Для всех нумерующих таблиц вычислялись нервы, и эти нервы объединялись в группы с одинаковыми координатами концов. С помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  восстанавливалась последовательность, которой соответствовала каждая конкретная пара таблиц Юнга.

К каждой паре таблиц, определяющих перестановки, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности или двойственной эквивалентности по Кнуту, последовательно применялся алгоритм обратного преобразования  $RSK^{-1}$ . При исследовании классов эквивалентности по

Кнуту вычислялось значение первого элемента во входящих последовательностях. Для исследования классов двойственной эквивалентности по Кнуту изучалось множество возможных положений единицы во входящих последовательностях, принадлежащих одному и тому же классу.

Исследовались:

1) зависимость значения первого элемента восстановленной входной последовательности от координат конца нерва нумерующей таблицы и позиция этого первого элемента в первой строке записываемой таблицы для последовательностей, соответствующих парам таблиц, участвующих в эксперименте;

2) множество возможных положений единицы в вычисленной с помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  входной последовательности при фиксации нумерующей таблицы.

**Зависимость значения первого элемента входной последовательности от координат конца пути Шютценберже**

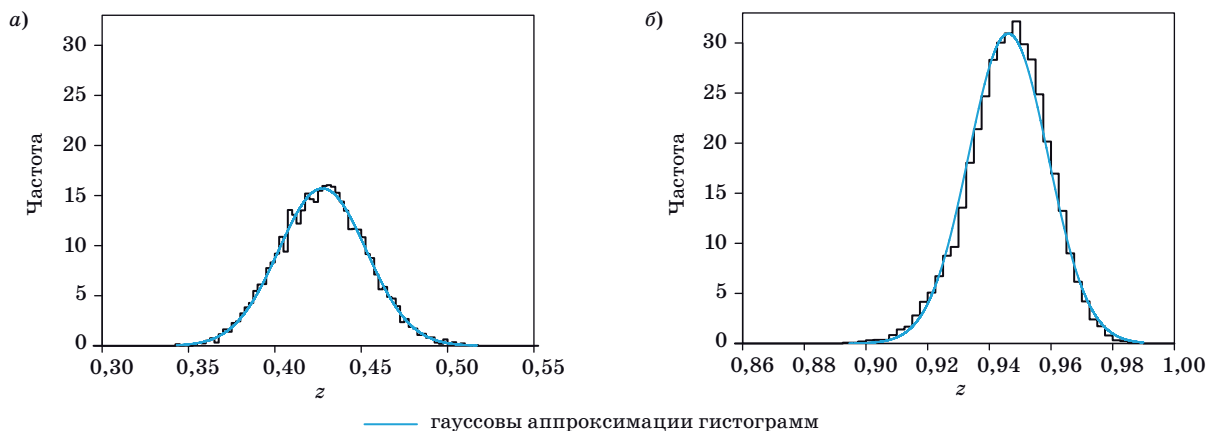
В данной группе численных экспериментов изучалась зависимость значений первого элемента входной последовательности от координат конца нерва таблицы  $Q$  и результат сравнивался с теоретически полученной в работе [8] формулой. Было сгенерировано  $10^4$  типичных по мере Планшереля таблиц  $P$  одинаковой формы, состоящих из  $10^5$  клеток, а также  $10^5$  типичных по мере Планшереля таблиц  $P$  одинаковой формы, состоящих из  $10^4$  клеток. Для каждой группы таблиц  $P$  было построено по одной таблице  $Q$  той же формы со всеми возможными различными координатами конца пути Шютценберже. Количество таблиц  $Q$  было выбрано равным количеству угловых клеток диаграммы, форму которой имеют таблицы  $P$  и  $Q$ .

Изучались классы двойственной эквивалентности по Кнуту, включающие в себя одну из сгенерированных таблиц  $Q$  и множество таблиц  $P$ . Для представителей каждого класса эквивалентности с помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  вычислялось множество соответствующих им последовательностей. Строились частотные гистограммы значений первых элементов полученных последовательностей.

Примеры полученных гистограмм для двух различных классов двойственной эквивалентности по Кнуту представлены на рис. 7, *а* и *б*. Рассматривалось  $10^4$  таблиц  $P$  размера  $10^5$  из соответствующего класса. Каждая из гистограмм была аппроксимирована гауссовой кривой, параметры которой  $\sigma$  и  $\mu$  соответствуют среднему значению и среднеквадратическому отклонению значений первого элемента последовательностей, соответствующих определенному классу эквивалентности.

