УДК 519.2
doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

Научные статьи
Articles

Статистические характеристики среднего уровня полезности элитной группы в процессе отбора

А. А. Монаков[a], *доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-4469-0501, a_monakov@mail.ru*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ*

Введение: *развитие биологических и социальных систем во многом определяется уровнем полезности элитной группы, которая выделяется из основной популяции и характеризуется высоким статусным положением. Процесс формирования элитной группы носит случайный характер в силу неизбежных ошибок при отборе. Степень влияния этих ошибок на уровень полезности элитной группы различна в зависимости от правил отбора.* ***Цель:*** *оценка влияния правил отбора на динамику изменения среднего уровня полезности элитной группы.* ***Результаты:*** *определена динамика изменения вероятностных характеристик среднего уровня полезности элитной группы при двух сценариях отбора: с фиксированным порогом и порогом, который определяется достигнутым на момент отбора средним уровнем полезности группы. Установлено, что при отборе по первому сценарию средний уровень полезности элитной группы стремится к уровню, величина которого даже при больших вероятностях ошибки отбора больше среднего уровня полезности по всей популяции. Однако если считать недопустимым уменьшение среднего уровня полезности элиты ниже порога отбора, вероятность ошибок при отборе должна быть меньше или равна квадрату вероятности попадания члена популяции в элитную группу. Доказано, что при втором сценарии средний уровень полезности элитной группы стремится к среднему значению этого параметра по всей популяции независимо от вероятности ошибки отбора. Величина последней влияет только на длительность переходного процесса, в течение которого элита «растворяется» в популяции, и ее представители в среднем перестают отличаться от других членов популяции по уровню своей полезности. Введено понятие критической вероятности ошибки отбора, при котором средний уровень полезности элитной группы равен нижней допустимой границе.* ***Практическая значимость:*** *доказано, что для правильного формирования элиты должен использоваться сценарий отбора с фиксированным, высоким порогом отбора. Вычисленное значение критической вероятности ошибки отбора может быть использовано для контроля процесса формирования элитной группы.*

Ключевые слова *— элита, элитная группа, статус члена, уровень полезности, отбор, вероятность ошибки отбора.*

Для цитирования: Монаков А. А. Статистические характеристики среднего уровня полезности элитной группы в процессе отбора. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 57–64. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64
For citation: Monakov A. A. Statistical characteristics of the mean level of an elite group utility in selection. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 57–64 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

Введение

В биологических и социальных системах огромное значение имеют процессы формирования и эволюции элитной группы (ЭГ) (элиты), члены которой обладают более высоким значением некоторого статусного параметра по отношению к оставшейся части популяции. Благодаря этому превосходству элита имеет значительное влияние на состояние и развитие всей популяции в целом. Таким статусным параметром может быть положение в системе социальной иерархии (социальные группы) или чистота линии, продуктивность, технологические качества (биологические группы). Одновременно каждый член популяции, включая и членов ЭГ, может быть охарактеризован некоторым уровнем полезности, который объективно передает степень влияния члена на эволюцию популяции. Очевидно, если статусные положения членов элиты соответствуют высоким значениям уровня полезности, динамика развития популяции с большой вероятностью будет положительной (прогресс), и наоборот, несоответствие статуса и уровня полезности может привести всю популяцию к застою или даже отрицательной динамике развития (регресс).

Процесс изучения влияния элиты на жизнь общества имеет долгую историю. Согласно [1], она восходит к трудам Ибн Халдуна (1332–1406), арабского философа, историка, политического и общественного деятеля [2]. В настоящее время изучение процессов формирования, развития и влияния элит оформилось в отдельное направление — элитологию [3]. Признанными основателями элитологии являются итальянские социологи Н. Макиавелли (1469–1527), Г. Моска (1858–1941), В. Парето (1848–1923), Р. Михельс (1876–1936). В отечественной школе становление и развитие науки о роли элит в жизни общества связано с именем Л. Н. Гумилева (1912–1992). В настоящей статье не будет анализа учений названных авторов, во-первых, потому что он дан в многочисленных публикациях по элитологии (см. [1, 3–5] и ссылки в этих работах), и, во-вторых, по той причине, что статья посвящена математическому анализу процесса отбора в элиту.

Необходимо, однако, отметить, что у истоков зарубежной элитологии стоял Вильфредо

Парето — экономист, философ и инженер, чья теория циркуляции элит способствовала применению математических методов в теории эволюции общества [1, 6]. И все же исследования процессов в ЭГ и их влияния на общество в настоящее время в основном касаются исторических, экономических, социологических, политических, правовых, а также морально-нравственных аспектов [7–9]. По-видимому, такое положение дел объясняется существующим интересом к жизни элиты и тем резонансом, который имеют в обществе события, происходящие в ЭГ.

В то же время в элитологии математические методы давно нашли применение для анализа динамических процессов, происходящих внутри ЭГ и в обществе в целом [1, 10–14]. Настоящая статья близка к работам [15–17], которые посвящены процессам, развивающимся в ЭГ. В этих работах предполагается, что на этапе формирования элиты используется достаточно простое параметрическое правило, когда в элиту попадают только члены популяции (ЧП), уровень полезности которых превышает некоторый порог. Считается, что это правило при формировании элиты выполняется с ошибками. Эти ошибки ведут к засорению ЭГ членами с низким уровнем полезности. Кроме того, со временем происходит «изнашивание» членов ЭГ, следствием которого также является уменьшение уровня полезности элиты. Поэтому в вышеназванных работах основное внимание уделяется эволюции элиты, поддержанию ее высокого уровня путем отбраковки членов с низким уровнем полезности и делегирования в элиту новых членов.