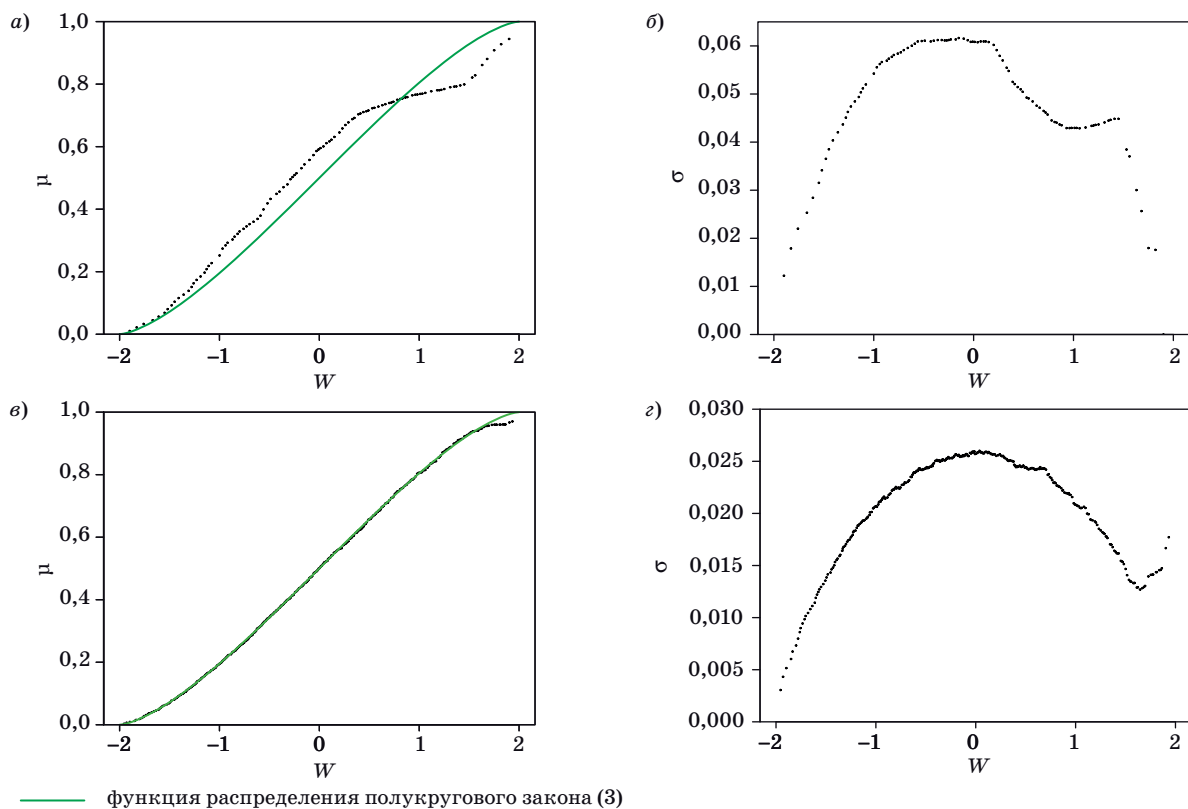
На рис. 8, *а* изображен график математических ожиданий, а на рис. 8, *б* — среднеквадратических отклонений значений первого элемента последовательности длины  $10^4$  в зависимости от проекции конца нерва на горизонтальную ось системы координат Вершика — Керова для  $10^5$  таблиц  $P$  фиксированных классов двойственной эквивалентности по Кнуту. На рис. 8, *в, г* изображены соответствующие графики для экспериментов, в которых рассматривалось по  $10^4$  таблиц  $P$ , имеющих размер  $10^5$ .