Социальная значимость работ [15–17] была впервые раскрыта в публикации А. Н. Ефимова [18], опубликованной в 1988 г. В статье прямо было указано на возможность ошибок при отборе в ЭГ и влияние этих ошибок на качество элиты. Однако, как сказано в статье [19]: «... в связи с закатом перестройки, бурными процессами распада СССР и последующего передела власти все эти идеи моделирования и исследования механизмов эволюции элит были благополучно забыты. Одной из возможных причин забвения могло стать то, что озвученные в статье результаты были слишком нелицеприятны для пришедшей к власти новой волне элит».

В предлагаемой работе акцент делается на вероятностном анализе этапа создания ЭГ и влиянии правил отбора на средний уровень полезности ее членов. Отбор в ЭГ осуществляется в соответствии с некоторым сценарием. В статье рассматриваются два сценария, причем в обоих случаях при отборе допускается возникновение ошибок. Первый сценарий отбора такой же, как и в работе [15]. При втором сценарии порог формируется исходя из достигнутого на момент отбора среднего уровня полезности всей ЭГ. Целью работы является исследование влияния правил отбора в ЭГ на динамику изменения ее среднего уровня полезности.

Вероятностные характеристики среднего уровня полезности элиты в процессе отбора

Пусть случайная величина ξ, заданная на множестве $X = [0,\ 1]$, имеет равномерное распределение с интегральной функцией распределения вероятностей $F(x;\ 0,1)$, где

$$F(x;a,b)=\begin{cases}0, & -\infty<x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & b\le x<\infty\end{cases}. \tag{1}$$

Случайная величина ξ с множеством ее значений X ассоциируется с уровнем полезности членов некоторой популяции P, перед которой стоит задача сформировать ЭГ $E \subset P$. Поскольку каждому ЧП соответствует свой уровень полезности, то в дальнейшем не будем различать членов популяции и их уровни полезности.

Элитная группа $E(X)$ представляет собой подмножество членов, чей уровень полезности при отсутствии ошибок отбора должен быть выше некоторого порога $x_{\text{пор}}$:

$$E(X)=\left\{\xi\in X:\xi\ge x_{\text{пор}}\right\}. \tag{2}$$

Заметим, что при сделанных предположениях порог $x_{\text{пор}}$ определяет вероятность отбора случайно выбранного ЧП в ЭГ $P_{\text{отб}}$, которая для равномерного распределения равна $P_{\text{отб}} = 1 - x_{\text{пор}}$.

Допустим, что ЭГ формируется путем последовательного извлечения ЧП из популяции и сравнения с порогом. При этом на k-м шаге ЧП с уровнем ξ_k попадает в элиту, если $\xi_k \ge x_{\text{пор}}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда средний уровень ЭГ

$$\eta_k=\frac{\sum_{j=1}^{k}\xi_j u_j}{\sum_{j=1}^{k}u_j}, \tag{3}$$

где u_j, $j = 1, \ldots, k$ — случайная величина, принимающая значения 1 при попадании j-й особи в элиту и 0 в противном случае. При этом η_k, $k = 1, 2, \ldots$ представляет собой дискретный случайный процесс. Целью настоящей статьи является определение статистических характеристик данного случайного процесса.

Вначале рассмотрим процесс формирования ЭГ, при котором ошибки отбора не возникают.

В данном случае $u_j = \theta(\xi_k - x_{\text{пор}})$, $j = 1, \ldots, k$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \infty \end{cases}. \quad (4)$$

Для определения статистических характеристик случайной величины η_k, $k = 1, 2, \ldots$ воспользуемся методом характеристических функций. Характеристическая функция (ХФ) совместного распределения случайных величин $A = \xi u$ и $a = u$ равна

$$\chi(p, q) = \left\langle e^{i(pA+qa)} \right\rangle =$$
$$= \int_0^1 \exp\left[i(px+q)\theta(x - x_{\text{пор}})\right] f_{\text{ст}}(x)\mathrm{d}x =$$
$$= \left[x_{\text{пор}} + e^{iq}\frac{e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}}}{ip}\right], \quad (5)$$

где $f_{\text{ст}}(x) = f(x;\ 0,1)$ — плотность стандартного равномерного распределения и

$$f(x; a, b) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a \cup b \le x < \infty \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x < b \end{cases}. \quad (6)$$

Тогда, учитывая, что отдельные слагаемые в суммах $A_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j u_j$ и $a_k = \sum_{j=1}^{k} u_j$ статистически независимы, ХФ совместного распределения случайных величин A_k и a_k будет равна

$$\chi_k(p, q) = \left[x_{\text{пор}} + e^{iq}\frac{e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}}}{ip}\right]^k. \quad (7)$$