Как видно из рис. 8, *а, в, с* с ростом размера таблиц оценки значений первого элемента последовательности приближаются к теоретическим значениям. Также с ростом размера таблиц уменьшается разброс оцениваемых значений, что показано на рис. 8, *б, г*: максимальное среднеквадратическое отклонение для таблиц размера  $10^4$



■ **Рис. 7.** Гистограммы частот значений первого элемента последовательности для таблицы  $Q$  с координатами конца нерва: *а* —  $-0,224522$ ; *б* —  $1,612762$

■ **Fig. 7.** Frequency histograms of the first element values of the sequence for the  $Q$  tableau with the following coordinates of nerve end: *а* —  $-0,224522$ ; *б* —  $1,612762$ . Gaussian approximations of histograms are marked in blue



■ **Рис. 8.** Распределение значений первого элемента в последовательностях: размера  $10^4$  ( $10^5$  таблиц  $P$ ), где  $a$  — математические ожидания;  $b$  — среднеквадратические отклонения; размера  $10^5$  ( $10^4$  таблиц  $P$ ), где  $в$  — математические ожидания;  $з$  — среднеквадратические отклонения

■ **Fig. 8.** The distribution of values of the first element in sequences: of size  $10^4$  ( $10^5$  of  $P$  tableaux), where  $a$  — mean values;  $b$  — standard deviations; of size  $10^5$  ( $10^4$  of  $P$  tableaux), where  $в$  — mean values;  $з$  — standard deviations. The cumulative distribution function of the semicircle distribution is marked in green

оказалось равным 0,0616, а для таблиц размера  $10^5$  равным 0,026.

Для исследования точности оценки значения первого элемента последовательности был также проведен следующий эксперимент. Для каждого полученного в ходе предыдущего эксперимента значения  $z$  с помощью метода Ньютона вычислялось соответствующее ему значение  $W$  из формулы (3), а значение угла наклона  $\theta$  получалось из (1). Затем вычислялись расстояния между точками пересечения с предельной кривой Вершика — Керова — Логана — Шеппа нервов таблиц  $Q$  и прямых с углами наклона  $\theta$ . Эти расстояния представляют собой отклонения значений  $W$  в численном эксперименте от теоретических предельных значений. На рис. 9,  $a, б$  приведены графики вычисленных отклонений.

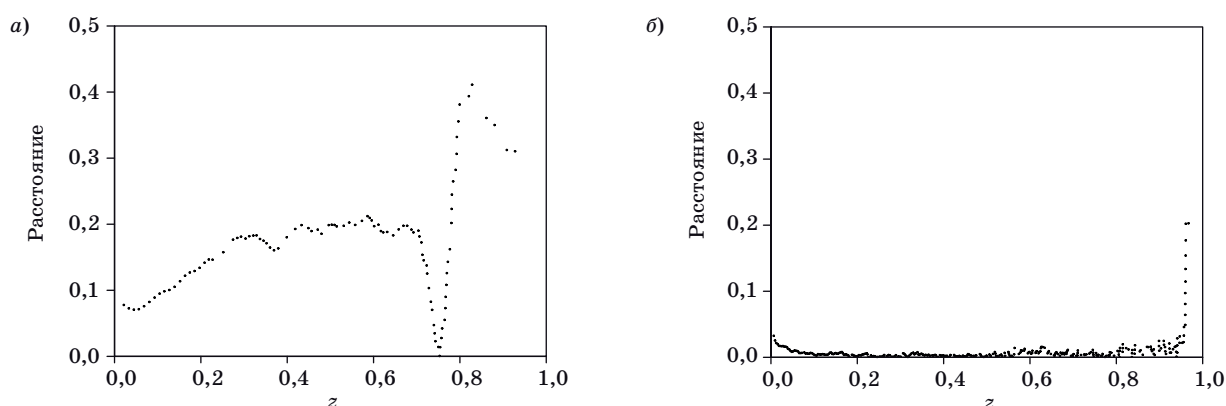
Легко видеть, что точность соответствия между значением первого элемента последовательности и углом наклона нерва таблицы  $Q$  тем выше, чем больше размер таблиц. Результаты экспериментов показывают существенное возрастание точности при увеличении размера таблиц, участвующих в эксперименте. Это же можно видеть

и на рис. 8,  $a, в$ , которые демонстрируют отклонение значения вычисленного математического ожидания значения первого элемента от его предельного теоретического значения.

В ходе экспериментов было замечено, что при фиксированной таблице  $P$  значения первого элемента последовательности зависят только от координат конца нерва таблицы  $Q$ . Это означает, что при фиксированном наборе таблиц  $P$  и фиксированных координатах конца нерва Шютценберже таблиц  $Q$  в этом эксперименте гистограммы значений первого элемента получаются идентичными.