Вычисляя обратное преобразование Фурье от (6), получим совместную плотность распределения

$$f(A_k, a_k) =$$
$$= x_{\text{пор}}^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\delta(a_k - j)}{2\pi} \int \left[\frac{e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}}}{ipx_{\text{пор}}}\right]^j e^{ipA_k}\mathrm{d}p, \quad (8)$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Тогда плотность распределения случайной величины $\eta_k = A_k/a_k$ равна

$$f(\eta_k) = x_{\text{пор}}^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{j}{2\pi} \int \left[\frac{e^{ip} - e^{ipx_{\text{пор}}}}{ipx_{\text{пор}}} e^{-ip\eta_k}\right]^j \mathrm{d}p. \quad (9)$$

Интеграл в (9) вычисляется просто, однако конечное выражение для плотности получается достаточно громоздким. Поэтому для дальнейшего анализа определим ХФ распределения:

$$\chi_k(s) = x_{\text{пор}}^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left[\frac{\exp\left(i\frac{s}{j}\right) - \exp\left(ix_{\text{пор}}\frac{s}{j}\right)}{ix_{\text{пор}}\frac{s}{j}}\right]^j. \quad (10)$$

Полученная ХФ (10) позволяет легко найти моменты распределения. В частности математическое ожидание распределения

$$\overline{\eta}(k) = 0{,}5\left(1 + x_{\text{пор}}\right)\left(1 - x_{\text{пор}}^k\right). \quad (11)$$

Как следует из (11), при $k \to \infty$ математическое ожидание среднего уровня ЭГ достаточно быстро стремится к уровню

$$\overline{\eta}_\infty = 0{,}5\left(1 + x_{\text{пор}}\right), \quad (12)$$

т. е. к середине отрезка, в который попадают значения уровня полезности ЭГ.

Рассмотрим теперь, как влияют на средний уровень ЭГ ошибки отбора. При этом будем рассматривать два сценария возникновения ошибок:

1) ошибка при отборе возникает случайно, независимо от уровня предъявляемого к отбору ЧП, при неизменном пороговом уровне $x_{\text{пор}}$;

2) ошибка при отборе возникает случайно, независимо от уровня предъявляемого к отбору ЧП, при пороговом уровне $x_{\text{пор}}$, который зависит от достигнутого на момент отбора среднего уровня элиты.

Для первого сценария средний уровень ЭГ по-прежнему вычисляется на основании уравнения (3), но случайная величина

$$u_k = \theta\left(\xi_k - x_{\text{пор}}\right) +$$
$$+ \theta\left(x_{\text{пор}} - \xi_k\right)\theta\left(P_{\text{ош}} - \zeta_k\right),\ k = 1, 2, \ldots, \quad (13)$$

где $P_{\text{ош}}$ — вероятность ошибки; ζ_k — равномерно распределенная на интервале [0, 1] случайная величина, которая характеризует возникновение ошибки и является статистически независимой от ξ_k. Как следует из (13), при $\xi_k \ge x_{\text{пор}}$ ЧП отбирается в ЭГ с вероятностью 1. В противном случае ЧП также может попасть в ЭГ с вероятностью $P_{\text{ош}}$.

Нетрудно показать, что ХФ совместного распределения случайных величин $A_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j u_j$ и $a_k = \sum_{j=1}^{k} u_j$ в данном случае будет равна

$$\chi_k(p, q) = \Big[(1 - P_{\text{ош}})x_{\text{пор}} +$$

$$\left. + e^{iq}\frac{P_{\text{ош}}\left(e^{ip}-1\right)+\left(1-P_{\text{ош}}\right)\left(e^{ip}-e^{ipx_{\text{пор}}}\right)}{ip}\right]^{k}. \quad (14)$$

Как можно заметить, уравнения (7) и (14) совпадают при $P_{\text{ош}}=0$. ХФ распределения среднего уровня ЭГ при этом будет равна

$$\chi_k(s)=\left(1-P_{\text{ош}}\right)^k x_{\text{пор}}^k \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\times$$

$$\times\left[\frac{\begin{gathered}P_{\text{ош}}\left(\exp\left(i\frac{s}{j}\right)-1\right)+\\ +\left(1-P_{\text{ош}}\right)\left(\exp\left(i\frac{s}{j}\right)-\exp\left(ix_{\text{пор}}\frac{s}{j}\right)\right)\end{gathered}}{i\left(1-P_{\text{ош}}\right)x_{\text{пор}}\frac{s}{j}}\right]^{j}. \quad (15)$$

На основании (15) легко можно вычислить математическое ожидание среднего уровня ЭГ

$$\overline{\eta}(k)=0{,}5\frac{1-x_{\text{пор}}^2\left(1-P_{\text{ош}}\right)}{1-x_{\text{пор}}\left(1-P_{\text{ош}}\right)}\left[1-x_{\text{пор}}^k\left(1-P_{\text{ош}}\right)^k\right]. \quad (16)$$

При $k\to\infty$ математическое ожидание среднего уровня ЭГ быстро стремится к величине

$$\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}=0{,}5\frac{1-x_{\text{пор}}^2\left(1-P_{\text{ош}}\right)}{1-x_{\text{пор}}\left(1-P_{\text{ош}}\right)}. \quad (17)$$

Это значение можно назвать асимптотическим средним уровнем полезности ЭГ.