Для проверки этого факта в компьютерном эксперименте было сгенерировано 100 различных таблиц  $Q$  размера  $10^4$  одинаковой формы с одинаковыми координатами конца нерва Шютценберже и 10 таблиц  $P$  такой же формы. Для полученных классов эквивалентности по Кнуту с помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  строились перестановки. В результирующих перестановках значения первого элемента оказались одинаковыми, при этом уже вторые элементы в полученных перестановках могли различаться. На основе этих численных экспериментов можно предположить,





■ **Рис. 9.** Расстояния между точками пересечения с предельным фронтом прямых с углами наклона  $\theta$  и нервов таблиц  $Q$  размера  $10^4$  (а) и  $10^5$  (б)

■ **Fig. 9.** Distances between intersection points of the limit shape with lines with inclinations  $\theta$  and nerves of tableaux  $Q$  of size  $10^4$  (a) and  $10^5$  (b)

что значение первого элемента перестановки однозначно определяется таблицей  $P$  и координатами конца нерва Шютценберже таблицы  $Q$ . Из этого предположения следует, что количество возможных положений единицы для элементов одного класса двойственной эквивалентности по Кнуту не превышает количества угловых клеток нумерующей таблицы, т. е. количества возможных концов нерва.

#### Исследование положения единицы в перестановках, двойственно эквивалентных по Кнуту

Одним из свойств стандартного преобразования RSK для перестановок является то, что преобразование RSK, примененное к обратной перестановке, меняет между собой записывающую и нумерующую таблицы. Отсюда следует, что поиск положения единицы в перестановках, двойственно эквивалентных по Кнуту, эквивалентен поиску значения первого элемента в перестановках, эквивалентных по Кнуту.

В следующей группе экспериментов определялось множество возможных положений единицы в перестановках, двойственно эквивалентных по Кнуту. Результаты экспериментов показали, что количество возможных положений единицы в перестановках, принадлежащих одному классу двойственной эквивалентности по Кнуту, меньше или равно количеству угловых клеток в соответствующей таблице диаграмме Юнга, что полностью соответствует высказанному предположению о зависимости значения первого элемента только от таблицы  $P$  и координат конца нерва таблицы  $Q$ , так как нерв таблицы всегда кончается в одной из угловых клеток диаграммы.

Было сгенерировано 1000 планшерелевских таблиц одинаковой формы с 32 угловыми клетками, но с различными координатами конца нерва.

В ходе эксперимента было построено 1000 классов двойственной эквивалентности по Кнуту: сгенерированные таблицы использовались и как таблицы  $P$ , и как таблицы  $Q$ . Таким образом, всего было сгенерировано  $10^6$  различных пар  $P$ ,  $Q$  таблиц Юнга. В данных классах определялось положение единицы в соответствующих перестановках. В результате данного эксперимента было выяснено, что количество возможных положений единицы в перестановке для каждого класса двойственной эквивалентности находилось в диапазоне от 6 до 15, что не превышает количества угловых клеток.

Также были проведены эксперименты для произвольных таблиц, не обязательно типичных по Планшерелю. В одном из экспериментов было сгенерировано 1000 прямоугольных таблиц размера 1000 (50 по горизонтали, 20 по вертикали). Такая форма была выбрана из тех соображений, что прямоугольные таблицы имеют только одну угловую клетку. Для сформированных из них классов двойственной эквивалентности аналогичным образом производился подсчет количества возможных положений единицы в соответствующих последовательностях. Какова бы ни была прямоугольная таблица, участвовавшая в эксперименте, множество возможных положений единицы во входной последовательности состояло из одного элемента, что соответствует предположению, высказанному в конце предыдущего подраздела. Нужно отметить, что у каждого класса значение было различным и зависело лишь от таблицы  $Q$ .

#### Заключение

В данной работе изучались свойства перестановок, принадлежащих одному и тому же классу эквивалентности или классу двойственной экви-

валентности по Кнуту. Для двойственной эквивалентности с помощью обратного преобразования  $RSK^{-1}$  исследовалось значение первого элемента соответствующей перестановки. Для эквивалентности по Кнуту исследовались положения единиц для перестановок, принадлежащих одному классу. В численных экспериментах изучалась точность восстановления первого элемента по углу наклона пути Шютценберже нумерующей таблицы.