Несложно показать, что это значение меньше $\overline{\eta}_{\infty}=0{,}5\left(1+x_{\text{пор}}\right)$:

$$\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}-\overline{\eta}_{\infty}=-\frac{x_{\text{пор}}P_{\text{ош}}}{1-x_{\text{пор}}\left(1-P_{\text{ош}}\right)}\le 0. \quad (18)$$

Таким образом, происходит уменьшение среднего уровня ЭГ вследствие «загрязнения» сорными особями, проникающими в ЭГ из-за ошибок отбора. Как следует из (18), разница между уровнями $\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}$ и $\overline{\eta}_{\infty}$ тем больше, чем выше вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ и уровень порога $x_{\text{пор}}$. При вероятности ошибки

$$P_{\text{крит}}=\left(1-x_{\text{пор}}\right)^2 \big/ x_{\text{пор}}^2, \quad (19)$$

которая может быть названа *критической*, $\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}=x_{\text{пор}}$ и средний уровень ЭГ равен порогу отбора $x_{\text{пор}}$, т. е. нижнему допустимому уровню полезности ЭГ. Учитывая, что величина порога $x_{\text{пор}}$ близка к единице, *критическая вероятность*, как следует из (19), примерно равна квадрату вероятности попадания члена популяции в ЭГ и, следовательно, принимает очень малые значения. Например, при $x_{\text{пор}}=0{,}95$ *критическая вероятность ошибки отбора* составляет всего $P_{\text{ош}}=0{,}0028$. В то же время несложно показать, что $\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}\ge 0{,}5$, причем равенство достигается только при $P_{\text{ош}}=1$. Следовательно, при реализации рассматриваемого сценария отбора с большой вероятностью средний уровень полезности ЭГ всегда будет выше среднего уровня полезности по всей популяции.

Рассмотрим теперь второй сценарий отбора с ошибкой. Пусть уровень порога, с которым сравнивается очередной кандидат в ЭГ, зависит от текущего среднего уровня (рис. 1):

$$x_{\text{пор}}^{(k)}=\eta_k-\left(1-\eta_k\right)=2\eta_k-1. \quad (20)$$

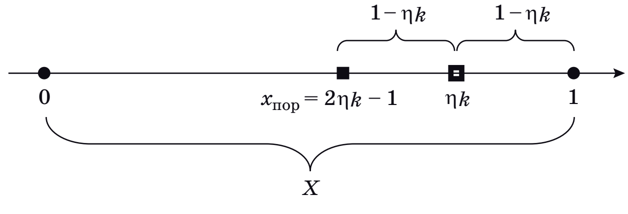
В данном случае свойство статистической независимости отобранных кандидатов, которое являлось основой проведенного ранее анализа, не выполняется, так как порог на текущем шаге зависит от результатов предыдущих шагов. Поэтому для статистического анализа рассматриваемого варианта перепишем уравнение (3) в виде

$$\eta_k=\frac{\sum\limits_{j=1}^{k-1}\xi_j u_j+\xi_k u_k}{\sum\limits_{j=1}^{k-1}u_j+u_k}=\frac{\eta_{k-1}a_{k-1}+\xi_k\left(a_k-a_{k-1}\right)}{a_k}=$$

$$=\xi_k+\left(\eta_{k-1}-\xi_k\right)\frac{a_{k-1}}{a_k}. \quad (21)$$

Уравнение (20) позволяет легко определить условную плотность вероятностей

$$\begin{gathered}f\left(\eta_k,\, a_k \middle| \eta_{k-1},\, a_{k-1}\right)=\\ =P_{\text{ош}}\left(2\eta_{k-1}-1\right)\delta\left(a_k-a_{k-1}-1\right)\times\\ \times f\left(\eta_k;\ \frac{a_{k-1}\eta_{k-1}}{a_k},\ \frac{2\eta_{k-1}-1+a_{k-1}\eta_{k-1}}{a_k}\right)+\\ +\left(1-P_{\text{ош}}\right)\left(2\eta_{k-1}-1\right)\delta\left(a_k-a_{k-1}-1\right)\times\\ \times\delta\left(\eta_k-\eta_{k-1}\right)+2\left(\eta_{k-1}-1\right)\delta\left(a_k-a_{k-1}-1\right)\times\\ \times f\left(\eta_k;\ \frac{2\eta_{k-1}-1+a_{k-1}\eta_{k-1}}{a_k},\ \frac{1+a_{k-1}\eta_{k-1}}{a_k}\right),\end{gathered} \quad (22)$$



■ ***Рис. 1.*** Средний уровень полезности η_k и порог отбора $x_{\text{пор}}$ на k-м шаге

■ ***Fig. 1.*** The mean level of utility η_k and the threshold of selection $x_{\text{пор}}$ at the k-th step где $f(x;\, a,\, b)$ — плотность равномерного распределения вероятностей (6). На основании (21) можно сделать вывод, что двухмерный случайный процесс $\zeta_k = (\eta_k,\ a_k)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ является марковским с плотностью перехода (22). Для полного описания этого процесса надо определить начальную безусловную плотность распределения $f(\eta_1,\ a_1)$. Поскольку начальный отбор в ЭГ соответствует событию $a_1 = 1$, данная плотность легко вычисляется:

$$f\left(\eta_1,\, a_1 = 1\right) = \frac{\delta\left(a_1 - 1\right)}{2\left(1 - x_{\text{пор}}\left(1 - P_{\text{ош}}\right)\right)} \times$$
$$\times\left[\operatorname{sign}\left(1-\eta_1\right) - \left(1 - P_{\text{ош}}\right)\operatorname{sign}\left(x_{\text{пор}} - \eta_1\right) + \right.$$
$$\left. + P_{\text{ош}}\operatorname{sign}\left(\eta_1\right)\right], \qquad (23)$$

где $\operatorname{sign}(\cdot)$ — функция «знака».

Условное математическое ожидание распределения с плотностью перехода (22)

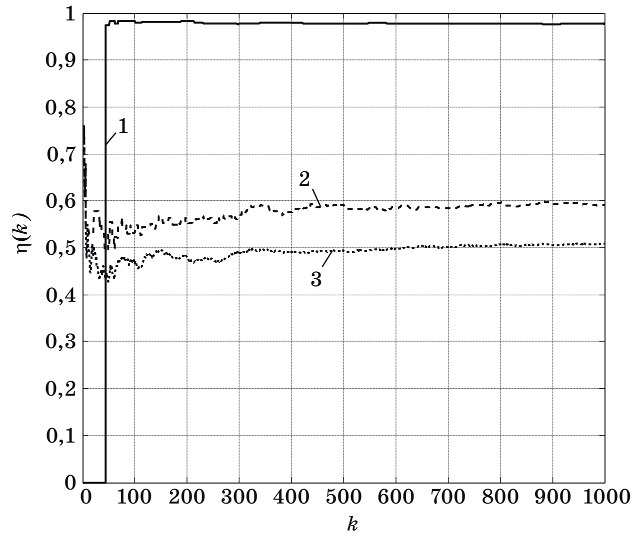
$$E\left\{\eta_k \middle| \eta_{k-1},\, a_{k-1}\right\} = \eta_{k-1} - P_{\text{ош}}\frac{2\eta_{k-1} - 1}{2\left(a_{k-1} + 1\right)}. \qquad (24)$$

Поскольку при $k \to \infty$ $a_{k-1} \to \infty$, происходит стабилизация среднего уровня ЭГ на некотором асимптотическом значении $\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}$. Уравнение (24) позволяет определить этот уровень. Очевидно, что при $\eta_{k-1} = 0{,}5$ второе слагаемое в (24) становится равным нулю, и, следовательно, $\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}} = 0{,}5$. Таким образом, при $P_{\text{ош}} > 0$ средний уровень элиты неминуемо становится равным среднему уровню популяции $\overline{x} = 0{,}5$. От вероятности ошибки отбора $P_{\text{ош}}$ будет зависеть лишь длительность переходного процесса: чем меньше $P_{\text{ош}}$, тем большее время потребуется для стабилизации среднего уровня элиты.

Реализации процесса $\overline{\eta}(k)$ для трех рассмотренных сценариев отбора представлены на рис. 2 при $P_{\text{отб}} = 0{,}05$ ($x_{\text{пор}} = 0{,}95$) и $P_{\text{ош}} = 0{,}20$ в дискретном времени. Сравнение кривых на рисунке позволяет сделать следующие выводы.

1. При отборе без ошибок средний уровень элиты быстро стремится к значению $\overline{\eta}_{\infty} = 0{,}975$ и в дальнейшем слабо флюктуирует около этого уровня. Дисперсия флюктуаций уменьшается с течением времени.

2. При отборе с ошибками по обоим сценариям наблюдается длительный переходный процесс, в результате которого $\eta(k)$ стремится к асимптотическому значению $\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}$ и в дальнейшем также слабо флюктуирует около этого уровня. Дисперсия флюктуаций тоже уменьшается с течением времени, но ее величина больше, чем при отборе без ошибок. При этом во время переходного процесса возможно значительное уменьшение среднего уровня элиты по сравнению с асимптотическим значением $\overline{\eta}_{\infty}^{\text{ош}}$. Так, для реализаций на рис. 2 средний уровень принимал значения ниже среднего уровня всей популяции $\overline{x} = 0{,}5$, причем для второго сценария промежуток времени, когда средний уровень ЭГ был ниже среднего уровня всей популяции, был достаточно продолжительным.