С помощью серии компьютерных экспериментов изучен характер зависимости значений первого элемента перестановки, получаемой обратным преобразованием  $RSK^{-1}$ , от координат конца нерва нумерующей таблицы. Эта зависимость сравнивалась с предельной теоретической формулой [8], которая справедлива в случае бесконечных таблиц Юнга.

Экспериментально установлено, что при фиксированной записывающей таблице значение первого элемента перестановки зависит только от координат конца нерва нумерующей таблицы. Следствием данного наблюдения является то, что количество возможных положений единиц в перестановке не превышает количества угловых клеток соответствующей диаграммы Юнга.

В дальнейшем планируется реализовать быстрые алгоритмы прямого и обратного преобразований  $RSK$ , которые позволят проводить массивные численные эксперименты на таблицах Юнга значительно большего размера.

Авторы выражают благодарность А. М. Вершику за многочисленные идеи для численных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 17-01-00433.

### Литература

1. **Robinson G. de B.** On the representations of the symmetric group. *American Journal of Math.*, 1938, vol. 60, pp. 745–760.
2. **Schensted C.** Longest increasing and decreasing subsequences. *Canadian Journal of Math.*, 1961, vol. 13, pp. 179–191.
3. **Knuth Donald E.** Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific J. Math.*, 1970, vol. 34, iss. 3, pp. 709–727.
4. **O’Connell N.** A path-transformation for random walks and the Robinson — Schensted correspondence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 355, pp. 3669–3697. Available at: <https://www.ams.org/journals/tran/2003-355-09/S0002-9947-03-03226-4/S0002-9947-03-03226-4.pdf> (accessed 15 November 2018).
5. **Dauvergne D.** *The Archimedean limit of random sorting networks.* Available at: [arxiv.org/abs/1802.08934](https://arxiv.org/abs/1802.08934) (accessed 11 November 2018).
6. **Angel O., Holroyd A. E., Romik D., Virag B.** Random sorting networks. *Advances in Mathematics*, 2007, vol. 215, iss. 2, pp. 839–868. doi.org/10.1016/j.aim.2007.05.019
7. **Kerov S. V. and Vershik A. M.** The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson — Schensted — Knuth algorithm. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1986, vol. 7, iss. 1, pp. 116–124.
8. **Romik D. and Śniady P.** Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. *Annals of Probability: An Official Journal of the Institute of Mathematical Statistics*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 682–737.
9. **Vershik A., Pavlov D.** Numerical experiments in problems of asymptotic representation theory. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 168, iss. 3, pp. 351–361.

10. **Васильев Н. Н., Дужин В. С.** Построение неприводимых представлений симметрической группы  $S(n)$  с большими и максимальными размерностями. *Информационно-управляющие системы*, 2015, № 3, с. 17–22. doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.17
11. **Vasiliev N. N., Duzhin V. S.** A study of the growth of the maximum and typical normalized dimensions of strict Young diagrams. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 216, iss. 1, pp 53–64. doi:10.1007/s10958-016-2887-x
12. **Duzhin V. S., Vasilyev N. N.** Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams — growth and oscillations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2016, vol. 25, iss. 12. doi:10.1142/S0218216516420025
13. **Duzhin V., Vasilyev N.** Modeling of an asymptotically central Markov process on 3D Young graph. *Mathematics in Computer Science*, 2017, vol. 11, iss. 3–4, pp. 315–328. doi:10.1007/s11786-017-0314-4
14. **Vasiliev N. N., Duzhin V. S.** Numerical study of the asymptotics of path probabilities in a Markov process close to a central one on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, iss. 2, pp. 214–220. doi:10.1007/s10958-017-3406-4
15. **Fulton W.** *Young diagrams, with applications to representation theory and geometry.* Cambridge University Press, 1996. 272 p.
16. **Вершик А. М., Керов С. В.** Асимптотическая теория характеров симметрической группы. *Функциональный анализ и его приложения*, 1981, т. 15, вып. 4, с. 15–27.
17. **Śniady P.** Robinson — Schensted — Knuth algorithm, jeu de taquin and Kerov — Vershik measures on infinite tableaux. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2013, vol. 28, iss. 2. doi:10.1137/130930169
18. **Romik D., Śniady P.** *Limit shapes of bumping routes in the Robinson — Schensted correspondence.* Available at: [arXiv:1304.7589v2](https://arxiv.org/abs/1304.7589v2) (accessed 11 November 2018).

19. Fomin S. V. *Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood — Richardson rule*. Appendix 1 to Chapter 7. In: Stanley R. P. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, 1999. 595 p.
20. Schützenberger M. P. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Math. Scandinavica*, 1963, vol. 12, pp. 117–128.

21. Duzhin V., Vasilyev N. Schützenberger transformation on graded graphs: Implementation and numerical experiments. *International Conf. “Polynomial Computer Algebra 2018”*, Saint-Petersburg, 16–21 April 2018, ed. by N. N. Vassiliev, VVM Publishing, Saint-Petersburg, 2018, pp. 41–46.

UDC 519.165, 517.938

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

### Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson — Schensted — Knuth transformation

N. N. Vassiliev<sup>a,b</sup>, PhD, Phys.-Math., Senior Researcher, orcid.org/0000-0002-0841-1168

V. S. Duzhin<sup>b</sup>, Researcher, orcid.org/0000-0001-8399-284X, vsduzhin@etu.ru

A. D. Kuzmin<sup>b</sup>, Student, orcid.org/0000-0001-9975-4686

<sup>a</sup>Saint-Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the RAS, 27, Fontanka, 191023, Saint-Petersburg, Russian Federation

<sup>b</sup>Saint-Petersburg Electrotechnical University ETU «LETI», 5, Professora Popova St., 197376 Saint-Petersburg, Russian Federation

**Introduction:** All information about a permutation, i.e. about an element of a symmetric group  $S(n)$ , is contained in a pair of Young tableaux mapped to it by RSK transformation. However, when considering an infinite sequence of natural or real numbers instead of a permutation, all information about it is contained only in an insertion infinite Young tableau. The connection between the first element of an infinite sequence of uniformly distributed random values and the limit angle of the recording tableau nerve was found in a recent work by D. Romik and P. Sniady. However, so far there were no massive numerical experiments devoted to the reconstruction of the beginning of such a sequence by the beginning of an insertion Young tableau. The reconstruction accuracy is very important, because even the value of the first element of a sequence can be determined only by an infinite tableau. **Purpose:** Developing a software package for operations on Young diagrams and Young tableaux, and its application for numerical experiments with large Young tableaux. Studying the properties of Knuth equivalence classes and dual Knuth equivalence classes on a set of permutations by numerical experiments using direct and inverse RSK transformation. **Results:** A software package is developed using the C++ programming language. It includes functions for dealing with Young diagrams and tableaux. The dependence of values of the first element of a permutation obtained by inverse RSK transformation on the recording tableau nerve end coordinates was investigated by conducting massive numerical experiments. Standard deviations of these values were calculated for permutations of different sizes. We determined possible positions of 1 in permutations of the same Knuth equivalence class. It has been found out that the number of these positions does not exceed the number of corner boxes of the corresponding Young diagram. Experiments showed that for a fixed insertion tableau, the value of the first element of a permutation depends only on the recording tableau nerve end coordinates.

**Keywords** — RSK algorithm, RSK correspondence, equivalence classes of permutations, Knuth equivalence, dual Knuth equivalence, Schützenberger transformation, Plancherel process, Young diagrams, Young tableaux, Vershik — Kerov curve, Bratteli — Vershik diagram, numerical experiments, asymptotic combinatorics.

**For citation:** Vassiliev N. N., Duzhin V. S., Kuzmin A. D. Investigation of properties of equivalence classes of permutations by inverse Robinson — Schensted — Knuth transformation. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 11–22 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-11-22