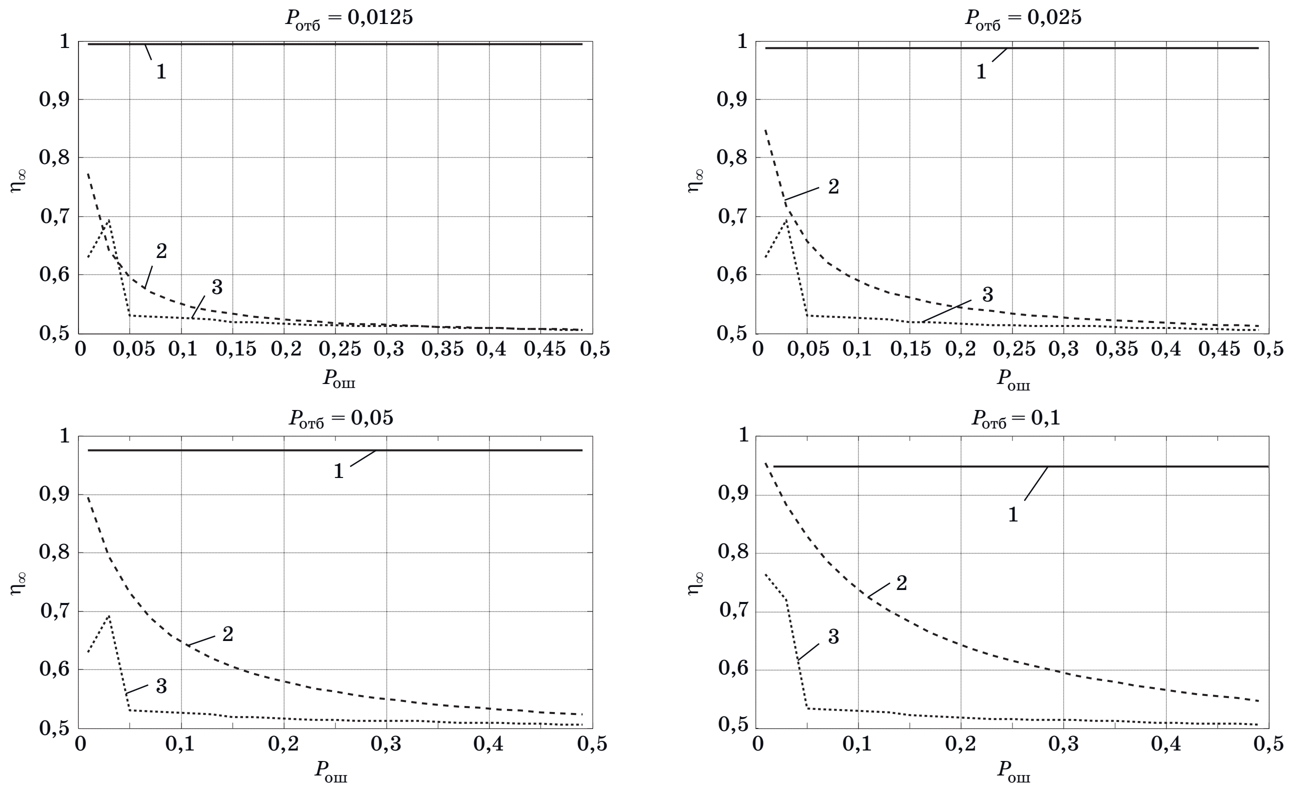


■ *Рис. 2.* Изменение среднего уровня полезности во времени для различных сценариев отбора при $P_{\text{отб}} = 0{,}05$ ($x_{\text{пор}} = 0{,}95$) и $P_{\text{ош}} = 0{,}20$: *1* — без ошибки; *2* — первый сценарий; *3* — второй сценарий

■ *Fig. 2.* Changing of the mean level of utility over time for different scenarios of selection for $P_{\text{отб}} = 0{,}05$ ($x_{\text{пор}} = 0{,}95$) and $P_{\text{ош}} = 0{,}20$: *1* — without error; *2* — first scenario; *3* — second scenario

3. Ошибки при отборе резко снижают средний уровень ЭГ. Это может иметь катастрофические последствия, особенно для отбора с ошибками по второму сценарию, при котором средний уровень элиты только по прошествии достаточно продолжительного переходного процесса стабилизируется на уровне $\overline{x} = 0{,}5$.

В соответствии с уравнениями (12) и (17) рассчитаны зависимости математического ожидания $\overline{\eta}_{\infty}$ от вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ при различных значениях $P_{\text{отб}}$ (рис. 3). Соответствующая кривая для второго сценария получена по результатам математического моделирования. Небольшие отклонения от уровня $\overline{x} = 0{,}5$ для этой кривой объясняются необходимостью моделировать очень длинные серии отбора при малых значениях вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$. Это невозможно в условиях конечности времени моделирования. Графики на рисунке свидетельствуют о значительной разнице результатов отбора по рассматриваемым сценариям. Для первого сценария асимптотический уровень полезности ЭГ, оставаясь больше среднего уровня полезности всей популяции, монотонно убывает с увеличением



■ ***Рис. 3.*** Зависимости асимптотического среднего уровня полезности элиты $\overline{\eta}_\infty$ от вероятности ошибки $P_{ош}$ при различных значениях вероятности отбора $P_{отб}$ для трех сценариев отбора: *1* — без ошибки; *2* — первый сценарий; *3* — второй сценарий

■ ***Fig. 3.*** Plots of the asymptotic mean level of utility of the elite via the probability of the error $P_{ош}$ for different probabilities of selection $P_{отб}$ and selection scenarios: *1* — without error; *2* — first scenario; *3* — second scenario

вероятности ошибки $P_{ош}$. Для второго сценария при любом значении вероятности ошибки асимптотический уровень равен среднему уровню полезности популяции. Таким образом, в ситуации, когда элита сама начинает устанавливать правила отбора, неминуемо происходит ее засорение, и с течением времени представители элиты в среднем перестают отличаться от других членов популяции по уровню своей полезности.

Заключение

В работе дан вероятностный анализ процесса формирования ЭГ в популяции с равномерным распределением уровня полезности. Рассмотрены два сценария отбора в ЭГ: отбор с фиксированным порогом уровня полезности кандидатов и отбор с порогом, величина которого зависит от среднего уровня полезности членов самой ЭГ. В обоих случаях при отборе допускаются случайные ошибки с некоторой вероятностью. Установлено, что при отборе по первому сценарию средний уровень полезности элиты стремится к уровню, величина которого даже при больших вероятностях ошибки отбора больше среднего уровня полезности по всей популяции в целом. Однако если считать недопустимым уменьшение среднего уровня полезности элиты ниже порога отбора, вероятность ошибок при отборе должна быть меньше или равна квадрату вероятности попадания члена популяции в ЭГ. При втором сценарии, когда порог отбора фактически определяется самой элитой, средний уровень полезности стремится к значению этого параметра по всей популяции независимо от вероятности ошибки отбора. Величина последней влияет только на длительность переходного процесса, в течение которого элита «растворяется» в популяции, и ее представители в среднем перестают отличаться от других членов популяции по уровню своей полезности.

Учитывая, что ЭГ в значительной мере влияет на состояние популяции, следует признать, что для ее правильного формирования должен использоваться сценарий с фиксированным, высоким порогом отбора. Тогда, несмотря на возможные ошибки при отборе, вероятность появления которых надо по возможности уменьшать, в элиту с большой вероятностью будут попадать члены с высоким уровнем полезности.

Литература

1. **Бухарин С. Н., Малков С. Ю.** *Эволюция элиты (материалы и исследования)*. М., Академический проект, Гаудеамус, 2014. 281 с.
2. **Араби Б.** Ибн-Хальдун — основоположник арабской социологии. *Социологические исследования*, 1990, № 11, с. 107–109.
3. **Ашин Г. К.** Элитология в системе общественных наук. *Общественные науки и современность*, 2003, № 4, с. 124–134.
4. **Ашин Г. К.** *Курс истории элитологии*. М., МГИМО, 2003. 302 с.
5. **Lopez M.** Elite theory. *Sociopedia.isa*, 2013. http://www.sagepub.net/isa/resources/pdf/elitetheory.pdf (дата обращения: 21.11.2018). doi:10.1177/2056846013112
6. **Perez R. M.** On Pareto theory of circulation of elites. *Archiv.org*, 2014. https://arxiv.org/pdf/1412.4695.pdf (дата обращения: 21.11.2018).
7. **Волков С. В.** *Элитные группы традиционных обществ*. М., Изд-во ун-та Дмитрия Пожарского; Русский фонд содействия образованию и науке, 2017. 343 с.
8. **Amsden A. H., DiCaprio A., Robinson J.** *The role of elites in economic development. UNU-WIDER studies in development economics*. Oxford, Oxford University Press, 2014. 398 p.
9. **Fisman R., Jakiela P., Kariv S., Markovits D.** The distributional preferences of an elite. *Science*, 2015, vol. 349, no. 6254. doi:10.1126/science.aab0096
10. **Turchin P.** *Historical dynamics: why states rise and fall*. Princeton, Princeton University Press, 2003. 257 p.
11. **Малков С. Ю.** *Социальная самоорганизация и исторический процесс: Возможности математического моделирования*. М., ЛИБРОКОМ, 2009. 236 с.
12. **Михайлов А. П.** Математическое моделирование динамики распределения власти в иерархических структурах. *Математическое моделирование*, 1994, № 6, с. 108–138.
13. **Дмитриев М. Г., Павлов А. А., Петров А. П.** *Развитие модели «власть — общество — экономика»* / *Математическое моделирование социальных процессов*: сб., 2009, вып. 10, с. 17–29.
14. **Бухарин С. Н., Малков С. Ю.** Математическое моделирование эволюции элиты. *Информационные войны*, 2013, № 1(25), с. 21–31.
15. **Ефимов А. Н., Кутеев В. М.** Исследование и моделирование некоторых свойств элитных групп. *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*, 1980, № 3, с. 177–185.
16. **Ефимов А. Н., Кутеев В. М.** Ранговые процедуры управления эволюцией элитных групп. *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика*, 1980, № 6, с. 3–12.
17. **Ефимов А. Н., Кутеев В. М.** Эволюция элитных групп, сформированных делегированием. *Автоматика и телемеханика*, 1990, № 12, с. 143–152.
18. **Ефимов А. Н.** Элитные группы, их возникновение и эволюция. *Образовательная политика*, 2011, № 1(51), с. 17–23 (впервые опубл. в журнале «Знание — сила», 1988, № 1, с. 56–64).
19. **Кутлалиев А.** Математический принцип выживания элит. Почему демократия — лучшая из худших политических систем. *Независимая газета*. http://www.ng.ru/ng_politics/2014-03-04/14_elites.html?print = Y (дата обращения: 21.11.2018).