### References

- Robinson G. de B. On the representations of the symmetric group. *American Journal of Math.*, 1938, vol. 60, pp. 745–760.
- Schensted C. Longest increasing and decreasing subsequences. *Canadian Journal of Math.*, 1961, vol. 13, pp. 179–191.
- Knuth Donald E. Permutations, matrices, and generalized Young tableaux. *Pacific J. Math.*, 1970, vol. 34, iss. 3, pp. 709–727.
- O’Connell N. A path-transformation for random walks and the Robinson — Schensted correspondence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2003, vol. 355, pp. 3669–3697. Available at: <https://www.ams.org/journals/tran/2003-355-09/S0002-9947-03-03226-4/S0002-9947-03-03226-4.pdf> (accessed 15 November 2018).
- Dauvergne D. *The Archimedean limit of random sorting networks*. Available at: [arxiv.org/abs/1802.08934](https://arxiv.org/abs/1802.08934) (accessed 11 November 2018).
- Angel O., Holroyd A. E., Romik D., Virag B. Random sorting networks. *Advances in Mathematics*, 2007, vol. 215, iss. 2, pp. 839–868. doi.org/10.1016/j.aim.2007.05.019
- Kerov S. V. and Vershik A. M. The characters of the infinite symmetric group and probability properties of the Robinson — Schensted — Knuth algorithm. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1986, vol. 7, iss. 1, pp. 116–124.
- Romik D. and Sniady P. Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles. *Annals of Probability: An Official Journal of the Institute of Mathematical Statistics*, 2015, vol. 43, iss. 2, pp. 682–737.
- Vershik A., Pavlov D. Numerical experiments in problems of asymptotic representation theory. *Journal of Mathematical Sciences*, 2010, vol. 168, iss. 3, pp. 351–361.
- Vasilyev N. N., Duzhin V. S. Building irreducible representations of a symmetric group  $S(n)$  with large and maximum dimensions. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2015, no. 3, pp. 17–22 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.17
- Vassiliev N. N., Duzhin V. S. A study of the growth of the maximum and typical normalized dimensions of strict Young diagrams. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 216, iss. 1, pp. 53–64. doi:10.1007/s10958-016-2887-x

12. Duzhin V. S., Vasilyev N. N. Asymptotic behavior of normalized dimensions of standard and strict Young diagrams — growth and oscillations. *Journal of Knot Theory and its Ramifications*, 2016, vol. 25, iss. 12. doi:10.1142/S0218216516420025
13. Duzhin V., Vasilyev N. Modeling of an asymptotically central Markov process on 3D Young graph. *Mathematics in Computer Science*, 2017, vol. 11, iss. 3–4, pp. 315–328. doi:10.1007/s11786-017-0314-4
14. Vasilyev N. N., Duzhin V. S. Numerical study of the asymptotics of path probabilities in a Markov process close to a central one on the 3D Young graph. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, iss. 2, pp. 214–220. doi:10.1007/s10958-017-3406-4
15. Fulton W. *Young diagrams, with applications to representation theory and geometry*. Cambridge University Press, 1996. 272 p.
16. Vershik A. M., Kerov S. V. Asymptotic theory of characters of the symmetric group. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya* [Functional Analysis and its Applications], 1981, vol. 15, iss. 4, pp. 246–255.
17. Śniady P. Robinson — Schensted — Knuth algorithm, jeu de taquin and Kerov — Vershik measures on infinite tableaux. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2013, vol. 28, iss. 2. doi:10.1137/130930169
18. Romik D., Śniady P. *Limit shapes of bumping routes in the Robinson — Schensted correspondence*. Available at: arXiv:1304.7589v2 (accessed 11 November 2018).
19. Fomin S. V. *Knuth equivalence, jeu de taquin, and the Littlewood — Richardson rule*. Appendix 1 to Chapter 7. In: Stanley R. P. *Enumerative Combinatorics*. Vol. 2. Cambridge University Press, 1999. 595 p.
20. Schützenberger M. P. Quelques remarques sur une construction de Schensted. *Math. Scandinavica*, 1963, vol. 12, pp. 117–128.
21. Duzhin V., Vasilyev N. Schützenberger transformation on graded graphs: Implementation and numerical experiments. *International Conf. “Polynomial Computer Algebra 2018”*, Saint-Petersburg, 16–21 April 2018, ed. by N. N. Vassiliev, VVM Publishing, Saint-Petersburg, 2018, pp. 41–46.

---

### УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая SCOPUS и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой — различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, снижая рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста, есть возможность провести регистрацию на 12-ти языках, включая русский (чтобы выбрать язык, кликните на зеленое поле вверх справа на стартовой странице): <https://orcid.org>

---