UDC 519.2
doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

Statistical characteristics of the mean level of an elite group utility in selection

A. A. Monakov[a], Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0003-4469-0501, a_monakov@mail.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: The development of biological and social systems is largely determined by the utility level of the elite group which stands out from the main population, being characterized by a high status. An elite group development process is random due to unavoidable errors in selection. The degree of influence of these errors on the utility level of an elite group can differ depending on the selection rules. **Purpose:** Evaluation of the influence of selection rules on the dynamics of the mean level of an elite group utility. **Results:** We have studied the dynamically changing probabilistic characteristics of an average elite group utility level, following two different selection scenarios: with a fixed threshold, and with a threshold determined by the mean level of the group utility achieved by the moment of the selection. It has been found out that in the first scenario the mean level of the elite group utility tends to a level whose value, even when the selection error probability is high, is greater than the mean utility level for the whole population. However, if it is unacceptable to reduce the mean level of the elite utility below the selection threshold, the error probability should be less than or equal to the square of the probability that a population member is selected for the elite group. It is proved that in the second scenario the mean level of the elite group utility tends to the mean value of this parameter for the whole population, regardless of the selection error probability. The latter affects only the duration of the transition process during which the elite «dissolves» in the population and its representatives cease to differ on average from the other members of the population in terms of their utility. The concept of critical probability of selection errors is introduced, at which the mean level of the elite group utility is equal to the lowest permissible boundary. **Practical relevance:** It is proved that correct elite development requires a selection scenario with a fixed high threshold. The calculated value of the critical probability of selection errors can be used to control the development of an elite group.

Keywords — elite, elite group, member status, utility level, selection, selection error probability.

For citation: Monakov A. A. Statistical characteristics of the mean level of an elite group utility in selection. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 57–64 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-57-64

References

1. Bukharin S. N., Malkov S. Yu. *Evolucia elity (materially i issledovania)* [Evolution of the elite (materials and research)]. Moscow, Academitcheskii proect, Gaudeamus Publ., 2014. 281 p. (In Russian).
2. Arabi B. Ibn Khaldun — the founder of Arab sociology. *Sociologicheskie issledovaniya* [Sociological Studies], 1990, no. 11, pp. 107–109 (In Russian).
3. Ashin G. K. Elitology in the system of social sciences. *Obshchestvennye nauki i sovremennost'*, 2003, no. 4, pp. 124–134 (In Russian).
4. Ashin G. K. *Kurs istorii elitologii* [The course of the history of elitology]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj institut mezhdunarodnyh otnoshenij Publ., 2003. 302 p. (In Russian).
5. Lopez M. Elite theory. *Sociopedia.isa*, 2013. Available at: http://www.sagepub.net/isa/resources/pdf/elitetheory.pdf (accessed 21 November 2018). doi:10.1177/2056846013112
6. Perez R. M. On Pareto theory of circulation of elites. *Archiv.org*, 2014. Available at: https://arxiv.org/pdf/1412.4695.pdf (accessed 21 November 2018).
7. Volkov S. V. *Elitnye gruppy traditzionnyh obschestv* [Elite groups of traditional societies]. Moscow, Universitet Dmitriya Pozharskogo; Russkij fond sodejstviya obrazovaniyu i nauke Publ., 2017. 343 p. (In Russian).
8. Amsden A. H., DiCaprio A., Robinson J. *The role of elites in economic development. UNU-WIDER studies in development economics.* Oxford, Oxford University Press, 2014. 398 p.
9. Fisman R., Jakiela P., Kariv S., Markovits D. The distributional preferences of an elite. *Science*, 2015, vol. 349, no. 6254. doi:10.1126/science.aab0096
10. Turchin P. *Historical dynamics: why states rise and fall.* Princeton, Princeton University Press, 2003. 257 p.
11. Malkov S. Yu. *Social'naya samoorganizatzia i istoricheskii progress: Vozmozhnosti matematicheskogo modelirovaniya* [Social self-organization and historical process: Possibilities of mathematical modeling]. Moscow, LIBROKOM Publ., 2009. 236 p. (In Russian).
12. Mikhailov A. P. Mathematical modeling of the dynamics of the distribution of power in hierarchical structures. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 1994, vol. 6, no. 6, pp. 108–138 (In Russian).
13. Dmitriev M. G., Pavlov A. A., Petrov A. P. *Razvitie modeli "vlact' — obschestvo — ekonomika"*. In: *Matematicheskoe modelirovanie social'nyh processov* [Development of the model "power — society — economy". In: Scientific and technical collection "Mathematical modeling of social processes"], 2009, iss. 10, pp. 17–29 (In Russian).
14. Bukharin S. N., Malkov S. Yu. Mathematical modeling of the evolution of the elite. *Informacionnye vojny*, 2013, no. 1(25), pp. 21–31 (In Russian).
15. Efimov A. N., Kuteev V. M. Research and modeling of some properties of elite groups. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tehnicheskaia kibernetika*, 1980, no. 3, pp. 177–185 (In Russian).
16. Efimov A. N., Kuteev V. M. Rank management procedures for the evolution of elite groups. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Tehnicheskaia kibernetika*, 1980, no. 6, pp. 3–12 (In Russian).
17. Efimov A. N., Kuteev V. M. Evolution of elite groups formed by delegating. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1990, vol. 51, no. 12, pp. 1725–1732 (In Russian).
18. Efimov A. N. Elite groups, their origin and evolution. *Obrazovatel'naya politika* [Educational Policy Journal], 2011, no. 1(51), pp. 17–23 (firstly published in "*Znanie — sila*", 1988, no. 1, pp. 56–64) (In Russian).
19. Kutlaliev A. The mathematical principle of elite survival. Why democracy is the best of the worst political systems. *Nezavisimaya Gazeta*. Available at: http://www.ng.ru/ng_politics/2014-03-04/14_elites.html?print = Y (accessed 21 November 2018) (In Russian).